



**HAL**  
open science

## Comparaisons et inégalités améliorées pour des équations elliptiques semi-linéaires

Francois Hamel, Emmanuel Russ

► **To cite this version:**

Francois Hamel, Emmanuel Russ. Comparaisons et inégalités améliorées pour des équations elliptiques semi-linéaires. Colloque EDP Normandie, 2015, Le Havre, France. hal-02023080

**HAL Id: hal-02023080**

**<https://hal.science/hal-02023080>**

Submitted on 18 Feb 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Comparaisons et inégalités améliorées pour des équations elliptiques semi-linéaires

François HAMEL

Aix Marseille Université, CNRS, Centrale Marseille, Institut de Mathématiques de Marseille, UMR 7373, 13453 Marseille, France  
francois.hamel@univ-amu.fr

Emmanuel RUSS

Université Joseph Fourier, Institut Fourier, 100 rue des maths, BP 74, 38402 Saint-Martin d'Hères Cedex, France  
Emmanuel.Russ@ujf-grenoble.fr

## Résumé

Nous présentons des résultats de comparaison ponctuelle entre des solutions de certaines équations elliptiques du second ordre dans un domaine  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$  et des solutions d'équations à symétrie radiale dans une boule  $\Omega^*$  de même mesure. Les coefficients des équations symétrisées dans  $\Omega^*$  satisfont des contraintes similaires à celles des équations d'origine dans  $\Omega$ . Les premiers résultats sur ces questions remontent à Talenti, pour des équations du type  $-\operatorname{div}(A(x)\nabla u) = f(x)$  dans  $\Omega$ , dont les solutions  $u \in H_0^1(\Omega)$  sont comparées aux solutions  $v \in H_0^1(\Omega^*)$  d'équations du type  $-\Delta v = f^*(x)$  dans  $\Omega^*$ . Nous considérons les cas d'équations  $-\operatorname{div}(A(x)\nabla u) = H(x, u, \nabla u)$  lorsque le terme non linéaire  $H$  a une croissance au plus linéaire dans le gradient et une croissance au plus quadratique par rapport au gradient. De plus, nous présentons certaines inégalités quantitativement améliorées lorsque le domaine  $\Omega$  n'est pas une boule. La méthode repose sur une symétrisation des termes du second ordre.

**Mots-clés.** Équations elliptiques semi-linéaires, inégalités ponctuelles, symétrisation

## 1. INTRODUCTION

Dans tout ce qui suit,  $\Omega$  est un domaine borné de classe  $C^2$  de  $\mathbb{R}^n$  (avec  $n \geq 1$  quelconque) et  $\Omega^*$  dénote la boule euclidienne de même mesure  $|\Omega^*| = |\Omega|$  que  $\Omega$  et centrée à l'origine. Étant donnée une solution positive  $u$  d'une équation semilinéaire du type

$$(1) \quad \begin{cases} -\operatorname{div}(A(x)\nabla u) + H(x, u, \nabla u) & = 0 \text{ dans } \Omega, \\ u & = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

en un sens à préciser, la question générale traitée ici est de comparer  $u$  avec une solution  $v$  d'un problème similaire

$$(2) \quad \begin{cases} -\operatorname{div}(\widehat{A}(x)\nabla v) + \widehat{H}(x, v, \nabla v) & = 0 \text{ dans } \Omega^*, \\ v & = 0 \text{ sur } \partial\Omega^*, \end{cases}$$

posé cette fois dans la boule  $\Omega^*$ . Le but est de montrer que, sous certaines hypothèses naturelles sur  $A$  et  $H$ , n'importe quelle solution positive  $u$  de (1) peut être contrôlée en un certain sens par au-dessus par une solution  $v$  de (2). De plus, les coefficients de (2) seront radiaux et  $v$  sera alors elle-même radiale.

Les hypothèses précises sont les suivantes. Nous notons  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices réelles symétriques de taille  $n \times n$ . Nous supposons toujours que  $A = (A_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} : \Omega \rightarrow \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  est de classe  $W^{1, \infty}(\Omega)$  (les coefficients  $A_{ij}$  peuvent donc

être considérés continus sur  $\bar{\Omega}$ . De plus, le champ  $A$  est supposé uniformément elliptique dans  $\bar{\Omega}$  : il existe  $\lambda > 0$  tel que  $A(x) \geq \lambda \text{Id}$  pour tout  $x \in \bar{\Omega}$  au sens des matrices symétriques, où  $\text{Id} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  est la matrice identité. Dans certains énoncés, nous comparerons  $A$  à un champ de matrices du type  $x \mapsto \Lambda(x)\text{Id}$ , au sens suivant :

$$(3) \quad A(x) \geq \Lambda(x)\text{Id} \text{ p.p. dans } \Omega,$$

où  $\Lambda \in L^{\infty}_+(\Omega)$  et

$$L^{\infty}_+(\Omega) = \{ \Lambda \in L^{\infty}(\Omega); \text{ess inf}_{\Omega} \Lambda > 0 \}.$$

Par exemple, une fonction  $\Lambda$  vérifiant (3) est la plus petite valeur propre de  $A$ . Bien entendu,  $\Lambda$  peut être choisie constante, mais nous pourrons dans la suite utiliser des fonctions  $\Lambda$  non constantes et comparer ensuite (1) avec des équations (2) dont les matrices  $\hat{A}$  seront de la forme  $\hat{A}(x) = \hat{\Lambda}(x)$  avec une fonction  $\hat{\Lambda}$  non constante sur  $\Omega^*$  et partageant certaines propriétés avec  $\Lambda$ . La fonction donnée  $H : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est supposée continue avec l'existence d'un nombre réel  $1 \leq q \leq 2$  et de trois fonctions bornées et continues  $a, b$  et  $f : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  telles que

$$(4) \quad \begin{cases} H(x, s, p) \geq -a(x, s, p)|p|^q + b(x, s, p)s - f(x, s, p), \\ b(x, s, p) \geq 0 \end{cases}$$

pour tout  $(x, s, p) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ . En particulier,  $H$  est bornée inférieurement par une fonction au plus quadratique en sa dernière variable  $p$ . Par contre, aucune borne supérieure n'est supposée a priori. Les cas  $q = 1$  et  $1 < q \leq 2$  seront en fait traités séparément, car les résultats d'existence et d'unicité des problèmes (1) et (2) diffèrent selon que  $q$  est égal à 1 ou strictement plus grand que 1. De plus, une condition supplémentaire sur  $H$  sera d'ailleurs imposée lorsque  $q > 1$ .

Les solutions  $u$  de (1) sont entendues au sens faible, c'est-à-dire que  $u \in H_0^1(\Omega)$ ,  $H(\cdot, u(\cdot), \nabla u(\cdot)) \in L^1(\Omega)$  et

$$\int_{\Omega} A(x)\nabla u \cdot \nabla \varphi + \int_{\Omega} H(x, u, \nabla u)\varphi = 0 \text{ pour toute fonction } \varphi \in H_0^1(\Omega) \cap L^{\infty}(\Omega).$$

Lorsque  $H(\cdot, u(\cdot), \nabla u(\cdot))$  est dans  $L^2(\Omega)$ , alors l'identité précédente est valable pour toute fonction  $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ . On peut définir de même la notion de solution faible  $v$  de (2). De plus, nous notons  $W(\Omega)$  l'espace  $W(\Omega) = \bigcap_{1 \leq p < +\infty} W^{2,p}(\Omega)$ , avec  $W(\Omega) \subset C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$  pour tout  $\alpha \in [0, 1[$ . Si  $u \in W(\Omega)$  est une solution faible de (1), alors c'est une solution forte, l'équation (1) étant alors satisfaite presque partout dans  $\Omega$  et la condition au bord sur  $\partial\Omega$  est vérifiée au sens classique.

Nous ne pouvons pas comparer directement des solutions  $u$  et  $v$  de (1) et (2) car elles sont définies sur des domaines  $\Omega$  et  $\Omega^*$  différents. Pour pouvoir comparer en un certain sens  $u$  et  $v$ , nous utiliserons leur fonction de répartition. Nous rappelons que, pour toute fonction  $u \in L^1(\Omega)$ , la fonction de répartition  $\mu_u$  de  $u$  est définie par  $\mu_u(t) = |\{x \in \Omega; u(x) > t\}|$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . Cette fonction  $\mu_u$  est continue à droite, décroissante et vérifie  $\mu_u(t) \rightarrow |\Omega|$  quand  $t \rightarrow -\infty$  et  $\mu_u(t) \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow +\infty$ . Pour tout  $x \in \Omega^* \setminus \{0\}$ , on définit alors

$$u^*(x) = \min \{ t \in \mathbb{R}; \mu_u(t) \leq \alpha_n |x|^n \},$$

où  $\alpha_n = \pi^{n/2}/\Gamma(n/2 + 1)$  est la mesure de Lebesgue de la boule euclidienne unité de  $\mathbb{R}^n$ . La fonction  $u^*$ , appelée réarrangement décroissant de Schwarz de  $u$ , est clairement radiale, décroissante par rapport à  $|x|$  dans  $\Omega^*$  et elle a même fonction de répartition que  $u$ . De plus, il est bien connu que si  $u \in H_0^1(\Omega)$ , alors  $|u|^* \in H_0^1(\Omega^*)$ , avec  $\| |u|^* \|_{L^2(\Omega^*)} = \|u\|_{L^2(\Omega)}$  et  $\|\nabla |u|^*\|_{L^2(\Omega^*)} \leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$  (cf. [17, 18, 36, 42]).

Dans les deux sections suivantes, motivés par des résultats de comparaison de valeurs propres principales d'opérateurs elliptiques du second ordre et non auto-adjoints (cf. [30]), nous présenterons des résultats de comparaison d'une solution

quelconque  $u \in W(\Omega)$  de (1) telle que  $u > 0$  dans  $\Omega$  avec une solution faible  $v$  d'un problème du type (2), au sens que  $u^* \leq v$  dans  $\Omega^*$ , où les nouveaux coefficients  $\widehat{A}$  et  $\widehat{H}$  de (2) seront radiaux et satisferont des contraintes ou des bornes similaires à celles des coefficients donnés  $A$  et  $H$ . Dans la section 2, nous traiterons le cas  $q = 1$  dans (4). Le cas  $1 < q \leq 2$  sera étudié dans la section 3, avec une hypothèse supplémentaire sur la fonction  $b$  donnée dans (4).

## 2. CROISSANCE AU PLUS LINÉAIRE PAR RAPPORT AU GRADIENT

Le premier résultat porte sur le cas où  $H$  est minoré par une fonction linéaire en  $|\nabla u|$ , i.e.  $q = 1$  dans (4). Par ailleurs, nous notons  $g^+ = \max(g, 0)$  pour tout  $g$  réel ou fonction à valeurs réelles.

**Théorème 2.1.** [31] *Supposons (3) et (4) avec  $\Lambda \in L_+^\infty(\Omega)$  et  $q = 1$ . Soit  $u \in W(\Omega)$  une solution de (1) telle que  $u > 0$  dans  $\Omega$  et  $|\nabla u| \neq 0$  sur  $\partial\Omega$ . Alors il existe dans fonctions radiales  $\widehat{\Lambda} \in L_+^\infty(\Omega^*)$  et  $\widehat{a} \in L^\infty(\Omega^*)$  telles que*

$$(5) \quad \begin{cases} 0 < \operatorname{ess\,inf}_\Omega \Lambda \leq \operatorname{ess\,inf}_{\Omega^*} \widehat{\Lambda} \leq \operatorname{ess\,sup}_{\Omega^*} \widehat{\Lambda} \leq \operatorname{ess\,sup}_\Omega \Lambda, & \|\widehat{\Lambda}^{-1}\|_{L^1(\Omega^*)} = \|\Lambda^{-1}\|_{L^1(\Omega)}, \\ 0 \leq \inf_{\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n} a^+ \leq \operatorname{ess\,inf}_{\Omega^*} \widehat{a} \leq \operatorname{ess\,sup}_{\Omega^*} \widehat{a} \leq \sup_{\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n} a^+, \end{cases}$$

et

$$(6) \quad u^* \leq v \text{ p.p. dans } \Omega^*,$$

où  $v \in H_0^1(\Omega^*) \cap C(\overline{\Omega^*})$  est l'unique solution faible de

$$(7) \quad \begin{cases} -\operatorname{div}(\widehat{\Lambda}(x)\nabla v) + \widehat{H}(x, \nabla v) & = 0 \text{ dans } \Omega^*, \\ v & = 0 \text{ sur } \partial\Omega^* \end{cases}$$

avec

$$\widehat{H}(x, p) = -\widehat{a}(x)|p| - f_u^*(x)$$

et  $f_u^*$  est le réarrangement de Schwarz de la fonction  $f_u$  définie dans  $\Omega$  par

$$(8) \quad f_u(y) = f(y, u(y), \nabla u(y)) \text{ pour tout } y \in \Omega.$$

Nous rappelons que, puisque  $\widehat{H}(\cdot, \nabla v(\cdot)) \in L^2(\Omega^*)$ , le fait que  $v \in H_0^1(\Omega^*)$  soit une solution faible de (7) signifie que

$$\int_{\Omega^*} \widehat{\Lambda}(x)\nabla v \cdot \nabla \varphi - \int_{\Omega^*} \widehat{a}(x)|\nabla v| \varphi - \int_{\Omega^*} f_u^*(x) \varphi = 0 \text{ pour tout } \varphi \in H_0^1(\Omega^*).$$

Le corollaire suivant se déduit du Théorème 2.1 et du principe du maximum.

**Corollaire 2.2.** [31] *Avec les mêmes notations que dans le Théorème 2.1, pour toutes fonctions  $\bar{a}$  et  $\bar{f}$  dans  $L^\infty(\Omega^*)$  telles que  $\widehat{a} \leq \bar{a}$  et  $f_u^* \leq \bar{f}$  p.p. dans  $\Omega^*$ , on a  $u^* \leq \bar{v}$  p.p. dans  $\Omega^*$ , où  $\bar{v} \in H_0^1(\Omega^*) \cap C(\overline{\Omega^*})$  est l'unique solution faible de*

$$(9) \quad \begin{cases} -\operatorname{div}(\widehat{\Lambda}(x)\nabla \bar{v}) + \bar{H}(x, \nabla \bar{v}) & = 0 \text{ dans } \Omega^*, \\ \bar{v} & = 0 \text{ sur } \partial\Omega^* \end{cases}$$

avec  $\bar{H}(x, p) = -\bar{a}(x)|p| - \bar{f}(x)$ . En particulier, on a  $u^* \leq \bar{V}$  p.p. dans  $\Omega^*$ , où  $\bar{V} \in H_0^1(\Omega^*) \cap C(\overline{\Omega^*})$  est l'unique solution faible de (9) avec  $\bar{a} = \sup_{\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n} a^+$  et  $\bar{f} = \sup_{\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n} f$ .

**Démonstration.** Elle est une conséquence immédiate du Théorème 2.1 ci-dessus et du Corollaire 2.1 de Porretta [43]. En effet, en utilisant les notations du Théorème 2.1 et du Corollaire 2.2, on a

$$-\operatorname{div}(\widehat{\Lambda}(x)\nabla v) + \bar{H}(x, \nabla v) = (\widehat{a}(x) - \bar{a}(x))|\nabla v| + f_u^*(x) - \bar{f}(x) \leq 0$$

au sens faible  $H_0^1(\Omega^*)$ , i.e.  $\int_{\Omega^*} \widehat{\Lambda}(x) \nabla v \cdot \nabla \varphi - \int_{\Omega^*} \bar{a}(x) |\nabla v| \varphi - \int_{\Omega^*} \bar{f}(x) \varphi \leq 0$  pour tout  $\varphi \in H_0^1(\Omega^*)$  avec  $\varphi \geq 0$  p.p. dans  $\Omega^*$ . En d'autres termes,  $v \in H_0^1(\Omega^*)$  est une sous-solution faible de (9). Le principe du maximum (Corollaire 2.1 de [43]) implique que  $v \leq \bar{v}$  p.p. dans  $\Omega^*$ , d'où  $u^* \leq \bar{v}$  p.p. dans  $\Omega^*$  d'après (6).  $\square$

Pour les problèmes (7) et (9) dans  $\Omega^*$ , l'existence et l'unicité des solutions  $v$  et  $\bar{v}$  dans  $H_0^1(\Omega^*)$  est une conséquence directe du Théorème 2.1 de Porretta [43]. Pour (7), comme tous les coefficients  $\widehat{\Lambda}$ ,  $\widehat{a}$  et  $f_u^*$  sont radiaux, l'unicité implique que  $v$  est elle-même radiale. De plus,  $v$  est Hölderienne dans  $\overline{\Omega^*}$  à cause de la symétrie radiale et des estimations locales de De Giorgi-Moser-Nash estimates (Théorème 8.29 de [27]). Pour le problème (9), la fonction  $\bar{v}$  est aussi localement Hölderienne dans  $\Omega^*$ , mais elle n'est plus nécessairement radiale puisque les fonctions  $\bar{a}$  et  $\bar{f}$  ne le sont pas forcément. Mais il découle du principe du maximum et du Corollaire 2.2 que  $0 \leq u^* \leq \bar{v} \leq \bar{V}$  dans  $\Omega^*$ , et puisque  $\bar{V}$  est continue dans  $\overline{\Omega^*}$  et s'annule sur  $\partial\Omega^*$ , la fonction  $\bar{v}$  est donc également continue dans  $\overline{\Omega^*}$ .

En ce qui concerne le problème (1) dans  $\Omega$ , on peut donner des conditions garantissant l'existence et l'unicité d'une solution  $u$ . Plus précisément, si l'on suppose que

$$\begin{cases} \exists \omega > 0, \forall (x, s, s', p) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \\ \quad \omega^{-1}(s - s') \leq H(x, s, p) - H(x, s', p) \leq \omega(s - s'), \\ \exists \alpha \in L^r(\Omega), \forall (x, s, p, p') \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \\ \quad |H(x, s, p) - H(x, s, p')| \leq \alpha(x)(1 + |s|^{2/n})|p - p'|, \end{cases}$$

avec  $r = n^2/2$  si  $n \geq 3$ ,  $r \in (2, +\infty)$  si  $n = 2$  et  $r = 2$  si  $n = 1$ , alors il existe au plus une solution de (1) dans  $H_0^1(\Omega)$  (cf. Théorème 5.1 de [31]). Si on suppose en plus que

$$\exists \beta \in L^t(\Omega), \forall (x, s, p) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, |H(x, s, p)| \leq \beta(x)(1 + |s| + |p|),$$

où  $t = n$  si  $n \geq 3$ ,  $t$  est un réel quelconque dans  $(2, +\infty)$  si  $n = 2$  et  $t = 2$  si  $n = 1$ , alors il existe une (unique) solution  $u$  de (1) dans  $H_0^1(\Omega)$ . De plus, si la fonction  $\beta$  ci-dessus est dans  $L^\infty(\Omega)$ , alors l'unique solution  $u$  de (1) est dans l'espace  $W(\Omega)$ . Enfin, sous l'hypothèse supplémentaire d'existence d'un réel  $\varpi \geq 0$  tel que  $H(x, 0, p) \leq \varpi |p|$  pour tout  $(x, p) \in \Omega \times \mathbb{R}^n$  et  $H(\cdot, 0, 0) \not\equiv 0$  dans  $\Omega$ , alors  $u > 0$  dans  $\Omega$  et  $\partial_\nu u := \nu \cdot \nabla u < 0$  sur  $\partial\Omega$ , où  $\nu$  désigne la normale extérieure à  $\partial\Omega$ . Ces résultats d'existence et d'unicité, inspirés de [43], sont rassemblés dans le Théorème 5.1 de [31]. Pour d'autres résultats d'unicité pour des problèmes semi-linéaires du type (1) avec croissanc élinéaire en  $|\nabla u|$ , nous renvoyons à [13, 22].

Comparons maintenant le Théorème 2.1 avec d'autres résultats de la littérature. Le Théorème 2.1 fournit une comparaison entre les fonctions de répartition d'une solution donnée  $u$  de (1) dans  $\Omega$  et d'une solution  $v$  de (7) dans  $\Omega^*$ . Les fonctions  $\widehat{\Lambda}$  et  $\widehat{H}$  apparaissant dans (7) sont des "pseudo-réarrangements" de  $\Lambda$  et  $H$  par rapport à  $u$ . Ces fonctions satisfont des bornes ponctuelles similaires aux coefficients  $A$  et  $H$  dans  $\Omega$  (voir aussi [2, 3, 4, 40, 47] sur ces notions de pseudo-réarrangements utilisées dans différents contextes). De plus, la matrice de diffusion  $\widehat{\Lambda} \text{Id}$  apparaissant dans le terme du second ordre de (7) est proportionnelle à l'identité en chaque point  $x \in \Omega^*$  et le terme non linéaire  $\widehat{H}(x, \nabla v)$  est exactement affine en  $|\nabla v|$ . Les premiers résultats de comparaison de ce genre remontent à Talenti [45]: si  $A \in L^\infty(\Omega, \mathcal{S}_n(\mathbb{R}))$  et

$$A \geq \text{Id p.p. dans } \Omega, \quad \Lambda = 1 \quad \text{et} \quad H(x, s, p) = b(x)s - f(x)$$

avec  $b, f \in L^\infty(\Omega)$  et  $b \geq 0$  p.p. dans  $\Omega$ , alors (1) admet une unique solution  $u \in H_0^1(\Omega)$  et  $|u|^* \leq v$  p.p. dans  $\Omega^*$ , où  $v \in W(\Omega^*)$  est l'unique solution de

$-\Delta v = |f|^*$  dans  $\Omega^*$  avec  $v = 0$  sur  $\partial\Omega^*$ . Si  $A \in L^\infty(\Omega, \mathcal{S}_n(\mathbb{R}))$  et

$$\begin{cases} A \geq \text{Id p.p. dans } \Omega, & \Lambda = 1, & H(x, s, p) = \alpha(x) \cdot p + b(x)s - f(x), \\ \alpha \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n), & b, f \in L^\infty(\Omega), & b \geq 0 \text{ p.p. dans } \Omega, \end{cases}$$

alors il découle de [47] que l'unique solution  $u \in H_0^1(\Omega)$  de (1) vérifie  $|u|^* \leq v$  p.p. dans  $\Omega^*$ , où  $v \in W(\Omega^*) \cap H_0^1(\Omega^*)$  est l'unique solution faible de  $-\Delta v + \hat{\alpha} e_r \cdot \nabla v = |f|^*$  dans  $\Omega^*$ . Nous notons  $e_r(x) = x/|x|$  pour tout  $x \in \Omega^* \setminus \{0\}$  et la fonction positive radiale  $\hat{\alpha} \in L^\infty(\Omega^*)$  est un pseudo-réarrangement de  $|\alpha|$  qui satisfait des propriétés similaires à celles de la fonction  $\hat{\alpha}$  du Théorème 2.1. La preuve de [47] utilise la symétrisation de Schwarz et est complètement différente de celle utilisée dans [31] (en fait, dans la section 5.3 de [31], nous montrons que notre méthode utilisée pour montrer le Théorème 2.1 peut permettre de retrouver certains des résultats de [45, 47]). Par ailleurs, Trombetti et Vazquez [49] ont montré entre autres que si  $A \geq \text{Id}$ ,  $\Lambda = 1$ ,  $H(x, s, p) = \alpha(x) \cdot p + bs - f(x)$  avec  $\alpha \in W^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ ,  $b, f \in L^\infty(\Omega)$ ,  $\min(b, \text{div}(\alpha) + b) \geq 0$  p.p. dans  $\Omega$ , alors  $\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq \|v\|_{L^p(\Omega^*)}$  pour tout  $1 \leq p \leq +\infty$ , où  $v \in W(\Omega^*)$  vérifie  $-\Delta v + \tilde{\alpha} e_r \cdot \nabla v + c_* v = |f|^*$  dans  $\Omega^*$  avec  $v = 0$  sur  $\partial\Omega^*$ ,  $\tilde{\alpha} = \|\alpha\|_{L^\infty(\Omega)}$  et  $c_* \in L^\infty(\Omega^*)$  est le réarrangement radial croissant de n'importe quelle fonction  $c$  telle que  $0 \leq c \leq \min(b, \text{div}(\alpha) + b)$  dans  $\Omega$ . D'autres résultats dans cette veine se trouvent dans [5, 6, 34].

Dans les références du paragraphe précédent, la fonction  $\Lambda$  apparaissant dans (3) était supposée constante. Lorsque  $\Lambda$  est choisie égale à une constante  $\lambda$ , alors il découle de (5) que la fonction  $\hat{\Lambda}$  du Théorème 2.1 est égale à  $\lambda$  et la partie principale de (7) est proportionnelle au Laplacien. De plus, dans ce cas, le corollaire 2.2 (ou [43, 47]) implique que  $u^* \leq \bar{V}$  p.p. dans  $\Omega^*$ , où  $\bar{V} \in H_0^1(\Omega^*) \cap C(\bar{\Omega}^*)$  est l'unique solution faible de l'équation suivante indépendante de  $u$  :  $-\lambda \Delta \bar{V} - \bar{a} |\nabla \bar{V}| = \bar{f}$ , où  $\bar{a} = \sup_{\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n} a^+$  et  $\bar{f} = \sup_{\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n}$ . Cependant, ici,  $\Lambda$  n'est pas supposée constante et la fonction  $\hat{\Lambda}$  n'est en fait pas constante en général (cf. la Remarque 5.5 de [30] pour des exemples). Lorsque  $\Lambda$  n'est pas constante, il découle de (5) que  $\text{ess inf}_{\Omega^*} \hat{\Lambda} \geq \text{ess inf}_{\Omega} \Lambda$ ,  $\text{ess sup}_{\Omega^*} \hat{\Lambda} \leq \text{ess sup}_{\Omega} \Lambda$ , et

$$\text{ess sup}_{\Omega^*} \hat{\Lambda} > \text{ess inf}_{\Omega} \Lambda \quad \text{et} \quad \text{ess inf}_{\Omega^*} \hat{\Lambda} < \text{ess sup}_{\Omega} \Lambda.$$

À notre connaissance, Alvino et Trombetti [2, 3, 4] ont été les premiers à utiliser des fonctions  $\Lambda$  non constantes dans des résultats de comparaison de problèmes elliptiques du type (1). Ainsi, dans [2], le problème (1) est considéré avec  $H$ , linéaire en  $s$  et indépendant de  $p$ , donné par  $H(x, s, p) = b(x)s - f(x)$  et  $b \geq 0$  p.p. dans  $\Omega$ . En utilisant la symétrisation de Schwarz, il est montré que  $|u|^* \leq v$  p.p. dans  $\Omega^*$ , où  $v \in H_0^1(\Omega^*)$  est la solution faible de  $-\text{div}(\hat{\Lambda}(x)\nabla v) = |f|^*$  dans  $\Omega^*$  pour un certain coefficient pseudo-réarrangé  $\hat{\Lambda}$ . Des comparaisons de valeurs propres principales d'opérateurs elliptic auto-adjoints du second ordre sont donnés dans [3, 20] et des formules isopérimétriques pour le problème de torsion sont montrées dans [4].

Les problèmes décrits dans les deux paragraphes précédents concernaient des fonctions  $H(x, u, \nabla u)$  linéaires par rapport à  $u$  et  $\nabla u$ . Des résultats analogues pour des problèmes non linéaires ont été montrés dans [5, 7, 19, 23, 39, 46]. Dans la plupart de ces références, les termes du second ordre pour des problèmes du type (1) dans  $\Omega$  sont comparés à un multiple du Laplacien pour (2) dans  $\Omega^*$  (ou à des termes homogènes du second ordre tels que le  $p$ -Laplacien), et les comparaisons entre  $u^*$  et  $v$  sont ponctuelles ou bien seulement intégrales et ont eu lieu dans la boule entière  $\Omega^*$  ou seulement dans un sous-domaine strict de  $\Omega^*$ , suivant les hypothèses faites sur les coefficients. Dans le Théorème 2.1, les problèmes d'origine (1) sont non linéaires par rapport à  $u$  et  $\nabla u$ , ils sont comparés à des équations dont les coefficients des termes du second ordre sont en général hétérogènes, et les comparaisons entre  $u^*$

et  $v$  sont ponctuelles dans toute la boule  $\Omega^*$ . L'une des principales originalités est également la méthode utilisée, qui repose sur une symétrisation des termes du second ordre par rapport aux ensembles de niveau de  $u$ .

En réalité, la méthode utilisée dans la preuve du Théorème 2.1 permet d'obtenir une comparaison quantitativement améliorée lorsque le domaine d'origine  $\Omega$  n'est pas une boule. Nous rappelons que  $A = (A_{i,i'})_{1 \leq i, i' \leq n} \in W^{1,\infty}(\Omega)$  et notons  $\|A\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} = \max_{1 \leq i, i' \leq n} \|A_{i,i'}\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}$ .

**Théorème 2.3.** [31] *Supposons que  $\Omega$  n'est pas une boule et que les hypothèses (3) et (4) sont vérifiées avec  $\Lambda \in L_+^\infty(\Omega)$  et  $q = 1$ . Alors, avec les notations du Théorème 2.1, il existe une constante  $\eta_u > 0$ , qui dépend de  $\Omega$ ,  $n$  et  $u$ , telle que*

$$(1 + \eta_u) u^* \leq v \text{ p.p. dans } \Omega^*.$$

De plus, s'il existe  $M > 0$  tel que

$$\begin{cases} \|A\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} + \|\Lambda^{-1}\|_{L^\infty(\Omega)} + \|a\|_{L^\infty(\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)} + \|f\|_{L^\infty(\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)} \leq M, \\ |H(x, s, p) - H(x, 0, 0)| \leq M(|s| + |p|) \text{ pour tout } (x, s, p) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \\ -M \leq H(x, 0, 0) \leq 0 \text{ pour tout } x \in \Omega, \quad \int_{\Omega} H(x, 0, 0) dx \leq -M^{-1} < 0, \end{cases}$$

alors il existe une constante  $\eta > 0$ , qui dépend de  $\Omega$ ,  $n$  et  $M$  mais pas de  $u$ , telle que

$$(1 + \eta) u^* \leq v \text{ p.p. dans } \Omega^*.$$

En plus des différences mentionnées ci-dessus par rapport aux résultats de la littérature, les comparaisons améliorées énoncées dans le Théorème 2.3 quand  $\Omega$  n'est pas une boule n'avaient à notre connaissance jamais été établies dans la littérature, même dans des cas particuliers.

**Remarque 2.4.** Dans nos résultats, la solution  $u$  de (1) est prise dans  $W(\Omega)$  (ce qui équivaut à  $u \in C^1(\bar{\Omega})$ , d'après les estimations elliptiques standard appliquées à (1) et le fait que la fonction  $H$  est continue). Dans les preuves,  $u$  est approchée par des fonctions analytiques  $u_j$  dans  $W^{2,p}(\Omega)$  faible pour tout  $1 \leq p < +\infty$  et dans  $C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$  pour tout  $0 \leq \alpha < 1$ . Puisque  $u > 0$  dans  $\Omega$  et  $|\nabla u| > 0$  sur  $\partial\Omega$  par hypothèse, les fonctions  $u_j$  vérifient ces mêmes propriétés pour  $j$  suffisamment grand et on peut alors leur appliquer notre méthode de réarrangement décrite dans la Section 2 de [31] et inspirée de [30]. Dans l'approximation de  $u$  par  $u_j$ , la théorie  $W^{2,p}$  est nécessaire et le caractère lipschitzien de  $A$  est utilisé. Alors que les preuves des résultats de Talenti reposent sur la symétrisation de Schwarz, l'inégalité de Pólya-Szegö et l'inégalité isopérimétrique standard, nos preuves reposent sur la symétrisation des termes du second ordre et elles requièrent plus d'hypothèses de régularité. Cependant, nos résultats couvrent le cas où les fonctions d'ellipticité  $\Lambda$  dans  $\Omega$  et  $\hat{\Lambda}$  dans  $\Omega^*$  sont non constantes en général. De plus, ils donnent de nouvelles inégalités différentielles ponctuelles qui peuvent être quantitativement exprimées en fonction de certaines bornes sur les coefficients et le domaine, et qui peuvent aussi être améliorées lorsque le domaine n'est pas une boule.

### 3. CROISSANCE AU PLUS QUADRATIQUE PAR RAPPORT AU GRADIENT

Notre deuxième principal résultat porte sur le cas général où  $H$  est minoré par une fonction au plus quadratique par rapport à  $|\nabla u|$ , sous l'hypothèse supplémentaire  $\inf_{\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n} b > 0$  dans (4).

**Théorème 3.1.** [31] *Supposons (3) et (4) avec  $\Lambda \in L_+^\infty(\Omega)$ ,  $1 < q \leq 2$  et*

$$(10) \quad \inf_{\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n} b > 0.$$

soit  $u \in W(\Omega)$  une solution of (1) telle que  $u > 0$  dans  $\Omega$  et  $|\nabla u| \neq 0$  sur  $\partial\Omega$ . Alors il existe trois fonctions radiales  $\widehat{\Lambda} \in L^{\infty}_+(\Omega^*)$ ,  $\widehat{a} \in L^{\infty}(\Omega^*)$  et  $\widehat{f} \in L^{\infty}(\Omega^*)$ , et une constante  $\widehat{\delta} > 0$  telles que

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 < \operatorname{ess\,inf}_{\Omega} \Lambda \leq \operatorname{ess\,inf}_{\Omega^*} \widehat{\Lambda} \leq \operatorname{ess\,sup}_{\Omega^*} \widehat{\Lambda} \leq \operatorname{ess\,sup}_{\Omega} \Lambda, \quad \|\widehat{\Lambda}^{-1}\|_{L^1(\Omega^*)} = \|\Lambda^{-1}\|_{L^1(\Omega)}, \\ 0 \leq \left( \inf_{\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n} a^+ \right) \times \left( \frac{\operatorname{ess\,inf}_{\Omega} \Lambda}{\operatorname{ess\,sup}_{\Omega} \Lambda} \right)^{q-1} \\ \leq \operatorname{ess\,inf}_{\Omega^*} \widehat{a} \leq \operatorname{ess\,sup}_{\Omega^*} \widehat{a} \leq \left( \sup_{\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n} a^+ \right) \times \left( \frac{\operatorname{ess\,sup}_{\Omega} \Lambda}{\operatorname{ess\,inf}_{\Omega} \Lambda} \right)^{2q-2}, \\ \inf_{\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n} f \leq \operatorname{ess\,inf}_{\Omega^*} \widehat{f} \leq \operatorname{ess\,sup}_{\Omega^*} \widehat{f} \leq \sup_{\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n} f, \quad \int_{\Omega^*} \widehat{f} = \int_{\Omega} f_u, \end{array} \right.$$

et

$$(11) \quad u^* \leq v \text{ p.p. dans } \Omega^*,$$

où  $f_u$  est définie par (8) et  $v \in H_0^1(\Omega^*) \cap L^{\infty}(\Omega^*)$  est l'unique solution faible de

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\operatorname{div}(\widehat{\Lambda}(x)\nabla v) + \widehat{H}(x, v, \nabla v) = 0 \text{ dans } \Omega^*, \\ v = 0 \text{ sur } \partial\Omega^* \end{array} \right.$$

avec

$$(13) \quad \widehat{H}(x, s, p) = -\widehat{a}(x) |p|^q + \widehat{\delta} s - \widehat{f}(x).$$

De plus, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une fonction radiale  $\widehat{f}_{\varepsilon} \in L^{\infty}(\Omega^*)$  telle que  $\mu_{\widehat{f}_{\varepsilon}} = \mu_{f_u}$  et

$$(14) \quad \|(u^* - v_{\varepsilon})^+\|_{L^{2^*}(\Omega^*)} \leq \varepsilon,$$

où  $v_{\varepsilon} \in H_0^1(\Omega^*) \cap L^{\infty}(\Omega^*)$  est l'unique solution faible de

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\operatorname{div}(\widehat{\Lambda}(x)\nabla v_{\varepsilon}) + \widehat{H}_{\varepsilon}(x, v_{\varepsilon}, \nabla v_{\varepsilon}) = 0 \text{ dans } \Omega^*, \\ v_{\varepsilon} = 0 \text{ sur } \partial\Omega^* \end{array} \right.$$

avec

$$(16) \quad \widehat{H}_{\varepsilon}(x, s, p) = -\widehat{a}(x) |p|^q + \widehat{\delta} s - \widehat{f}_{\varepsilon}(x).$$

Dans (14),  $2^* = 2n/(n-2)$  si  $n \geq 3$ ,  $2^* = \infty$  si  $n = 1$  et  $2^*$  est n'importe quel réel fixé dans  $[1, +\infty)$  si  $n = 2$ .

Notons que, contrairement à la conclusion du Théorème 2.1,  $\widehat{f}$  et  $f_u$  n'ont pas la même fonction de répartition en général, mais  $\widehat{f}_{\varepsilon}$  a bien la même fonction de répartition que  $f_u$ .

Comme  $1 < q \leq 2$ , les fonctions  $\widehat{a}|\nabla v|^q$  et  $\widehat{a}|\nabla v_{\varepsilon}|^q$  sont seulement dans  $L^1(\Omega^*)$  en général. Puisque  $\widehat{H}(\cdot, v(\cdot), \nabla v(\cdot)) \in L^1(\Omega^*)$ , le fait que  $v \in H_0^1(\Omega^*) \cap L^{\infty}(\Omega^*)$  soit une solution faible de (12) signifie que  $\int_{\Omega^*} \widehat{\Lambda}(x)\nabla v \cdot \nabla \varphi - \int_{\Omega^*} \widehat{a}(x) |\nabla v|^q \varphi + \int_{\Omega^*} \widehat{\delta} v \varphi - \int_{\Omega^*} \widehat{f}(x) \varphi = 0$  pour tout  $\varphi \in H_0^1(\Omega^*) \cap L^{\infty}(\Omega^*)$ , et de même pour  $v_{\varepsilon}$  avec  $\widehat{f}_{\varepsilon}$  au lieu de  $\widehat{f}$ .

Du Théorème 3.1 et du principe du maximum, nous pouvons déduire le corollaire suivant.

**Corollaire 3.2.** [31] Avec les notations du Théorème 3.1, pour toutes fonctions  $\bar{a}$  et  $\bar{f}$  dans  $L^{\infty}(\Omega^*)$  telles que  $\widehat{a} \leq \bar{a}$  et  $\widehat{f} \leq \bar{f}$  p.p. dans  $\Omega^*$ , et pour tout réel  $\bar{\delta}$  tel que  $0 < \bar{\delta} \leq \widehat{\delta}$ , on a  $u^* \leq \bar{v}$  p.p. dans  $\Omega^*$ , où  $\bar{v} \in H_0^1(\Omega^*) \cap L^{\infty}(\Omega^*)$  est l'unique solution faible de

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\operatorname{div}(\widehat{\Lambda}(x)\nabla \bar{v}) + \bar{H}(x, \bar{v}, \nabla \bar{v}) = 0 \text{ dans } \Omega^*, \\ \bar{v} = 0 \text{ sur } \partial\Omega^* \end{array} \right.$$



avec  $\overline{H}(x, s, p) = -\overline{a}(x)|p|^q + \overline{\delta}s - \overline{f}(x)$ . En particulier,  $u^* \leq \overline{V}$  p.p. dans  $\Omega^*$ , où  $\overline{V} \in H_0^1(\Omega^*) \cap L^\infty(\Omega^*)$  est l'unique solution faible de (17) avec  $\overline{\delta} = \widehat{\delta}$ ,  $\overline{a} = (\sup_{\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n} a^+) \times (\text{ess sup}_\Omega \Lambda / \text{ess inf}_\Omega \Lambda)^{2q-2}$  et  $\overline{f} = \sup_{\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n} f$ .

**Démonstration.** Avec les notations du Théorème 3.1 et du Corollaire 3.2, et en utilisant le fait que  $v \geq u^* \geq 0$  p.p. dans  $\Omega^*$  (d'après le Théorème 3.1), on a

$$-\text{div}(\widehat{\Lambda}(x)\nabla v) + \overline{H}(x, v, \nabla v) = (\widehat{a}(x) - \overline{a}(x))|\nabla v|^q + (\overline{\delta} - \widehat{\delta})v + \widehat{f}(x) - \overline{f}(x) \leq 0$$

au sens faible  $H_0^1(\Omega^*) \cap L^\infty(\Omega^*)$ , i.e.  $\int_{\Omega^*} \widehat{\Lambda}(x)\nabla v \cdot \nabla \varphi - \int_{\Omega^*} \overline{a}(x)|\nabla v|^q \varphi + \int_{\Omega^*} \overline{\delta} v \varphi - \int_{\Omega^*} \overline{f}(x) \varphi \leq 0$  pour tout  $\varphi \in H_0^1(\Omega^*) \cap L^\infty(\Omega^*)$  avec  $\varphi \geq 0$  p.p. dans  $\Omega^*$ . En d'autres termes,  $v$  est une sous-solution faible  $H_0^1(\Omega^*) \cap L^\infty(\Omega^*)$  de (17), avec  $\overline{\delta} > 0$ . Le principe du maximum (Théorème 2.1 de [9]) donne  $v \leq \overline{v}$  p.p. dans  $\Omega^*$ , d'où  $u^* \leq \overline{v}$  p.p. dans  $\Omega^*$  d'après (11).  $\square$

Pour les problèmes (12), (15) et (17), l'existence de solutions faibles  $v$ ,  $v_\varepsilon$  et  $\overline{v}$  dans  $H_0^1(\Omega^*) \cap L^\infty(\Omega^*)$  découle d'un article de Boccardo, Murat et Puel (Théorème 2.1 de [14] et les commentaires qui suivent, cf. aussi [15]) et l'unicité découle d'un article de Barles et Murat (Théorème 2.1 de [9]). De plus,  $v$ ,  $v_\varepsilon$  et  $\overline{v}$  sont localement Hölderiennes dans  $\Omega^*$  d'après le Corollaire 4.23 de [33], et  $v$  et  $v_\varepsilon$  sont radiales ( $v$  et  $v_\varepsilon$  sont alors Hölderiennes dans  $\overline{\Omega^*}$ ) par unicité puisque tous les coefficients de (12) sont radiaux. Pour le problème (17), la fonction  $\overline{v}$  n'est pas forcément radiale en général, puisque les fonctions  $\overline{a}$  and  $\overline{f}$  ne sont pas supposées radiales. Mais le principe du maximum et le Corollaire 3.2 impliquent que  $0 \leq u^* \leq \overline{v} \leq \overline{V}$  dans  $\Omega^*$ , et puisque  $\overline{V}$  est continue dans  $\overline{\Omega^*}$  et s'annule sur  $\partial\Omega^*$ , la fonction  $\overline{v}$  est donc également continue dans  $\overline{\Omega^*}$ .

De manière plus générale, pour le problème (1), il découle de [15, 16] qu'il existe une solution  $u \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$  si

$$\begin{cases} H(x, s, p) = \beta(x, s, p) + \widetilde{H}(x, s, p), \\ \beta(x, s, p)s \geq \delta s^2, \quad |\beta(x, s, p)| \leq \kappa(\gamma(x) + |s| + |p|), \quad |\widetilde{H}(x, s, p)| \leq \rho + \varrho(|s|)|p|^2 \end{cases}$$

avec  $\delta > 0$ ,  $\kappa > 0$ ,  $\rho > 0$ ,  $\gamma \in L^2(\Omega)$ ,  $\gamma \geq 0$  p.p. dans  $\Omega$  et  $\varrho : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  est croissante (voir aussi [11, 21, 43] pour d'autres résultats d'existence). De plus, si  $q < 1 + 2/n$  et s'il existe des réels  $M \geq 0$  et  $r \geq 0$  tels que  $r(n-2) < n+2$  et  $|H(x, s, p)| \leq M(1 + |s|^r + |p|^q)$  pour tout  $(x, s, p) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ , alors toute solution faible  $u$  de (1) appartient à l'espace  $W(\Omega)$  (cf. Théorème 5.5 de [31]). Par ailleurs, il découle de [9] que, si  $\partial_s H$  et  $\partial_p H$  existent avec  $\partial_s H(x, s, p) \geq \sigma > 0$ ,  $|\partial_p H(x, s, p)| \leq \theta(|s|)(1 + |p|)$ ,  $|H(x, s, 0)| \leq \vartheta(|s|)$  pour certaines fonctions continues positives  $\theta$  et  $\vartheta$ , alors il existe au plus une solution  $u$  de (1) dans  $H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ , et  $u$  est nécessairement positive si  $H(\cdot, 0, 0) \leq 0$  in  $\Omega$  (voir aussi [8, 43] pour d'autres résultats dans cette direction). Nous renvoyons à [10, 12, 29] pour d'autres résultats d'existence et d'unicité pour des problèmes avec dépendance strictement sous-quadratique en  $|\nabla u|$  (i.e.  $q < 2$  dans (12)) et à [1, 24, 26, 35, 44] pour d'autres résultats d'existence pour des problèmes du type (12), (15), (17) lorsque  $\widehat{\delta} \leq 0$  et  $\widehat{f}$ ,  $\widehat{f}_\varepsilon$  ou  $\overline{f}$  sont petits dans certains espaces. Cependant, il est important de noter que l'existence et l'unicité ne sont pas toujours garanties pour des fonctions générales  $\widehat{f}$ ,  $\widehat{f}_\varepsilon$  ou  $\overline{f}$  si  $\widehat{\delta} \leq 0$ , voir en particulier [1, 32, 35, 43, 44] pour des problèmes du type (12), (15), (17) ou pour des problèmes plus généraux.

Des comparaisons entre une solution  $u$  de (1) et une solution  $v$  d'un problème du type (12) lorsque  $H(x, s, p)$  est non linéaire par rapport  $p$  et a une croissance au plus quadratique en  $|p|$  ont été établis pour la première fois par Alvino, Trombetti et Lions [5] dans le cas  $H = H(x, p)$  avec

$$A \geq \text{Id}, \quad \Lambda = 1, \quad |H(x, p)| \leq f(x) + \kappa |p|^q$$

et  $\kappa > 0$ ,  $f \in L^\infty(\Omega)$ ,  $f \geq 0$  p.p. dans  $\Omega$ : dans ce cas, on a  $u^* \leq v$  p.p. dans  $\Omega^*$ , où  $v \in H_0^1(\Omega^*) \cap L^\infty(\Omega^*)$  est une solution faible de  $-\Delta v = f^* + \kappa |\nabla v|^q$  dans  $\Omega^*$ , sous la condition qu'une telle solution  $v$  existe (c'est le cas si la norme  $\|f\|_{L^\infty(\Omega)}$  est suffisamment petite). Nous renvoyons à [37, 39, 41] pour d'autres résultats dans cette direction. Par ailleurs, Ferone et Posteraro [25] (voir aussi [26]) ont montré que si

$$A \geq \text{Id}, \quad \Lambda = 1, \quad H(x, s, p) = \text{div}(F) + \tilde{H}(x, s, p), \quad |\tilde{H}(x, s, p)| \leq f(x) + |p|^2$$

avec  $F \in (L^r(\Omega))^n$ ,  $f \in L^{r/2}(\Omega)$  et  $r > n$ , alors  $u^* \leq v$  p.p. dans  $\Omega^*$  pour n'importe quelle solution faible  $v^* \in H_0^1(\Omega^*) \cap L^\infty(\Omega^*)$  de  $-\Delta v = f^*(x) + |\nabla v|^2 + \text{div}(\widehat{F}e_r)$  dans  $\Omega^*$ , pourvu qu'une telle solution  $v$  existe (c'est le cas si certaines normes de  $f$  et  $F$  sont suffisamment petites), où  $\widehat{F}$  est similaire à la fonction  $\widehat{a}$  apparaissant dans les Théorèmes 2.1 et 3.1. À notre connaissance, dans le cas d'une croissance au plus quadratique par rapport au gradient, le seul résultat de comparaison avec des fonctions  $\Lambda$  non constantes est contenu dans un article récent de Tian et Li [48]: si  $|H(x, s, p)| \leq f(x) + \kappa \Lambda(x)^{2/q} |p|^q$  avec  $\kappa > 0$  et  $f \geq 0$  p.p. dans  $\Omega$ , alors  $u^* \leq v$  p.p. dans  $\Omega^*$  pour n'importe quelle solution faible  $v \in H_0^1(\Omega^*) \cap L^\infty(\Omega^*)$  de  $-\text{div}(\tilde{\Lambda}(x)\nabla v) = f^*(x) + \kappa \tilde{\Lambda}(x)^{2/q} |\nabla v|^q$  dans  $\Omega^*$ , sous la condition qu'une telle solution  $v$  existe (c'est le cas si  $f$  est suffisamment petite), où  $\tilde{\Lambda}$  est similaire à la fonction  $\widehat{\Lambda}$  des Théorèmes 2.1 et 3.1. Enfin, nous renvoyons à [38] pour des résultats de comparaison dans lesquels  $u$  est comparée à une solution  $v$ , s'il en existe, d'une équation dont la partie principale est un terme non linéaire homogène, tel que le  $p$ -Laplacien.

Dans les références du paragraphe précédent, une borne sur la valeur absolue  $|H|$  de  $H$  dans  $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  est utilisée, l'existence de solutions  $v$  de certains problèmes symétrisés dans  $\Omega^*$  est supposée et les fonctions  $\widehat{H}$  de ces problèmes symétrisés ne dépendent que de  $(x, p) \in \Omega^* \times \mathbb{R}^n$ . Comme nous l'avons déjà mentionné, l'existence de ces solutions  $v$  n'est garantie que quand certaines normes de la fonction  $f$  (ou  $f_u$ ) sont petites, car  $v$  n'existe pas toujours pour des fonctions générales  $f$  ou  $f_u$ . Cependant, si  $\widehat{H} = \widehat{H}(x, p)$ , il est possible d'intégrer l'équation uni-dimensionnelle satisfaite par la fonction radiale  $v$  et alors de comparer  $v$  avec la solution d'une équation faisant apparaître la symétrisation  $f_u^*$  de la fonction  $f_u$ , comme dans les résultats de la Section 2.

Au contraire, dans le Théorème 3.1, seule la minoration (4) est nécessaire et l'existence (et l'unicité) des solutions  $v$  et  $v_\varepsilon$  de (12) et (15) est garantie automatiquement par la condition supplémentaire  $\inf_{\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n} b > 0$ . La contrepartie de la stricte positivité de  $\widehat{\delta}$  dans (13) et (16) est que l'on ne peut pas intégrer les équations uni-dimensionnelles satisfaites par les fonctions  $v$  et  $v_\varepsilon$ . Ainsi, nous ne savons pas s'il est possible de comparer les fonctions  $v$  et  $v_\varepsilon$  à la solution d'une équation du même type avec  $f_u^*$  au lieu de  $\widehat{f}$  ou  $\widehat{f}_\varepsilon$  dans (13) ou (16). Cependant, puisque  $\inf_{\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n} b > 0$  et que l'on montre que le réel  $\widehat{\delta}$  est strictement positif, il n'est pas nécessaire de supposer que certaines normes des fonctions  $f_u$ ,  $\widehat{f}$  ou  $\widehat{f}_\varepsilon$  sont petites. La fonction  $f$  dans (4) peut être n'importe quelle fonction bornée.

Nous soulignons un cas particulier important du Corollaire 3.2: plus précisément, si  $\Lambda = \lambda > 0$  est choisie constante, alors  $u^* \leq \overline{V}$  presque partout dans  $\Omega^*$ , où  $\overline{V}$  est l'unique solution faible  $H_0^1(\Omega^*) \cap L^\infty(\Omega^*)$  de

$$\begin{cases} -\lambda \Delta \overline{V} - \bar{a} |\nabla \overline{V}|^q + \widehat{\delta} \overline{V} &= \overline{f} \text{ dans } \Omega^*, \\ \overline{V} &= 0 \text{ sur } \partial\Omega^*, \end{cases}$$

où  $\bar{a} = \sup_{\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n} a^+$  et  $\overline{f} = \sup_{\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n} f$ . Malgré sa simplicité apparente, même ce cas particulier du Corollaire 3.2 est en fait nouveau. De plus, sous

l'hypothèse (18) ci-dessous avec  $n \geq 2$  que le réel  $\widehat{\delta}$  peut être choisi indépendamment de  $u$ , et donc la fonction majorante  $\overline{V}$  est également indépendante de  $u$ .

Comme pour le Théorème 2.1, la méthode utilisée dans la preuve du Théorème 3.1 repose sur une symétrisation des termes du second ordre, avec une attention particulière portée sur la constante  $\widehat{\delta}$  apparaissant dans (12) et (15), afin que ces problèmes soient bien posés.

Enfin, lorsque  $\Omega$  n'est pas une boule, on peut donner une inégalité quantitativement améliorée, qui est à notre connaissance complètement nouvelle pour des problèmes du type (1) et (12), même pour des cas particuliers.

**Théorème 3.3.** [31] *Supposons que  $\Omega$  n'est pas une boule, que les hypothèses (3) et (4) sont satisfaites avec  $\Lambda \in L_+^\infty(\Omega)$ ,  $1 < q \leq 2$ , ainsi que (10). Alors, avec les notations du Théorème 3.1, il existe une constante  $\eta_u > 0$ , qui dépend de  $\Omega$ ,  $n$  et  $u$ , telle que*

$$(1 + \eta_u) u^* \leq v \text{ p.p. dans } \Omega^*$$

and

$$\|((1 + \eta_u) u^* - v_\varepsilon)^+\|_{L^{2^*}(\Omega^*)} \leq \varepsilon.$$

De plus, si  $q < 1 + 2/n$  et s'il existe des réels  $M > 0$  et  $r \geq 0$  tels que  $r(n-2) < n+2$  et

$$(18) \quad \begin{cases} \|A\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} + \|\Lambda^{-1}\|_{L^\infty(\Omega)} + \|a\|_{L^\infty(\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)} + \|f\|_{L^\infty(\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)} \leq M, \\ b(x, s, p) \geq M^{-1} > 0 \text{ pour tout } (x, s, p) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \\ |H(x, s, p) - H(x, 0, 0)| \leq M(|s|^r + |p|^q) \text{ pour tout } (x, s, p) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \\ |H(x, s, p)| \leq M(1 + |s|^r + |p|^q) \text{ pour tout } (x, s, p) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \\ H(x, 0, 0) \leq 0 \text{ pour tout } x \in \Omega, \quad \int_\Omega H(x, 0, 0) dx \leq -M^{-1} < 0, \end{cases}$$

alors il existe une constante  $\eta > 0$  dépendant seulement de  $\Omega$ ,  $n$ ,  $q$ ,  $M$  et  $r$  telle que  $(1 + \eta) u^* \leq v$  p.p. dans  $\Omega^*$  et  $\|((1 + \eta) u^* - v_\varepsilon)^+\|_{L^{2^*}(\Omega^*)} \leq \varepsilon$ .

#### REFERENCES

- [1] B. Abdellaoui, A. Dall'Aglio et I. Peral, Some remarks on elliptic problems with critical growth in the gradient, *J. Diff. Equations* **222** (2006), 21-62.
- [2] A. Alvino et G. Trombetti, Sulle migliori costanti di maggiorazione per una classe di equazioni ellittiche degeneri, *Ricerche Mat.* **27** (1978), 413-428.
- [3] A. Alvino et G. Trombetti, A lower bound for the first eigenvalue of an elliptic operator, *J. Math. Anal. Appl.* **94** (1983), 328-337.
- [4] A. Alvino et G. Trombetti, Isoperimetric inequalities connected with torsion problem and capacity, *Boll. Union Mat. Ital. B* **4** (1985), 773-787.
- [5] A. Alvino, G. Trombetti et P.-L. Lions, Comparison results for elliptic and parabolic equations via Schwarz symmetrization, *Ann. Inst. H. Poincaré, Analyse Non Linéaire* **7** (1990), 37-65.
- [6] A. Alvino, G. Trombetti, P.-L. Lions et S. Matarasso, Comparison results for solutions of elliptic problems via symmetrization, *Ann. Inst. H. Poincaré, Analyse Non Linéaire* **16** (1999), 167-188.
- [7] C. Bandle et M. Marcus, Comparison theorems for a class of nonlinear Dirichlet problems, *J. Diff. Equations* **26** (1977), 321-334.
- [8] G. Barles, A.-P. Blanc, C. Georgelin et M. Kobylanski, Remarks on the maximum principle for nonlinear elliptic PDEs with quadratic growth conditions, *Ann. Scuola Norm. Sup. Cl. Sci. (4)* **28** (1999), 381-404.
- [9] G. Barles et F. Murat, Uniqueness and the maximum principle for quasilinear elliptic equations with quadratic growth conditions, *Arch. Ration. Mech. Anal.* **133** (1995), 77-101.

- [10] G. Barles et A. Porretta, Uniqueness for unbounded solutions to stationary viscous Hamilton-Jacobi equations, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (5)* **5** (2006), 107-136.
- [11] A. Bensoussan, L. Boccardo et F. Murat, On a non linear partial differential equation having natural growth terms and unbounded solution, *Ann. Inst. H. Poincaré, Analyse Non Linéaire* **5** (1988), 347-364.
- [12] M.F. Betta, A. Mercaldo, F. Murat et M.M. Porzio, Uniqueness results for nonlinear elliptic equations with a lower order term, *Nonlinear Anal.* **63** (2005), 153-170.
- [13] L. Boccardo, T. Gallouët et F. Murat, Unicité de la solution de certaines équations elliptiques non linéaires, *C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I* **315** (1992), 1159-1164.
- [14] L. Boccardo, F. Murat et J.-P. Puel, Résultats d'existence pour certains problèmes elliptiques quasilineaires, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. Ser. 4* **11** (1984), 213-235.
- [15] L. Boccardo, F. Murat et J.-P. Puel, Existence of bounded solutions for non linear elliptic unilateral problems, *Ann. Mat. Pura Appl.* **152** (1988), 183-196.
- [16] L. Boccardo, F. Murat et J.-P. Puel,  $L^\infty$  estimate for some nonlinear elliptic partial differential equations and application to an existence result, *SIAM J. Math. Anal.* **23** (1992), 326-333.
- [17] M. Bramanti, Simmetrizzazione di Schwarz di funzioni e applicazioni a problemi variazionali ed equazioni a derivate parziali, *preprint*.
- [18] A. Burchard, A short course on rearrangement inequalities, *preprint*.
- [19] A. Cianchi, Symmetrization in anisotropic elliptic problems, *Comm. Part. Diff. Equations* **32** (2007), 693-717.
- [20] C. Conca, R. Mahadevan et L. Sanz, An extremal eigenvalue problem for a two-phase conductor in a ball, *Appl. Math. Optim.* **60** (2009), 173-184.
- [21] T. Del Vecchio, Strongly nonlinear problems with gradient dependent lower order nonlinearity, *Nonlinear Anal.* **11** (1987), 5-15.
- [22] J. Droniou et T. Gallouët, A uniqueness result for quasilinear elliptic equations with measures as data, *Rend. Mat. Appl.* **21** (2001), 57-86.
- [23] V. Ferone et B. Messano, Comparison results for nonlinear elliptic equations with lower-order terms, *Math. Nachr.* **252** (2003), 43-50.
- [24] V. Ferone et F. Murat, Nonlinear problems having natural growth in the gradient: an existence result when the source terms are small, *Nonlinear Anal.* **42** (2000), 1309-1326.
- [25] V. Ferone et M.R. Posteraro, On a class of quasilinear elliptic equations with quadratic growth in the gradient, *Nonlinear Anal.* **20** (1993), 703-711.
- [26] V. Ferone, M.R. Posteraro et J.-M. Rakotoson,  $L^\infty$ -estimates for nonlinear elliptic problems with  $p$ -growth in the gradient, *J. Ineq. Appl.* **3** (1999), 109-125.
- [27] D. Gilbarg et N.S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer Verlag, Berlin, 1983.
- [28] N. Grenon, Existence and comparison results for quasilinear elliptic equations with critical growth in the gradient, *J. Diff. Equations* **171** (2001), 1-23.
- [29] N. Grenon, F. Murat et A. Porretta, Existence and a priori estimates for elliptic problems with subquadratic gradient dependent terms, *C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I* **342** (2006), 23-28.
- [30] F. Hamel, N. Nadirashvili et E. Russ, Rearrangement inequalities and applications to isoperimetric problems for eigenvalues, *Annals Math.* **174** (2011), 647-755.
- [31] F. Hamel et E. Russ, Comparison results for semilinear elliptic equations using a new symmetrization method, <http://arxiv.org/abs/1401.1726>.
- [32] H. A. Hamid et M.-F. Bidaut-Véron, Correlation between two quasilinear elliptic problems with a source term involving the function or its gradient, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **346** (2008), 1251-1256.
- [33] Q. Han et F. Lin, *Elliptic Partial Differential Equations*, Courant Inst. Math. Sci., Amer. Math. Soc., 2011.
- [34] G. Iyer, A. Novikov, L. Ryzhik et A. Zlatoš, Exit times of diffusions with incompressible drift, *SIAM J. Math. Anal.* **42** (2010), 2484-2498.

- [35] L. Jeanjean et B. Sirakov, Existence and multiplicity for elliptic problems with quadratic growth in the gradient, *Comm. Part. Diff. Equations* **38** (2013), 244-264.
- [36] B. Kawohl, *Rearrangements and Convexity of Level Sets in Partial Differential Equations*, Lect. Notes Math. 1150, Springer-Verlag, 1985.
- [37] C. Maderna, C.D. Pagani et S. Salsa, Quasilinear elliptic equations with quadratic growth in the gradient, *J. Diff. Equations* **97** (1992), 54-70.
- [38] C. Maderna et S. Salsa, Dirichlet problem for elliptic equations with nonlinear first order terms: a comparison result, *Ann. Mat. Pura Appl.* **148** (1987), 277-288.
- [39] B. Messano, Symmetrization results for classes of nonlinear elliptic equations with  $q$ -growth in the gradient, *Nonlinear Anal.* **64** (2006), 2688-2703.
- [40] J. Mossino et R. Temam, Directional derivative of the increasing rearrangement mapping and application to a queer differential equation in plasma physics, *Duke Math. J.* **48** (1981), 475-495.
- [41] M. Pašić, Isoperimetric inequalities in quasilinear equations of Leray-Lions type, *J. Math. Pures Appl.* **75** (1996), 343-366.
- [42] G. Pólya et G. Szegő, *Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics*, Annals of Mathematics Studies **27**, Princeton Univ. Press, Princeton, 1951.
- [43] A. Porretta, *Elliptic Equations with First-order Terms*, Lecture Notes, CIMPA School Alexandria, 2009.
- [44] B. Sirakov, Solvability of uniformly elliptic fully nonlinear PDE, *Arch. Ration. Mech. Anal.* **195** (2010), 579-607.
- [45] G. Talenti, Elliptic equations and rearrangements, *Ann. Scuola Norm. Pisa Cl. Sci. (4)* **3** (1976), 697-718.
- [46] G. Talenti, Nonlinear elliptic equations, rearrangements of functions and Orlicz spaces, *Ann. Mat. Pura Appl.* **120** (1979), 159-184.
- [47] G. Talenti, Linear elliptic P.D.E.'s: level sets, rearrangements and a priori estimates of solutions, *Boll. Union Mat. Ital. B (6)* **4** (1985), 917-949.
- [48] Y. Tian et F. Li, Comparison results for nonlinear degenerate Dirichlet and Neumann problems with general growth in the gradient, *J. Math. Anal. Appl.* **378** (2011), 749-763.
- [49] G. Trombetti et J. L. Vazquez, A symmetrization result for elliptic equations with lower-order terms, *Ann. Fac. Sci. Toulouse* **7** (1985), 137-150.