



HAL
open science

Construcción de normas generadoras de oportunidades para el aprendizaje matemático

Núria Planas, Kaouthar Boukafri

► **To cite this version:**

Núria Planas, Kaouthar Boukafri. Construcción de normas generadoras de oportunidades para el aprendizaje matemático. 2019. hal-02024105

HAL Id: hal-02024105

<https://hal.science/hal-02024105>

Preprint submitted on 18 Feb 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Construcción de normas generadoras de oportunidades para el aprendizaje matemático

Núria Planas y Kaouthar Boukafri
Universitat Autònoma de Barcelona

Resumen

Tras décadas de investigación sobre el papel de las normas sociomatemáticas en educación matemática, en este capítulo revisamos el momento histórico de esta línea de estudio e introducimos la noción de norma fundamental. Mientras que las normas sociomatemáticas aportan criterios prescriptivos para valorar la adecuación de prácticas matemáticas de aula, hay una norma de orden superior que fundamenta y unifica el conjunto de prácticas a modo de sistema cultural. Si esta norma se pudiera expresar por escrito, simplemente diría que el alumno debe hablar y escribir las matemáticas en clase como lo haría un profesor de matemáticas. Este es el punto de partida de la lectura renovada del caso de Khadija, documentado en Planas (2002). Reconocemos la fuerte influencia en nuestro pensamiento actual de las teorías sociales, culturales y políticas de la enseñanza y del aprendizaje de las matemáticas.

1. UN NUEVO CONTEXTO PARA LA NORMA SOCIOMATEMÁTICA

Preguntarse qué genera un obstáculo en el aprendizaje tiene dos primeras lecturas, según si se toma el obstáculo como agente -¿qué genera, cómo y por qué?- o como resultado -¿por qué, dónde y cómo se genera? Ambas interpretaciones son posibles, además de complementarias, puesto que sitúan cualquier obstáculo a la vez como proceso y producto de un complejo "estado de cosas" con influencia en el aprendizaje. Estudios recientes (Planas y Valero, 2016) abogan por la existencia de un denominador común social, cultural y político en las condiciones que preparan, sostienen y suceden a un obstáculo, pero sobre todo problematizan la lógica misma de la identificación de obstáculos.

Centrar una pregunta en la idea de obstáculo es una opción de estudio ideológicamente distinta a pensar en la idea de oportunidad o bien en la relación entre oportunidad y obstáculo. En este capítulo examinamos aspectos de la generación de oportunidades en el aprendizaje matemático, con atención a la tensión dialéctica entre obstáculos y oportunidades. Complementamos así, y matizamos, contenidos del artículo "Obstáculos en el aprendizaje matemático generadores de interrupciones en la participación" (Planas, 2002), publicado en Educación Matemática. Ahí todavía no se consideró el doble potencial investigador y pedagógico de las "oportunidades de aprendizaje", a pesar de que otros autores cercanos ya sugerían avanzar en esta

dirección (véase, por ejemplo, otro artículo en Educación Matemática, Godino y Llinares, 2000, p. 83).

El propósito de Planas (2002) era señalar consecuencias de la experiencia de obstáculos en la participación matemática de los alumnos, con interés incipiente por indagar aspectos sociales, culturales e históricos ligados a la cultura normativa del aula de matemáticas:

En este artículo, se señalan aspectos de las interacciones sociales del aula que parecen estar vinculados con obstáculos en la participación de aquellos alumnos que no se ajustan a las normas de actuación representadas por los grupos dominantes. [...] Las múltiples formas de legitimar unas normas y, a su vez, de excluir otras tienen claras implicaciones sobre aspectos de equidad en tanto que afectan las condiciones de participación de ciertos grupos de alumnos. (p. 6)

Ese artículo resultó de un trabajo de tesis doctoral (Planas, 2001) influenciado por la concepción constructivista e interaccionista de norma sociomatemática (Bowers, Cobb y McClain, 1999; Yackel y Cobb, 1996). Se adoptaba el supuesto de que el aprendizaje matemático requiere el aprendizaje de reglas subyacentes a formas culturalmente establecidas de participar en la escuela y en la práctica de aula. Desde entonces, en el marco del Grupo de Investigación en Práctica Educativa y Actividad Matemática (GIPEAM), con sede en la Universitat Autònoma de Barcelona, hemos refinado el análisis de interacciones en clase y hemos comprendido que dicho análisis puede utilizarse para detectar obstáculos e interrupciones, pero también oportunidades de aprendizaje y continuidades en la participación. Llevamos a cabo una agenda de investigación sobre la producción y distribución de oportunidades de aprendizaje matemático, con énfasis en la naturaleza, el papel y el cuestionamiento de lo normativo. El planteamiento de fondo es que el estudio de las oportunidades de aprendizaje matemático implica el de la construcción de las normas del aula de matemáticas. Nuestra tesis central es la prevalencia y permanencia de una norma fundamental, que organiza y unifica el conjunto de normas sociomatemáticas, con implicaciones para la actividad matemática del alumno en clase y su valoración. De ello hablaremos tras esta introducción.

Nuestra agenda actual y nuestros argumentos difícilmente podrían haber surgido en una época anterior. La trayectoria de GIPEAM se sitúa en un área de investigación que ha cambiado sustancialmente en las últimas décadas. El papel de las teorías sociales del aprendizaje y de la enseñanza de las matemáticas ha dejado de ser menor, y foros como los congresos del International Group for the Psychology of Mathematics Education (IGPME) y de la European Society for Research in Mathematics Education (ERME) han experimentado un aumento sostenido de referencias a estas teorías (Planas, Morgan y Schütte, 2018; Planas y Valero, 2016). A tal desarrollo han contribuido muy especialmente las lecturas más precisas y completas de lo social en la obra de Vygotsky (Roth, 2018; Roth y Radford, 2011). El nuevo contexto histórico ha impactado en la concepción de norma sociomatemática en el área en general, y en GIPEAM en particular.

Así como en la década de 1990 la noción de norma sociomatemática surgía al observar que las teorías psicológicas del desarrollo humano no bastaban para explicar el aprendizaje matemático en entornos de interacción en clase, a inicios del siglo XXI empieza a documentarse la insuficiencia explicativa de las teorías constructivistas e interaccionistas de la actividad, que siguen concibiendo mente y pensamiento como último eslabón de un orden lineal, donde el aprendizaje matemático se facilitaría en el grupo y se produciría en el individuo. Una variedad de perspectivas (p. ej., Brown, 2010; Chronaki y Planas, 2018; Herbel-Eisenmann, 2003) ha señalado que este supuesto de linealidad en el aprendizaje -de lo social a lo individual- oculta y naturaliza la constitución social, cultural y política de la matemática escolar, de la enseñanza y del aprendizaje. El área ha visto crecer miradas críticas a los procesos de naturalización de culturas del aula de matemáticas que relegan sistemáticamente ciertos modos de hablar y de hacer y, con ello, reducen la producción y distribución equitativa de oportunidades de aprendizaje matemático (Hunter, Civil, Herbel-Eisenmann, Planas y Wagner, 2018). Sabemos que las normas de clase no son socialmente neutras, didácticamente adecuadas per se, ni sinónimo de práctica necesaria, sino fruto de la constitución diferenciada de modos de hablar y de hacer matemáticos en la escuela.

En lo que sigue, organizamos el capítulo con una reflexión teórica sobre lo que llamamos norma fundamental, que ordena de manera tácita la actividad matemática del alumno en clase y con la cual se da significado al resto de normas. Nos preguntamos qué aporta la visión de esta norma fundamental a la comprensión del caso que se discutió en el artículo de 2002, el de Khadija, una alumna de 17 años de edad que llevaba cinco en el sistema escolar catalán. Se examinaron normas sociomatemáticas puestas en práctica durante una sesión de clase y se describieron interpretaciones distintas de esas normas, pero no se indagó el fundamento subyacente a pensar unas interpretaciones más adecuadas que otras. Se discutió la interrupción en la participación de Khadija, sin considerarse el juego involucrado en la naturalización de una cierta cultura de la matemática escolar.

2. ¿QUE TIENEN EN COMÚN LAS NORMAS SOCIOMATEMÁTICAS?

Yackel y Cobb (1996) introducen la noción temprana de norma, con la siguiente definición: "Las regularidades en la actividad comunitaria o colectiva del aula que pueden considerarse conjuntamente establecidas por profesor y alumnos como miembros de la comunidad del aula" (p. 178) [nuestra traducción]. Estas regularidades, de carácter social, se denominan sociomatemáticas cuando son específicas de la actividad matemática (p. ej., qué cuenta como explicación en clase de matemáticas; qué cuenta como ejemplo de un objeto matemático), por lo que no se aplican rutinariamente en clases de geografía, historia o biología. Si bien el término se acuña desde la línea interaccionista de investigación en educación matemática, sus orígenes se remontan a la tradición sociológica de la década de 1980.

Bauersfeld (1988) y Voigt (1985) indican la existencia de regularidades o patrones de interacción normativos en el aula de matemáticas, constitutivos de rutinas y obligaciones que el alumno debe aprender. Una de las funciones del profesor de matemáticas en su enseñanza es comunicar proposiciones declarativas de tipo técnico (p. ej., cuántos vértices tiene un cuadrilátero; cuáles son las ternas pitagóricas), pero también rutinas y obligaciones que, en palabras de Roth y Radford (2011), históricamente han perpetuado un discurso subsidiario de la matemática escolar como género afín a la matemática. Así, es habitual la "transferencia" de rutinas de las matemáticas en la resolución de problemas o en la argumentación a la matemática escolar. En Planas, Arnal y García-Honrado (2018), se ilustran discursos de profesores donde los modos de hablar y de hacer en la resolución de un problema de probabilidad en clase se vinculan directamente con el quehacer en matemáticas ("En todos los casos se soluciona matemáticamente", p. 53; "Hemos conseguido resolverlo matemáticamente", p. 54).

Hasta hoy, las normas sociomatemáticas se han conceptualizado mayormente como una "clase" o tipo de normas que tienen en común las cualidades inmateriales de la definición de Yackel y Cobb (1996). Desde hace algún tiempo, en GIPEAM vemos importante incorporar otra cualidad común. Hay una norma fundamental que es expresión de orden, que subsume las sociomatemáticas y permite representarlas como parte de un sistema cultural unificado. Mientras que las normas sociomatemáticas aportan criterios prescriptivos de adecuación para prácticas matemáticas concretas -argumentar, explicar, justificar, modelar...-, hay una norma de orden superior con la función de validar la matemática escolar como un todo, que fundamenta el conjunto de prácticas. La interpretación de la adecuación de estas prácticas se da de acuerdo con una norma que remite a la experiencia de una cultura escolar, que se piensa única (Morgan, 2000) y con estado de necesidad (Chronaki y Planas, 2018; Roth y Radford, 2011).

Si esta norma fundamental se pudiera expresar por escrito, simplemente diría que el alumno debe hablar y escribir las matemáticas en clase como lo haría un profesor de matemáticas. Es, por tanto, una norma con capacidad para producir interpretaciones de normas: la aplicación adecuada de una norma sociomatemática es la que haría, o la que se supone que haría, un profesor de matemáticas. La apropiación de esta norma llevada al extremo implica que solo es posible participar adecuadamente en clase de matemáticas si se supone y anticipa lo que haría un profesor de matemáticas. Uno de los problemas es el de la exigencia de generar suposiciones sin la garantía de acceso a referentes prácticos que las avalen. La norma fundamental es una norma deslocalizada que reposa en la experiencia histórica de la cultura escolar, donde lo adecuado no siempre se sabe ni siempre es observable en hechos inmediatos de clase. La propia representación del profesor de matemáticas es una representación deslocalizada, que no se corresponde con el profesor concreto presente en el aula a cada momento.

En un sentido amplio, tenemos que la norma fundamental es una condición estructurante previa y de control de modos de hablar y de hacer en la valoración -y evaluación- de la actividad matemática de los alumnos en clase. Además de aprender a reconocer y utilizar el vocabulario y la gramática de la matemática escolar (Pimm,

1987), el aprendizaje matemático del alumno se concibe dentro de los límites de la actividad que eventualmente se observa y que se le supone al profesor de matemáticas. Nos encontramos con dos extremos y otro supuesto de linealidad. El aprendizaje se piensa como proceso lineal, que va de la lengua en uso del alumno -su discurso- hacia una lengua de las matemáticas que utilizaría un profesor de matemáticas en clase. Esta concepción persiste mediante discursos de idealización pedagógica de una lengua única de las matemáticas, hablada y escrita por un profesor unitario de matemáticas (Planas et al., 2018). La norma fundamental tiene, así, el doble efecto de naturalizar la distancia entre la lengua en uso del alumno, por un lado, y la lengua en uso del profesor y de las matemáticas, por otro (Planas, 2018). El alumno se encuentra ante la paradoja de tener que aprender a tomar distancia de su propio discurso, en favor de hablar y de hacer unas matemáticas representadas por el discurso del profesor de matemáticas.

No parece haber una razón pedagógica en la diferenciación excluyente entre lenguas en uso del alumno y del profesor, por lo que las razones deben buscarse en otro orden de fines. La paradoja de la irrelevancia de los modos de hablar y de hacer del alumno es el resultado de una construcción social, cultural y política. En el marco global de lenguas y culturas oficiales (Planas, 2018), no es políticamente inocente la pretensión de comprender la enseñanza y el aprendizaje dando un valor marginal al discurso del alumno. En Barwell et al. (2016) se desvelan ideologías de déficit en torno a lenguas y culturas de alumnos de distintas edades y condiciones. Bajo estas ideologías, los modos de hablar y de hacer matemáticas distintos a los hegemónicos se asocian a carencias y dificultades del alumno. Las implicaciones de estas ideologías -hoy en día rechazadas como principio, pero no superadas- son especialmente dramáticas para el alumno sin los bienes sociales de consumo, ni el capital cultural y lingüístico de los grupos dominantes. Este alumno debe hablar y escribir las matemáticas en clase como lo haría un profesor de matemáticas que se expresa con precisión en la lengua de instrucción y que es garante de la cultura oficial. De ahí que las normas sociomatemáticas se apliquen como normas eminentemente sociales (Gorgorió y Planas, 2005) de un orden que incluye y alude al interior y al exterior del aula (Planas y Gorgorió, 2004). Lo que es normativo y lo que es anómalo fuera del aula también se representa como normativo y anómalo dentro.

En síntesis, las normas sociomatemáticas tienen en común su ordenación según una norma fundamental y su producción eminentemente social. Incluso en este contexto, hay margen de revisión e incidencia en las interpretaciones de normas en clase. La interpretación de normas es un proceso continuo de articulación de lo que se supone que haría un profesor de matemáticas, y de lo que ocurre en el terreno práctico de un aula. En el volumen 50(6) de ZDM, titulado "Research frameworks for the study of language in mathematics education", o en los capítulos del volumen editado por Hunter et al. (2018), se relatan estudios sobre cambios en la interpretación del papel de ciertas lenguas de los alumnos, y de las matemáticas en la enseñanza y en el aprendizaje. Boukafri, Civil y Planas (2018), por su parte, muestran culturas de aulas de matemáticas con un uso flexible de las lenguas de los alumnos y de las matemáticas en la interacción. Si bien la norma fundamental establece que en la resolución de la tarea debe hablarse como lo haría un profesor de matemáticas, las

dos profesoras de este estudio utilizan expresiones como 'tir en diagonal' junto a terminología técnica para describir movimientos en el espacio. En la próxima sección volveremos sobre este juego dialéctico entre lenguas en uso.

A modo de los ciclos de experimentos de enseñanza y aprendizaje en la tradición interaccionista (Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer y Schauble, 2003; Cobb, Zhao y Dean, 2009), los trabajos mencionados en el párrafo anterior prueban que determinados aspectos de la cultura del aula de matemáticas se pueden modificar. Como en aquellos experimentos, la medida de control sigue siendo la intensidad y la amplitud de la participación matemática, con ajuste a la norma según la cual el alumno debe hablar y escribir las matemáticas como lo hace un profesor concreto en una secuencia de sesiones de clase. Se diseñan, implementan y evalúan prácticas de aula para la emergencia de discursos de reformulación de lo adecuado a través de hechos observables en clase. Se busca producir situaciones de enseñanza y aprendizaje que se someten a un ciclo de repeticiones hasta que su uso se vuelve social en clase. Así, otras interpretaciones de modos adecuados de hablar y de hacer matemáticas en clase logran ganar validez por un camino distinto al de la representación de una cultura "natural" de la matemática escolar. Además de abrir la puerta a la aceptación de interpretaciones distintas, la lógica de los experimentos de enseñanza crea la posibilidad de pensar la cultura del aula de matemáticas como espacio autónomo, con capacidad de desarrollo y transformación.

3. REVISIÓN Y AMPLIACIÓN DEL CASO DE KHADIJA

En la investigación en educación y en la de GIPEAM, es habitual presentar hechos empíricos que se agrupan y estudian a la luz de teorías, para llegar a comprender aspectos de un fenómeno. La lectura de estos hechos los convierte en datos que sostienen explicaciones acordes con el alcance de las teorías utilizadas. En 2002, el caso de Khadija se construyó para explicar y relacionar dos fenómenos: el de interrupciones en la participación matemática en clase y el de diferencias en la interpretación de normas sociomatemáticas. Con énfasis en la respuesta psicológica de Khadija y en su "dificultad" por mantener la participación, se explicó que la interrupción era una reacción de la alumna ante la percepción de interpretaciones distintas para una misma norma. En 2018 seguimos viendo que aquellos datos informan del efecto en la participación de la diversidad de interpretaciones para normas específicas. No obstante, habiendo ampliado la lectura teórica con marcos discursivos y sociológicos, y siendo cautas en la atribución de dificultades individuales, vemos razones para revisar el caso. Éste no es ajeno al juego dialéctico entre modos de hablar y de escribir matemáticas esperados en clase de matemáticas y lo que acaba ocurriendo en la práctica. Precisamente en el seno de este juego se generan oportunidades de discutir normas de la cultura del aula, que son oportunidades de aprendizaje de modos de hablar y de hacer matemáticas en la escuela.

Para una lectura renovada del caso de Khadija, retomamos hechos de clase sobre los cuales se construyó el caso y cuyas transcripciones se publicaron en 2002. El

cambio en la participación de Khadija se observó en una sesión, durante la búsqueda de cantidades de ingredientes para cocinar un pastel. Hay más datos de la sesión que no se llegaron a discutir, tales como los correspondientes a episodios donde se asemeja corrección matemática con corrección en la lengua de instrucción. Solo mencionamos brevemente un momento en el cual la alumna utiliza el término en catalán "polsim" (pellizco) como unidad de medida en "Uns cinc polsims de sal" ["Unos cinco pellizcos de sal"], a lo que el profesor responde: "Es diu un polsim, ni dos, ni tres" ["Se dice un pellizco, ni dos, ni tres"]. Si bien el profesor alude al carácter no contable del término, el episodio en su totalidad se centra en "cómo se habla", por delante de "cómo se determina la medida y por qué". Con este apunte queremos poner de relieve que, junto a la terna dada por las lenguas del alumno, del profesor y de las matemáticas, en los datos de 2002 también se observa Q1 par dado por las lenguas de la instrucción y del alumno.

Por otra parte, nos referimos a datos orales que han pasado por dos modificaciones importantes al ser traducidos del catalán y luego transcritos. Hoy día, con la posibilidad de depositar ficheros de audio y video en repositorios abiertos y de anexas archivos digitales a las publicaciones, esta opción de presentación de datos nos crea un dilema que deberemos afrontar y resolver. No entramos a examinar la conversión de discurso hablado en discurso escrito, pero sí queremos señalar la diferencia que esto supone con respecto a estudios que analizan datos de foros virtuales y chats que no requieren transcripción. Tampoco entramos a examinar el hecho de presentar datos en una lengua cuando se ha utilizado de manera flexible más de una en los datos originales. Modificar el carácter multilingüe de los datos nos parece cada vez más problemático, por el mensaje tácito que se envía sobre la irrelevancia del sistema lingüístico en el desarrollo de la actividad matemática. Aun así, en los trabajos de GIPEAM donde no estudiamos el impacto de la alternancia de lenguas en el discurso matemático, por cuestiones de espacio hemos optado por mostrar solo fragmentos en la lengua original a pesar de la pérdida que esto significa en términos de comprensión de la realización de la actividad. Dicho esto, reproducimos la versión en castellano del enunciado en catalán (Planas, 2002, p. 13):

Queremos cocinar un pastel de manzanas. La receta muestra los ingredientes para 3 personas, pero tenemos 10 invitados. ¿Qué cantidad de cada ingrediente necesitamos comprar? A continuación, escribe los ingredientes para 10 personas.

Ingredients para 3

1 manzana grande
 2 huevos
 75 gramos de azúcar
 25 gramos de mantequilla
 100 gramos de harina
 1/2 limón
 1 pellizco de sal

Ingredients para 10

Durante la elaboración del caso en su versión de 2002, se buscaron momentos previos a la interrupción en la participación de Khadija que permitieran observar normas sociomatemáticas interpretadas en la resolución de la tarea. Se documentaron interpretaciones distintas de normas acerca del papel de la experiencia de vida en la resolución, y del uso de estrategias de redondeo de números decimales al número natural más cercano. Reproducimos un episodio de discusión en pequeño grupo (Planas, 2002, pp. 16-17), acompañado del texto original en catalán:

Khadija: Yo esto de que el pastel lo hagas como a ti te da la gana no lo veo muy claro... isí cambias tanto lo que te da al hacer las operaciones, el pastel al final no se va a parecer en nada! [Jo això de què el pastís el facis com a tu et dóna la gana no ho veig molt dar... si canvies tant el que et dóna quan fas les operacions, el pastís al final no s'assemblarà en res!]

Anna: ¡A ver! ¿Aquí, esto es un pastel de verdad o no? Porque en mi casa un pastel es para 10 0 para 100 según como corto los trozos.. [A veure! Aquí això és un pastís de veritat o no? Perquè a casa meva un pastís és per 10 o per 100 segons como tallo els trossos..]

Mourad: ¿Tienes una manera mejor de hacerlo? [Tens una manera millor de fer-ho?]

Khadija: ¡En tu casa sois muy raros! Yo dejaría lo que da en las operaciones y luego el profe si quiere ya lo redondea. [A casa teva sou molt raros! Jo deixaria el que dóna a les operacions i després si el profe vol ja ho arrodoneix.]

Mourad: ¡Pero el profe te va a preguntar que lo redondees tú porque los decimales no te los va a dejar meter! ¿y qué le vas a decir, que lo haga él? ¡Muy lista! ¡Tú por la vida andas muy mal! [Però el profe et preguntarà que ho arrodoneixis tu perquè els decimals no te'ls deixarà posar! I què li diràs, que ho faci ell? Molt llesta! Tu per la vida vas molt malament!]

Khadija: ¡A ti te parece mal todo lo que digo! ¿Tú dejarías las operaciones o no? [A tu t'assembla malament tot el que dic! Tu deixaries les operacions o no?]

Anna: A mí no me líes! [A mi no em liïs!]

Khadija propone realizar cálculos para obtener soluciones numéricas, mientras que Anna y Mourad recurren a la experiencia de vida en la resolución de la tarea y dan autenticidad a la historia contada en el enunciado. Mourad dice lo siguiente (Planas, 2002, p. 17):

Bueno, primero hay que saber si lo que hay que redondear está bien puesto o no... esto de la sal yo no creo que esté bien... en los pasteles no se pone sal [...] Para que esté bien, bien, yo creo que la sal la tendríamos que sacar... y hay que poner más manzanas porque si no cómo te vas a enterar que el pastel es de manzanas... ¡podría ser de limón o de harina de sal! [nuestra traducción]

Cuesta suponer que un profesor de matemáticas modificaría el enunciado de una tarea dada por él para que la historia que se cuenta por escrito ganara en autenticidad.

Se podría llegar a imaginar un profesor de matemáticas que habla sobre el enunciado de una tarea para finalmente "dejarlo tal como está". De hecho, Mourad usa expresiones tales como: qué les vas a decir, que lo haga él?", sugiriendo que el enunciado no es discutible y que al profesor le interesa la solución numérica. Otra opción contrastaría con la utilización de historias relatadas en la matemática escolar como pretexto para descubrir estructuras matemáticas y practicar la decodificación de palabras en símbolos, operaciones u otros procedimientos al estilo de la regla de tres mencionada por Khadija (Planas, 2002, p. 15): "El pellizco este de sal no me convence... y eso no lo he visto en ningún sitio, si haces la regla de tres con todos, pues con este no sé por qué lo haces diferente". [nuestra traducción]

En 2002, se dio visibilidad a la interrupción y se primó su significado en términos de obstáculos al aprendizaje matemático de Khadija, generados a raíz de la diversidad de interpretaciones de normas sociomatemáticas. De acuerdo con lo que sabemos ahora, vemos un juego dialéctico entre lo que se observa en clase y la precisión lingüística y numérica con la que supuestamente hablaría y escribiría un profesor de matemáticas. Las excepciones forman parte de este juego que legitima una cierta flexibilidad de la norma fundamental y habilita los hechos de clase como fuente de la práctica. Aunque se trate de acabar hablando y escribiendo las matemáticas como lo haría un profesor de matemáticas, en la práctica el proceso de distanciamiento de la lengua en uso del alumno no es continuo ni lineal y puede haber interpretaciones "anómalas" de normas que se alejen de lo que haría un profesor de matemáticas. Parte del juego y de su comprensión incluye incumplimientos ocasionales de modos establecidos de hablar y de hacer matemáticas.

En la sesión de clase de 2002, la aproximación a la lengua de las matemáticas del profesor se retoma en la fase final de la puesta en común y en la escritura de la resolución -contextos de interacción ambos con una función evaluadora reforzada. Vemos al menos dos razones para que esto suceda: la negociación en el seno del grupo de alumnos y la influencia de la norma fundamental. Tal vez la cuestión más interesante no sea el desenlace en forma de interrupción, sino la oportunidad que se ofrece de hablar y escribir matemáticas como lo haría un profesor que tiene en cuenta la lengua de las matemáticas del alumno. A modo de conato de experimento de enseñanza, el profesor introduce esta oportunidad en una conversación donde Khadija parece asumir la representación de lo que haría un profesor de matemáticas (Planas, 2002, p. 17):

Khadija: Hay que resolver el problema como está escrito! ¡Que tu madre lo haga sin sal no tiene nada que ver con esto! [S'ha de resoldre el problema com està escrit! Que la teva mare ho faci sense sal no tens res a veure amb això!]

Profesor: Pero si el enunciado está mal, habrá que arreglarlo... [Però si renunciat està malament s'haurà d'arreglar...]

Khadija: ¿Y cómo se sabe si está mal? Si está escrito es que está bien. [I com se sap si està malament? Si està escrit és que està bé]

Profesor: Vamos a ver, ¿cuál es el enunciado que más os convencería? Mourad, ¿tú qué dices? [Anem a veure, quin és renunciat que més us convenceria? Mourad, tu què hi dius?]

En general, las normas y su producción son transparentes en los procesos de enseñanza y aprendizaje; con esto queremos decir que vemos los efectos de las normas sin verlas a ellas, y que su producción ocurre sin hacerse notar. Al igual que "yo creo que" es transparente en "yo creo que tu sal la tendríamos que sacar", pero lingüísticamente se añade para expresar énfasis, "matemáticamente" también opera de manera transparente en "hemos conseguido resolverlo matemáticamente". Sin embargo, y aunque los modos adecuados de hablar y de hacer matemáticas se acostumbra a suponer sin discusión explícita, en el episodio con Khadija y el profesor se observa que la excepcionalidad de interpretaciones "anómalas" revierte la situación de transparencia. Khadija hace notar la norma y acude a ella para disponer de un criterio de distinción de lo adecuado. Aun cuando es el propio profesor quien problematiza lo normativo y propone "otro" modo de hacer matemáticas, prevalece la representación del profesor de matemáticas que lleva al aula enunciados estáticos bien escritos ("Hay que resolver el problema como está escrito", "Si está escrito es que está bien"). El rechazo de Khadija a alterar el enunciado de la tarea posiblemente tiene que ver con su experiencia prolongada en una cultura escolar donde las normas son transparentes, no se cuestionan, no se trabajan mas sí se evalúan. Esta experiencia es evidencia de lo contrario en Mourad y Anna, pero también en el profesor. La experiencia no es la evidencia definitiva ni el origen de la explicación de respuestas distintas, sino un aspecto más en la configuración del discurso de cada alumno.

Por otra parte, una intervención del profesor en una sesión de clase es algo puntual en el contexto de modos largamente naturalizados de hablar y de hacer matemáticas. De una intervención no se puede inferir que el profesor haya iniciado la introducción interesada y deliberada de nuevas rutinas en su enseñanza. No obstante, su cuestionamiento es relevante porque ofrece la oportunidad de ver y discutir "otros" modos de hablar y de hacer matemáticas y, con ello, la oportunidad de comprender el aula como cultura "en construcción", donde las interpretaciones de las normas deben trabajarse porque no hablan ni se explican por sí solas. Mourad, Anna, Khadija y el profesor crean conjuntamente la oportunidad de debatir por qué debería aceptarse una resolución de la tarea matemática que desoiga la experiencia de vida. El caso de Khadija es, en definitiva, un caso de las oportunidades de aprendizaje generadas al hacerse visibles normas sociomatemáticas e interpretaciones de la matemática escolar, que son a su vez oportunidades de romper los silencios impuestos acerca de la diversidad de modos de hablar y de hacer matemáticas.

4. ¿OPORTUNIDADES? ¿QUÉ OPORTUNIDADES, CÓMO Y POR QUÉ?

Los estudios sobre la detección de dificultades, errores y obstáculos en el aprendizaje matemático de los alumnos continúan ocupando gran parte de la actividad investigadora, influyendo en la elección de temas a investigar. Sin embargo, el área experimenta un creciente compromiso con la comprensión de aciertos, retos y oportunidades. La tradición de experimentos de enseñanza bajo las teorías sociales avala que es posible modificar la cultura del aula de matemáticas y desarmar la paradoja de la irrelevancia de los modos de hablar y de hacer del alumno en la enseñanza y en el aprendizaje de las matemáticas. La constitución histórica de la norma fundamental implica que "lo posible" es limitado debido a las inercias creadas en torno a la matemática escolar y a las ideologías de déficit asociadas al alumno, cuya lengua en uso se ve incompleta y situada en el punto de partida de un recorrido que acaba en otra lengua distinta. No obstante, en su materialidad la matemática escolar se construye en la actividad cotidiana del aula. La posibilidad de generar culturas del aula de matemáticas que den valor pedagógico y didáctico a las lenguas y culturas del alumno existe y, con ello, la posibilidad de producir oportunidades de aprender interpretaciones más significativas y menos ritualizadas de normas sociomatemáticas. Esto requiere aceptar que hay rutinas y obligaciones que, a pesar de "haber sido así desde siempre", pueden estar cumpliendo "desde siempre" cometidos políticos ajenos a la facilitación del aprendizaje matemático de todos los alumnos.

En el enunciado que da título al capítulo, "Construcción de normas generadoras de oportunidades para el aprendizaje matemático", por oportunidades entendemos situaciones de clase donde el contraste entre interpretaciones de normas es aprovechado como hilo conductor en la discusión de modos de hablar y de hacer matemáticas. Esto es, situaciones donde, de no haber sido por lo oportuno de un contraste de significados, no se hubiera hecho notar la norma, y una única interpretación se seguiría tratando de manera tácita como natural y necesaria. Esta acepción de lo oportuno abarca la cuestión de transformar en sociales prácticas que flexibilicen la apropiación de la matemática escolar (Hunter et al, 2018), además de superar la percepción de obstáculos y oportunidades como extremos que se oponen y discurren en paralelo. Esta es una oposición políticamente construida que, a grandes rasgos, asume que cuanto mayor es la adecuación a las matemáticas que hablaría y haría un profesor de matemáticas, mayor es la cantidad de oportunidades de aprendizaje y menor la de obstáculos. A lo largo del capítulo y con apoyo en el caso de Khadija, hemos problematizado esta oposición y la hemos sustituido por una relación dialéctica, de tensión y diálogo entre obstáculos y oportunidades.

Advertimos la relación entre obstáculos y oportunidades en la base de los experimentos de enseñanza donde se diseñan y llevan a cabo situaciones que hacen aflorar interpretaciones diversas de normas sociomatemáticas. Si bien los datos del caso de Khadija no forman parte de un experimento de enseñanza, disponemos de resultados de múltiples experimentos en otras aulas de matemáticas de Barcelona (p. ej., Planas y Civil, 2009), donde los profesores participaban en un grupo de desarrollo profesional sobre el uso de las lenguas y las culturas de los alumnos en clase de matemáticas. En esas aulas se consiguieron cambios con repercusión en la intensidad y la amplitud de la participación matemática, a la par que se vislumbraron cambios

en la percepción que los profesores tenían de los modos de hablar y de hacer matemáticas de algunos alumnos. A lo largo de las sesiones de desarrollo profesional, el discurso inicialmente marginal sobre oportunidades fue ganando presencia, en detrimento del discurso sobre dificultades, errores y obstáculos. Costó, sin embargo, iniciar la transformación del relato sobre lo que algunos alumnos no parecen lograr. Este es un relato que, en general, cuesta replicar porque está en el trasfondo de los supuestos de linealidad que reducen el aprendizaje a una cuestión de capacidades individuales y de distanciamiento de modos de hablar y de hacer.

La norma fundamental actúa de manera negativa, materializando los obstáculos en situaciones de interacción donde no se hablan o escriben unas determinadas matemáticas. Esta norma también actúa de manera positiva, pero materializando solo las oportunidades que se encuentran en los Usos habituales de la matemática escolar. No hay una norma superior que valide los otros usos, una norma que simplemente diga que el alumno debe hablar y escribir las matemáticas como lo haría un profesor de matemáticas que converse con él. Esto plantea un panorama complicado para el reconocimiento del potencial y de la capacidad del alumno y de los grupos que más se alejan de los modos escolares.

En la reflexión sobre el profesor que se necesita para liderar experimentos de enseñanza (Essien, Chitera y Planas, 2016; Cobb y Hodge, 2010; Gresalfi y Cobb, 2011; Planas y Civil, 2009), son reveladoras las discusiones sobre la creación de entornos de desarrollo profesional que proporcionen ejemplos de comunicación y negociación de interpretaciones de la norma en la práctica. Para el diseño de experimentos de enseñanza que den valor a la cultura del alumno, Essien et al. (2016) toman inspiración en prácticas de comunicación y negociación en aulas multilingües y en su impacto en la modificación de aspectos de la cultura del aula. Aquí la diversidad de interpretaciones es más visible, en particular más "normal" y comprensible para los participantes.

La investigación en educación matemática en aulas multilingües tiene, a nuestro entender, el germen de varias respuestas, dado que ha logrado revertir parte de lo que se considera "normal". En el aula multilingüe, cualquier interacción se presta a la alternancia de lenguas, al no haber un único código o sistema lingüístico; por ello, muchos experimentos de enseñanza (véase Barwell et al, 2016) se han centrado en crear una cultura de hacer preguntas sobre lo que se pide. La norma sociomatemática que regula las preguntas del alumno se amplía para que el profesor acepte preguntas sobre la propia interpretación, gestión y orientación de la tarea matemática, sin que esto conlleve valoraciones negativas ("el alumno que -otra vez- no sabe lo que se pide"). En los experimentos donde se logra modificar el papel y la amplitud de las preguntas del alumno, la participación matemática se intensifica. Otros resultados de esta investigación proveen ejemplos del camino que falta por recorrer. Se observa la invisibilidad de significados matemáticos que permanecen latentes en clase y que, sin embargo, se manifiestan a iniciativa del alumno en entrevistas donde prevalece la alternancia relajada de códigos y sistemas lingüísticos. Esto se ha relacionado con el alcance en la actividad de clase del orden social vigente fuera del aula, donde la norma monolingüe (Planas, 2018) lleva años construyéndose como social e imprescindible para la comunicación.

A pesar de los resultados prometedores mencionados y de la presencia residual de aulas monolingües en el mundo, la comunidad de investigación en educación matemática sigue siendo reticente los experimentos de enseñanza en el aula multilingüe como una versión adelantada del trilingüismo -lenguas del alumno, del profesor y de las matemáticas- que se debe manejar de manera flexible en cualquier aula de matemáticas (Chronaki y Planas, 2018). Parte de la comunidad mantiene la representación monolingüe del aula -con la lengua de las matemáticas del profesor en proceso de ser enseñada y aprendida por el alumno-, por lo que apenas entrevé el sentido general de los estudios en aulas de matemáticas multilingües. No obstante, atisbamos un inicio de apertura que, cuando se consolide, será punto de inflexión en la investigación socialmente comprometida con datos de clases de matemáticas que reconozcan el conjunto de lenguas que intervienen en la producción de la lengua de la matemática escolar.

AGRADECIMIENTOS

Institució Catalana de Recerca i Estudis Avançats (ICREA) y SGR-2017-101, AGAUR Catalunya; Proyecto EDIJ2015-65378-P, MINECO/FEDER

REFERENCIAS

- Barwell, R., Clarkson, P., Halai, A., Kazima, M., Moschkovich, I., Planas, N., Setati-Phakeng, M., Valero, P., Villavicencio, M. (Eds.). (2016). *Mathematics education and language diversity. The 21st ICMI Study*. New York, USA: Springer.
- Bauersfeld, H. (1988). Interaction, construction, and knowledge: Alternative perspectives for mathematics education. En D. A. Grouws y T. J. Cooney (Eds.), *Perspectives on research on effective mathematics teaching* (Vol. 1, pp. 27-46). Reston, USA: NCTM.
- Boukafri, K., Civil, M. y Planas, N. (2018). A teachers use of revoicing in mathematical discussions. En J. N. Moschkovich, D. Wagner, A. Bose, J. Rodrigues Mendes y M. Schütte (Eds.), *Language and communication in mathematics education* (pp. 157-169). Cham, Switzerland: Springer.
- Bowers, I., Cobb, P. y McClain, K. (1999) The evolution of mathematical practices: A case study. *Cognition and Instruction*, 17(1), 25-66.
- Brown, T. (2010). Truth and the renewal of knowledge: The case of mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 75(3), 329-343.
- Chronaki, A y Planas, N. (2018). Language diversity in mathematics education research: A move from language as representation to politics of representation. *ZDM*, 50(6). <https://doi.org/10.1007/s11858-018-0942-4>
- Cobb, P. y Hodge, L L (2010). Culture, identity, and equity in the mathematics classroom. En E. Yackel, A. Sfard, P. Cobb y K. Gravemeijer (Eds.), *A journey in mathematics education research. Insights from the work of Paul Cobb* (pp. 179-195). New York, USA: Springer.
- Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R. y Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher*, 32(1), 9-13.

- Cobb, P., Zhao, Q. y Dean, C. (2009). Conducting design experiments to support teachers learning: A reflection from the field. *The Journal of the Learning Sciences*, 18(2), 165-199.
- Essien, A, Chitera, N. y Planas, N. (2016). Language diversity in mathematics teacher education: Challenges across three countries. En R. Barwell, P. Clarkson, A. Halai, M. Kazima, J. Moschkovich, N. Planas, M. Setati-Phakeng, P. Valero & M. Villavicencio (Eds.), *Mathematics education and language diversity. The 21st ICMI Study* (pp. 103119). New York, USA: Springer.
- Godino, J. D. y Llinares, S (2000). El interaccionismo simbólico en educación matemática. *Educación Matemática*, 12(1), 70-92.
- Gorgorió, N. y Planas, N. (2005). Reconstructing norms. En H. L Chick y J. L Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 65-72). Melbourne, Australia: PME.
- Gresalfi, M. S. y Cobb, P. (2011). Negotiating identities for mathematics teaching in the context of professional development *Journal for Research in Mathematics Education*, 42(3), 270-304.
- Herbel-Eisenmann, B. (2003). Examining "norms" in mathematics education literature: Refining the lens. NUM 2003 Annual Meeting and Exposition. Simposio Ilevado a cabo en San Antonio, Texas, USA
- Hunter, R, Civil, M., Herbel-Eisenmann, Planas, N. y Wagner, D. (Eds). (2018). *Mathematical discourse that breaks barriers and creates space for marginalized learners*. Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.
- Morgan, C. (2000). Better assessment in mathematics education? A social perspective. En J. Boaler (Ed.), *Multiple perspectives on mathematics teaching and learning* (pp. 225-242). Westport USA: Ablex Publishing.
- Pimm, D. (1987). *Speaking mathematically: Communication in mathematics classrooms*. London, United Kingdom: Routledge & Kegan Paul.
- Planas, N. (2001). *Obstacles en l'aprenentatge matemàtic: La diversitat d'interpretacions de la norma* (tesis doctoral). Universitat Autònoma de Barcelona, España.
- Planas, N. (2002). Obstáculos en el aprendizaje generadores de interrupciones en la participación. *Educación Matemática*, 14(1), 5-25.
- Planas, N. (2018). Language as resource: A key notion for the understanding of the complexity of mathematics learning. *Educational Studies in Mathematics*, 98(3), 215-229.
- Planas, N. y Civil, M. (2009). Working with mathematics teachers and immigrant students: An empowerment perspective. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 12(6) 391-409.
- Planas, N. y Gorgorió, N. (2004). Are different students expected to learn norms differently in the mathematics classroom? *Mathematics Education Research Journal*, 16(1), 19-40.
- Planas, N. y Valero, P. (2016). Tracing the socio-cultural-political axis in understanding mathematics education. En A. Gutiérrez, G. H. Leder y P. Boero (Eds.), *The second handbook of the psychology of mathematics education. The journey continues* (pp. 447-479). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.
- Planas, N., Arnal, A. y García-Honrado, I. (2018). El discurso matemático del profesor: ¿Cómo se produce en clase y cómo se puede investigar? *Enseñanza de las Ciencias*, 36(1), 45-60.
- Planas, N., Morgan, C y Schütte, M. (2018). Mathematics education and language. Lessons from two decades of research. En T. Dreyfus, M. Artigue, D. Potari, S. Prediger y K. Ruthven (Eds.), *Developing research in mathematics education. Twenty years of communication, cooperation and collaboration in Europe* (pp. 196-210). London, United Kingdom: Routledge.

Núria Planas y Kaouthar Boukafri

- Roth, W. M. (2018). Elaborating the later Vygotsky's radical initiative on the nature and function of language: Implication for mathematics education. *ZDM*, 50(6). <https://doi.org/10.1007/s11858-018-0914>
- Roth, W. M. y Radford, L (2011). *A cultural-historical perspective on mathematics teaching and learning*. New York, USA: Springer.
- Voigt J. (1985). Patterns and routines in classroom interaction. *Recherches en Didactique de Mathématiques*, 6(1), 69-118.
- Yackel, E. y Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(4), 458-477.