HAL open science

Homogénéisation de phénomènes de transport en milieux poreux et milieux composites Comportements macroscopiques et domaines de validité

Pascale Royer

To cite this version:

Pascale Royer. Homogénéisation de phénomènes de transport en milieux poreux et milieux composites Comportements macroscopiques et domaines de validité. 2016. hal-02018226

HAL Id: hal-02018226

https://hal.science/hal-02018226v1

Submitted on 13 Feb 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Homogénéisation de phénomènes de transport en milieux poreux et milieux composites

Comportements macroscopiques et domaines de validité

Pascale Royer

Table des matières

1 Introduction **7**

2 Présentation de la méthode d'homogénéisation **9**
2.1 Introduction à la théorie de l'homogénéisation 9
2.1.1 Contours de la théorie de l'homogénéisation 9
2.1.2 Objet de l'homogénéisation 10
2.1.3 Homogénéisabilité 10
2.1.4 Microstructure aléatoire ou périodique 11
2.1.5 Sur quelques méthodes d'homogénéisation 11
2.1.5.1 Modélisation statistique 11
2.1.5.2 Méthode auto-cohérente 12
2.1.5.3 Méthodes de moyenne 12
2.1.5.4 Méthode d'homogénéisation des structures périodiques 12
2.2 Méthode d'homogénéisation des développements asymptotiques à échelles multiples 12
2.2.1 Traduction mathématique des concepts de base 12
2.2.1.1 Séparation des échelles 12
2.2.1.2 Périodicité 13
2.2.1.3 Développements asymptotiques 13
2.2.2 Processus d'homogénéisation 14
2.2.2.1 Normalisation de la description locale 14
2.2.2.2 Macroscopisation 14
2.2.2.3 Précision de la description macroscopique 15

3 Phénomènes diffusifs en milieux composites **17**
3.1 Conduction thermique en milieu composite : influence du contraste de conductivités 17
3.1.1 Mécanismes physiques et hypothèses 17
3.1.2 Modèles macroscopiques 18
3.1.3 Interprétation des domaines de validité 19
3.1.4 Modèle homogénéisé à double conductivité 22
3.1.5 Comparaison avec un modèle phénoménologique à deux équations 22
3.2 Milieu composite avec résistance de contact 23
3.2.1 Cas linéaire : conduction thermique en milieu composite avec résistance de contact 23
3.2.1.1 Description locale et hypothèses 23
3.2.1.2 Modèles macroscopiques 24

3.2.1.3 Interprétation des domaines de validité 25
3.2.2 Cas non-linéaire : écoulement d'un fluide compressible en milieu poreux composite avec barrière à l'écoulement . . . 26
3.2.2.1 Fluide compressible barotrope en milieu poreux . . 26
3.2.2.2 Ecoulement en milieu poreux composite avec barrière interfaciale à l'écoulement 28
3.3 Remarques de conclusion 29

4 Comportements macroscopiques des milieux à double porosité 31
4.1 Double porosité : concept et modèles 31
4.2 Ecoulement d'un fluide compressible en milieu à double porosité . . . 33
4.2.1 Homogénéisation en milieu à trois échelles 33
4.2.2 Description locale 34
4.2.3 Modèles macroscopiques 35
4.2.4 Interprétation des domaines de validité 36
4.2.4.1 Analogie avec la conduction thermique en milieu à double conductivité 36
4.2.4.2 Domaines de validité 36
4.2.5 Comparaison avec les modèles phénoménologiques 37
4.2.6 Cas d'un fluide très compressible 38
4.3 Poroélasticité en milieu à double porosité 38
4.3.1 Description locale 38
4.3.2 Modèles macroscopiques 39
4.3.3 Domaines de validité 41
4.4 Remarques de conclusion 42

5 Effet Klinkenberg 43
5.1 Phénomènes et modèles 43
5.1.1 Description des phénomènes mis en jeu 43
5.1.1.1 Lois de Klinkenberg et de Knudsen 43
5.1.1.2 Physique à l'échelle des pores 44
5.1.2 Homogénéisation de l'écoulement avec glissement d'un gaz en milieu poreux 45
5.1.2.1 Description locale de l'écoulement avec glissement 45
5.1.2.2 Modèles macroscopiques 45
5.2 Effet Klinkenberg en milieu à double porosité 46
5.2.1 Analyse des régimes locaux d'écoulement 47
5.2.1.1 Régimes d'écoulement dans la matrice microporeuse 47
5.2.1.2 Régimes d'écoulement dans les macropores 48
5.2.1.3 Combinaisons possibles 48
5.2.2 Commentaires et interprétation 49
5.2.2.1 Types de comportements macroscopiques 51
5.2.3 Perméabilités effectives 52
5.2.3.1 Domaines de validité des modèles 54
5.3 Effet Klinkenberg en milieu composite 55
5.3.1 Description locale 55
5.3.2 Modèles homogénéisés 55
5.3.3 Conductivités effectives 56
5.3.3.1 Conductivité effective au gaz globale 56
5.3.3.2 Conductivité effective au gaz partielle 56

5.3.4 Remarques de conclusion 57

6 Transport de soluté en milieu poreux 59

6.1 Transport par convection-diffusion 59

6.1.1 Modèles de la littérature 59

6.1.2 Modèles homogénéisés de transport par diffusion et convection 60

6.1.2.1 Description à l'échelle des pores 60

6.1.2.2 Modèles homogénéisés 61

6.1.2.3 Commentaires sur le modèle homogénéisé de dispersion 61

6.1.2.4 Analyse des domaines de validité des modèles . . . 63

6.2 Transport en milieu à double porosité 64

6.2.1 Modèles de la littérature 65

6.2.2 Modèles homogénéisés 66

6.2.3 Description locale 66

6.2.4 Modèles homogénéisés 66

6.2.5 Interprétation de l'absence d'effets de mémoire dans les modèles homogénéisés à double porosité 68

6.3 Transport en milieu poroélastique 68

6.3.1 Description locale 69

6.3.2 Modèle homogénéisé 69

6.3.2.1 Modèle poroélastique 69

6.3.2.2 Modèle d'advection diffusion en milieu poroélastique 70

6.4 Advection-diffusion en milieu poreux à faible séparation d'échelles 70

6.4.1 Physique locale 71

6.4.2 Modèles aux ordres supérieurs 71

7 Remarques de conclusion 73

Bibliographie 75

1

Introduction

Les matériaux composites naturels (sols, roches, tissus durs ou mous) sont des milieux multiphasiques et multi-échelles. La compréhension et la prédiction du comportement de ces structures poreuses dont l'espace interstitiel est saturé par un ou plusieurs fluides constitue le socle de plusieurs disciplines scientifiques, telles que l'hydrologie, l'hydrogéologie, la mécanique des sols et des roches, la géophysique, et plus récemment la biomécanique.

La modélisation de tout système hétérogène s'avère une opération délicate, puisque la prise en compte une à une de toutes les hétérogénéités est impossible. Il arrive toutefois que la répétition, au sens statistique, du désordre interne confère au milieu un caractère quasi-homogène à grande échelle. Une description continue est alors possible : on peut décrire les processus physiques par des équations dont les coefficients de transfert sont indépendantes des conditions aux limites du système. Telle est l'idée de base de toutes les techniques d'homogénéisation. Plus précisément, si l'échelle macroscopique d'observation est suffisamment grande par rapport à l'échelle microscopique, il est alors possible de déterminer un milieu macroscopiquement équivalent, c'est-à-dire se comportant "en moyenne" comme le milieu hétérogène initial, sous une sollicitation donnée.

La méthode d'homogénéisation des développements asymptotiques à échelles multiples permet, au prix de l'ajout de l'hypothèse de périodicité, de déterminer les comportements macroscopiques sans aucune hypothèse préalable sur leur forme. En outre, la périodicité du milieu n'a pas d'incidence sur la forme du modèle macroscopique, puisque milieux périodiques et aléatoires ont le même comportement quand la condition de séparation des échelles est vérifiée. Ceci en fait un outil pertinent pour la détermination des comportements macroscopiques.

Ce mémoire porte sur quelques résultats obtenus avec cette méthode. Les sujets abordés sont la conduction thermique en milieu composite et l'écoulement de fluide, le transport de soluté et la poroélasticité en milieux poreux. Une part importante est consacrée à la modélisation des milieux à double porosité. L'accent est mis sur l'analyse des comportements obtenus et de leurs domaines de validité. En particulier, il est montré qu'il est possible de traduire ces domaines de validité, initialement exprimés en ordres de grandeur de paramètres adimensionnels, en terme d'égalité ou d'inégalités entre deux temps caractéristiques.

2

Présentation de la méthode d'homogénéisation

2.1 Introduction à la théorie de l'homogénéisation

2.1.1 Contours de la théorie de l'homogénéisation

Qu'il soit de nature mécanique, physique, chimique ou bien biologique, on peut qualifier un système de complexe dès lors que son organisation interne implique différentes échelles d'espace et de temps, laquelle engendre un comportement collectif à l'échelle du système qui ne se déduit pas simplement des parties élémentaires qui le composent. Pour la description quantitative globale de tels systèmes, il est pertinent d'identifier les différentes échelles spatio-temporelles impliquées et de relier le comportement observé à une échelle à ceux des échelles inférieures ou supérieures. La distinction essentielle à faire lorsqu'on aborde l'étude d'un système multi-échelles est de déterminer si celui-ci est à échelles séparées ou pas.

Lorsque les échelles ne sont pas séparées, comme c'est le cas pour les phénomènes critiques et les structures fractales, la description de ces systèmes sans échelle caractéristique doit être globale en impliquant simultanément toutes les échelles. L'essentiel du phénomène n'est pas contenu dans les détails à une échelle donnée. C'est la façon dont les différentes échelles sont couplées les unes aux autres qui est déterminante. Une perturbation à l'échelle microscopique peut-être ou bien amortie, ou bien amplifiée et propagée aux plus grandes échelles, et ce de façon a priori imprédictible.

Lorsque les échelles sont séparées, la prise en compte à une échelle donnée d'un phénomène sous-jacent complexe peut alors se faire au moyen d'un modèle et de paramètres effectifs, au sens où ils suffisent à rendre compte de ses conséquences aux échelles supérieures. Le modèle et les paramètres effectifs sont obtenus en moyennant le comportement à l'échelle inférieure.

La théorie de l'homogénéisation s'inscrit dans le cadre des approches multi-échelles pour systèmes à échelles spatiales séparées. Elle se définit en outre par la nature des échelles impliquées et les hypothèses qui y sont associées. L'échelle macroscopique à laquelle on débouche est une échelle habituelle de la mécanique des milieux continus,

dont on s'est éloigné en plongeant dans les échelles inférieures (le microscopique), mais assez peu pour que l'utilisation des concepts et méthodes de la mécanique des milieux continus soit encore justifiables.

2.1.2 Objet de l'homogénéisation

L'homogénéisation regroupe un certain nombre de méthodes multi-échelles visant à modéliser le comportement de milieux hétérogènes à échelles séparées. En mécanique, on entend par milieux hétérogènes des systèmes aussi variés que des matériaux composites, des mélanges de fluides, des particules solides en suspension dans un fluide ou bien encore des milieux poreux constitués d'une phase liquide et d'une phase solide. La théorie de l'homogénéisation s'inscrit donc dans un spectre très large de disciplines et d'applications. L'objet de l'homogénéisation consiste à rechercher un milieu homogène fictif qui reproduise le comportement du milieu hétérogène réel pour le phénomène considéré. On parle souvent de milieu ou bien de modèle équivalent ou homogénéisé. Il faut garder à l'esprit que, comme le suggère la définition ci-dessus de l'homogénéisation, c'est le système "milieu-phénomène" qui est à homogénéiser. Par définition, sa description macroscopique équivalente doit lui être intrinsèque, c'est-à-dire qu'elle est indépendante des conditions aux limites macroscopiques.

Les différentes méthodes se distinguent du fait des différences dans les objectifs à atteindre et de la nature des systèmes considérés (et des phénomènes impliqués). On oppose souvent approches déterministes et approches statistiques ou aléatoires ou encore méthodes pour structures périodiques et méthodes pour structures aléatoires, alors que ces différentes approches sont complémentaires et répondent chacune à un aspect spécifique d'un problème considéré. Elles sont en outre nécessairement basées sur les mêmes hypothèses fondamentales, celles liées à la possibilité de décrire un phénomène donné dans un milieu hétérogène donné par une description macroscopique équivalente. En d'autres termes, elles sont liées par les conditions fondamentales d'homogénéisabilité.

2.1.3 Homogénéisabilité

Par homogénéisabilité, on entend possibilité de décrire un milieu donné soumis à une sollicitation donnée par une description macroscopique continue équivalente. Cela signifie que le sens du terme va bien au-delà de ce qu'il suggère d'un point de vue purement sémantique, à savoir "possibilité d'appliquer l'homogénéisation". En effet, lorsqu'un système n'est pas homogénéisable, il est impossible de le décrire par une description macroscopique continue qui lui soit intrinsèque. Les trois concepts fondamentaux liés à l'homogénéisabilité sont la séparation des échelles, l'invariance locale et l'existence d'un volume élémentaire représentatif. Ces trois concepts sont liés et tout comme l'homogénéisabilité, concernent à la fois le milieu et à la sollicitation, c'est-à-dire le système.

On ne peut espérer une description “homogénéisée” où les effets des hétérogénéités sont lissés que si le phénomène présente une dimension caractéristique L, beaucoup plus grande que celle des hétérogénéités l. Ainsi, la recherche d'un comportement homogénéisé n'a de sens que si la condition fondamentale de séparation des échelles est vérifiée, laquelle comprend deux conditions :

1. l'existence d'une longueur caractéristique microscopique l ;
2. la longueur caractéristique macroscopique L associée à l'évolution du phénomène doit être telle que $L \gg l$.

La séparation des échelles implique que les propriétés du matériau et les champs décrivant l'évolution du phénomène vérifient une propriété d'invariance locale : ils sont invariant par translation de l'ordre l.

L'existence simultanée d'une longueur caractéristique l et la propriété d'invariance locale entraînent l'existence d'un volume élémentaire représentatif (VER). La taille de ce dernier doit être très petite devant la longueur caractéristique d'évolution du phénomène pour que le système soit homogénéisable.

En définitive, vis à vis du phénomène étudié, l'homogénéisabilité requiert l'existence d'un volume élémentaire représentatif qui soit de petite taille par rapport à l'échelle d'évolution du phénomène. L'homogénéisabilité n'est pas une propriété intrinsèque ni du matériau ni du phénomène, mais dépend du couple matériau-phénomène. Dans le cas des matériaux à structure périodique, la définition du VER est sans ambiguïté puisqu'il s'agit de la période.

2.1.4 Microstructure aléatoire ou périodique

Quelle que soit l'organisation à l'échelle locale (aléatoire ou périodique), lorsque la séparation d'échelle est très nette, le comportement du VER sous sollicitation homogène est de même nature et par conséquent le comportement macroscopique est du même type. Ceci ne signifie pas que les comportements sont quantitativement identiques pour les différents milieux, mais que la structure des équations qui gouvernent la physique du phénomène est identique.

Par contre, plus la taille macroscopique se rapproche de la taille microscopique, plus le phénomène est sensible aux fluctuations locales et par conséquent à l'organisation de la microstructure. Dans le domaine du non-homogénéisable, les descriptions divergent puisque l'organisation de la microstructure joue alors un rôle essentiel.

2.1.5 Sur quelques méthodes d'homogénéisation

2.1.5.1 Modélisation statistique

La modélisation statistique (Kröner, 1986) s'adresse essentiellement à l'étude en statique des composites élastiques et fournit des informations sur les coefficients effectifs. L'hypothèse de séparation des échelles est sous-jacente. Le milieu étant supposé de dimension infinie, la séparation des échelles est donc parfaite ($\varepsilon = 0$). D'autre part, la méthode suppose un pré-requis sur la structure de la loi macroscopique et suppose que les moyennes d'ensemble sont identifiables aux moyennes de volume correspondantes (hypothèse d'ergodicité). La méthode permet d'obtenir des bornes inférieures et supérieures pour les coefficients effectifs. Ces derniers sont définis à partir de fonctions de corrélation microscopiques. Ces concepts ont été adaptés aux écoulements en milieux poreux par Matheron (1967) et Gehlar (1987).

2.1.5.2 Méthode auto-cohérente

Un état de désordre parfait est supposé dans les modèles auto-cohérents (Zaoui, 1987). Il s'agit du cas idéal où il n'existe aucune corrélation spatiale. L'hypothèse de séparation des échelles idéale ($\varepsilon = 0$) est sous entendue. L'idée originale du schéma auto-cohérent consiste à imaginer que chaque inclusion voit le reste du milieu comme un milieu homogène (Hershey, 1954), (Kröner, 1972a), (Eshelby, 1957). En fait, on obtient le modèle auto-cohérent en considérant un désordre parfait dans le contexte de la modélisation statistique (Kröner, 1972b).

2.1.5.3 Méthodes de moyenne

Les méthodes de moyenne sont basées sur le principe de changement d'échelle par convolution spatiale. Le principe consiste à substituer des quantités régulières aux quantités discontinues ou variant très rapidement. Adaptés aux écoulements et transferts en milieux poreux, ces concepts ont conduit à la méthode de prise de moyenne volumique (Whitaker, 1999).

Développée par (Slaterry, 1967), (Whitaker, 1967) ou (Marle, 1967), cette méthode a initialement été appliquée au passage de l'échelle du pore à celle de Darcy dans le cas d'écoulements monophasiques (Whitaker, 1986), ou de transport de soluté (Eidsath et al., 1983). Son utilisation a par la suite été étendue à des problèmes de plus en plus complexes tant réactifs (*e.g.* (Ahmadi et al., 1998), (Goyeau et al., 1999), (Quintard and Whitaker, 1999), (Cherblanc et al., 2003)), que multiphasiques (*e.g.* (Quintard, 1988), (Ahmadi and Quintard, 1996), (Lasseux et al., 1996)).

2.1.5.4 Méthode d'homogénéisation des structures périodiques

La méthode d'homogénéisation des structures périodiques ou encore méthode des développements asymptotiques à échelles multiples fut implicitement introduite par Sanchez-Palencia (1974), puis parallèlement présentée et développée par Keller (1977), Bensoussan et al. (1978) et Sanchez-Palencia (1980). Il s'agit d'une méthode très performante lorsque l'objectif est la détermination de comportements macroscopiques. L'hypothèse de périodicité, qui peut paraître très restrictive, permet de déterminer la description macroscopique sans aucun postulat sur sa forme. Il s'agit de la méthode utilisée dans ce mémoire.

2.2 Méthode d'homogénéisation des développements asymptotiques à échelles multiples

2.2.1 Traduction mathématique des concepts de base

2.2.1.1 Séparation des échelles

Le petit paramètre ε L'hypothèse de séparation des échelles conduit à considérer le petit paramètre

$$\varepsilon = \frac{l}{L} \ll 1,$$

où l et L sont respectivement la taille microscopique et la taille macroscopique. La méthode est une approche asymptotique basée sur le petit paramètre ε.

Deux variables d'espace La séparation des échelles conduit à introduire deux variables d'espace. Soit $\vec{X}$ la variable d'espace dimensionnelle du système. On définit les deux variables d'espace adimensionnelles suivantes :

$$\begin{cases} \vec{y} = \dfrac{\vec{X}}{l} : & \text{la variable microscopique ;} \\ \vec{x} = \dfrac{\vec{X}}{L} : & \text{la variable macroscopique.} \end{cases}$$

Ainsi, toute quantité Ψ sera recherchée sous forme de fonction de ces deux variables. Comme

$$\vec{x} = \varepsilon \vec{y},$$

deux écritures pour Ψ sont possibles, selon que l'on adopte

— le point de vue microscopique, où l est la longueur de référence, $\vec{y}$ la variable directrice et $\vec{x}$ la variable annexe : $\Psi = \Psi(\vec{y}, \vec{x})$, $\vec{x} = \varepsilon \vec{y}$;

— le point de vue macroscopique, où L est la longueur de référence, $\vec{x}$ la variable directrice et $\vec{y}$ la variable annexe : $\Psi = \Psi(\vec{x}, \vec{y}$, $\vec{y} = \varepsilon^{-1} \vec{x}$.

Ces deux écritures sont équivalentes et on choisit la plus commode selon le problème à traiter.

2.2.1.2 Périodicité

L'hypothèse de périodicité du milieu assure une invariance spatiale pour la microstructure et les quantités caractérisant le phénomène. Le matériau considéré étant Ω-périodique, les fonctions $\Psi(\vec{x}, \vec{y})$ sont Ω-périodiques selon la variable $\vec{y}$.

2.2.1.3 Développements asymptotiques

L'utilisation des deux variables $\vec{x}$ et $\vec{y}$ modifie la dérivation usuelle :

$$\frac{\partial}{\partial X_i} = \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial y_i} + \varepsilon \dfrac{\partial}{\partial x_i} & \text{pour le point de vue microscopique,} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_i} + \varepsilon^{-1} \dfrac{\partial}{\partial x_i} & \text{pour le point de vue macroscopique.} \end{cases}$$

Ceci introduit des puissances de ε dans les équations de bilan qui décrivent la physique à l'échelle locale.

Comme $\varepsilon \ll 1$, ses puissances correspondent à des ordres de grandeur différents. Ainsi, pour classer ces ordres de grandeur différents, toute quantité $\Psi(\vec{x}, \vec{y})$ est recherchée sous forme de développements asymptotiques en puissance de ε :

$$\Psi(\vec{x}, \vec{y}) = \Sigma\, \varepsilon^i\, \Psi^{(i)}(\vec{x}, \vec{y}),$$

où les fonctions $\Psi^{(i)}$ sont Ω-périodiques. De plus, toutes les fonctions $\Psi^{(i)}$ sont du même ordre de grandeur. Plus précisément, on a :

$$\varepsilon \ll \frac{|\,\Psi^{(i)}\,|}{|\,\Psi^{(0)}\,|} \ll \varepsilon^{-1},$$

ce que l'on note

$$\frac{|\,\Psi^{(i)}\,|}{|\,\Psi^{(0)}\,|} = \mathscr{O}(\varepsilon^0).$$

2.2.2 Processus d'homogénéisation

2.2.2.1 Normalisation de la description locale

La description à l'échelle macroscopique ne sera valable que si la physique est correctement décrite à l'échelle locale, c'est-à-dire sur la cellule périodique. L'analyse physique du problème est donc une étape essentielle. Cette analyse conduit à mettre le problème sous forme adimensionnelle et, pour que l'importance relative de chaque terme soit correctement prise en compte, tous les paramètres adimensionnels doivent être évalués par rapport aux puissances de ε (Auriault, 1991). Un nombre adimensionnel $\mathbb{Q}$ est de l'ordre de ε^p si :

$$\varepsilon^{p+1} \ll \mathbb{Q} \ll \varepsilon^{p-1}.$$

Cette étape de normalisation est un point clef du processus car c'est là que la physique du phénomène est prise en compte.

2.2.2.2 Macroscopisation

On introduit les développements asymptotiques dans les équations normalisées et exprimées dans le système à double variables. Chaque équation de la description locale s'écrit alors sous la forme :

$$\Sigma\, \varepsilon^i A^{(i)}(\vec{x},\vec{y}) = 0,$$

où tous les termes $A^{(i)}$ sont par construction $\mathscr{O}(1)$. De ce fait, comme $\varepsilon \ll 1$, cette égalité ne peut être satisfaite que si chaque terme d'ordre ε^i est nul. On a donc découplage entre les différents ordres, ce qui conduit à la série d'équations

$$A^{(i)} = 0.$$

On résout alors les problèmes successifs posés sur la cellule, en commençant par les ordres de grandeur les plus élevés et en progressant selon les puissances croissantes de ε.

La dernière étape consiste à établir les équations de bilan. Ces équations proviennent des bilans à l'échelle microscopique qui se mettent tous sous la forme suivante :

$$\text{A l'ordre } i : \quad \vec{\nabla}_y \cdot \Psi^{(i+1)} + \vec{\nabla}_x \cdot \Psi^{(i)} = 0 \qquad \Psi^{(i+1)} \text{ est } \Omega \text{ périodique en } \vec{y}$$

La fonction $\Psi^{(i)}$, qui est soit vectorielle soit tensorielle, a été déterminée lors de la résolution des problèmes locaux aux ordres inférieurs. Dans l'équation bilan ci-dessus, $\Psi^{(i)}$ est ainsi un terme source. Or, la solution $\Psi^{(i+1)}$ de ce problème local devant être périodique, le champ source ne peut pas être quelconque. Il doit vérifier une condition nécessaire dite condition de compatibilité qui est que la moyenne du champ source sur la période doit être nulle. L'intégration de ce bilan sur Ω donne :

$$\int_\Omega \vec{\nabla}_y \cdot \Psi^{(i+1)}\, d\Omega + \int_\Omega \vec{\nabla}_x \cdot \Psi^{(i)}\, d\Omega = 0.$$

Par le théorème de la divergence, elle devient :

$$\int_{\delta\Omega} \Psi^{(i+1)} \cdot \vec{n}\, dS + \int_{\Omega} \vec{\nabla}_x \cdot \Psi^{(i)}\, d\Omega = 0.$$

Or, la périodicité de $\Psi^{(i+1)}$ impose :

$$\int_{\delta\Omega} \Psi^{(i+1)} \cdot \vec{n}\, dS = 0.$$

On a donc finalement :

$$\int_{\Omega} \vec{\nabla}_x \cdot \Psi^{(i)}\, d\Omega = 0,$$

ce qui s'écrit :

$$\vec{\nabla}_x \cdot < \Psi^{(i)} >_{\Omega} = 0 \qquad \text{où} \qquad < \cdot >_{\Omega} = \frac{1}{\mid \Omega \mid} \int_{\Omega} \cdot\, d\Omega.$$

Cette équation traduit le bilan sur la période et correspond à l'équation de bilan macroscopique à l'ordre i.

2.2.2.3 Précision de la description macroscopique

Du point de vue mathématique, ε est considéré comme infiniment petit ce qui permet de découpler et résoudre séparément les problèmes aux différents ordres. Comme ε tend vers zéro, la description macroscopique est une description limite, infiniment précise, correspondant à des hétérogénéités infiniment petites vis à vis de la taille macroscopique, ou inversement à des dimensions macroscopiques infiniment grandes par rapport aux hétérogénéités.

Du point de vue physique, les choses sont différentes puisque les tailles microscopique et macroscopique étant finies, ε est nécessairement une quantité finie. Par conséquent, lorsqu'on ne considère que les premiers termes significatifs (ce qui est le cas usuel), la description homogénéisée n'est valable qu'à ε près. ε est donc aussi la précision de la description macroscopique.

3

Phénomènes diffusifs en milieux composites

3.1 Conduction thermique en milieu composite : influence du contraste de conductivités

L'homogénéisation de la conduction thermique dans un milieu composite à deux constituants conduit à quatre modèles macroscopiques instationnaires selon l'ordre de grandeur du contraste de conductivités. Les domaines de validité de ces modèles peuvent se traduire en termes d'ordre de grandeur d'un rapport de temps caractéristiques (Royer and Boutin, 2012). Un des quatre modèles présente des effets de mémoire dûs au fort contraste de conductivité : il s'agit du modèle à double conductivité (Auriault, 1983). Il ne coïncide pas avec le modèle phénoménologique à deux champs couramment employée dans la littérature. La comparaison entre ces deux modèles permet de proposer une correction du modèle phénoménologique (Auriault and Royer, 1993). Ces résultats s'étendent à tout autre phénomène diffusif en systèmes à deux phases et constituent un cadre d'analyse pour l'étude par homogénéisation des milieux à double porosité présentée au Chapitre 4.

3.1.1 Mécanismes physiques et hypothèses

Considérons un milieu composite bi-constituant (FIG. 3.1) où le contact entre les constituants est supposé parfait. Sur la période Ω, l'évolution de la température est décrite par le système suivant :

$$\begin{cases} \rho_{\mathrm{k}} c_{\mathrm{k}} \dfrac{\partial T_{\mathrm{k}}}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot (\bar{\bar{\lambda}}_{\mathrm{k}} \vec{\nabla} T_{\mathrm{k}}) = 0 \quad \text{dans } \Omega_{\mathrm{k}} \ (k = 1,2), & (3.1) \\ (\bar{\bar{\lambda}}_1 \vec{\nabla} T_1) \cdot \vec{n} = (\bar{\bar{\lambda}}_2 \vec{\nabla} T_2) \cdot \vec{n} \quad \text{sur } \Gamma, & (3.2) \\ T_1 = T_2 \quad \text{sur } \Gamma, & (3.3) \end{cases}$$

où $\vec{n}$ désigne un vecteur normal unitaire de Γ. Le constituant 1 est connexe et est plus conducteur que le constituant 2 :

$$\mathbb{R}_\lambda = \frac{\lambda_{2_{\mathrm{c}}}}{\lambda_{1_{\mathrm{c}}}} = \mathscr{O}(\varepsilon^p), p \geq 0. \tag{3.4}$$

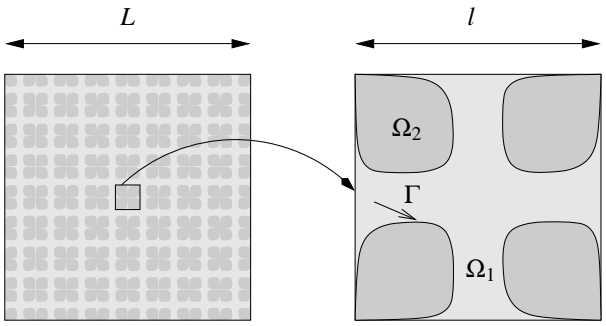

FIGURE 3.1 – *Milieu composite : (a) Echantillon macroscopique ; (b) Cellule périodique*

Les capacités thermiques $\rho_k c_k$ $(k = 1,2)$ sont constantes et du même ordre de grandeur. On définit les moyennes suivantes

$$< \cdot >_\Omega = < \cdot >_\Omega^{\Omega_1} + < \cdot >_\Omega^{\Omega_2}, \qquad < \cdot >_\Omega^{\Omega_\gamma} = \frac{1}{\mid \Omega \mid} \int_{\Omega_\gamma} \cdot \, d\Omega, \quad (\gamma = 1,2),$$

et on désigne par n_1 et n_2 les fractions volumiques des deux constituants :

$$n_\gamma = \frac{\mid \Omega_\gamma \mid}{\mid \Omega \mid} \quad (\gamma = 1,2).$$

3.1.2 Modèles macroscopiques

L'homogénéisation de la description locale conduit à quatre modèles macroscopiques instationnaires (TAB. 3.1), selon l'ordre de grandeur de $\mathbb{R}_\lambda$ (FIG. 3.2) : trois modèles à un champ et un modèle à deux champs couplés. Trois catégories de modèles sont à distinguer (TAB. 3.2). Les deux modèles de stockage I.a et I.b se distinguent par leur conductivité effective. La conductivité effective globale $\bar{\bar{\lambda}}_T^{\text{eff}}$ dans le modèle I.a dépend des deux conductivités locales, alors que la conductivité effective partielle $\bar{\bar{\lambda}}_1^{\text{eff}}$ ne dépend que de la conductivité locale du milieu le plus conducteur. Le modèle à double conductivité est un modèle à deux champs de température couplés : $T_1 \neq T_2$ et $T_2 = \mathscr{F}(T_1)$, où $\mathscr{F}$ est une fonctionnelle présentant des effets de mémoire (*Cf.* §3.1.4). Le modèle à simple conductivité est le modèle qu'on obtiendrait si le constituant 2 était isolant.

Le développement du modèle I.a est traité dans les ouvrages de référence sur la méthode (Bensoussan et al., 1978), (Sanchez-Palencia, 1980) et le modèle II est issu de (Auriault, 1983). Les deux autres modèles se déduisent facilement des études citées ci-dessus.

Il existe des passages continus entre ces quatre modèles (FIG. 3.2). En effet, à partir du modèle II, on obtient le modèle I.b en prenant $T_1 = T_2$ et le modèle III si $T_2 = 0$. Quant au modèle I.a, il converge vers le modèle I.b si $\bar{\bar{\lambda}}_2 = \bar{\bar{0}}$.

• Modèle de stockage à conductivité effective globale (I.a) : $\mathbb{R}_\lambda = \mathscr{O}(\varepsilon^0)$

$$C_{\mathrm{T}}^{\mathrm{eff}} \frac{\partial T}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot (\bar{\bar{\lambda}}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{eff}} \vec{\nabla} T) = 0$$

• Modèle de stockage à conductivité effective partielle (I.b) : $\mathbb{R}_\lambda = \mathscr{O}(\varepsilon)$

$$C_{\mathrm{T}}^{\mathrm{eff}} \frac{\partial T}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot (\bar{\bar{\lambda}}_{1}^{\mathrm{eff}} \vec{\nabla} T) = 0$$

• Modèle à double conductivité (II) : $\mathbb{R}_\lambda = \mathscr{O}(\varepsilon^2)$

$$C_{1}^{\mathrm{eff}} \frac{\partial T_1}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot (\bar{\bar{\lambda}}_{1}^{\mathrm{eff}} \vec{\nabla} T_1) = - < \rho_2 c_2 \frac{\partial T_2}{\partial t} >_{\Omega}^{\Omega_2}$$

• Modèle à simple conductivité (III) : $\mathbb{R}_\lambda \leq \mathscr{O}(\varepsilon^3)$

$$C_{1}^{\mathrm{eff}} \frac{\partial T_1}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot (\bar{\bar{\lambda}}_{1}^{\mathrm{eff}} \vec{\nabla} T_1) = 0$$

$$C_{\mathrm{T}}^{\mathrm{eff}} = < \rho c >_{\Omega} = n_1 \rho_1 + n_2 \rho_2 c_2$$

$$C_{1}^{\mathrm{eff}} = < \rho_1 c_1 >_{\Omega}^{\Omega_1} = n_1 \rho_1 c_1$$

$$\bar{\bar{\lambda}}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{eff}} = \bar{\bar{\lambda}}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{eff}} (\bar{\bar{\lambda}}_1, \bar{\bar{\lambda}}_2)$$

$$\bar{\bar{\lambda}}_{1}^{\mathrm{eff}} = \bar{\bar{\lambda}}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{eff}} (\bar{\bar{\lambda}}_1, 0)$$

Tableau 3.1 – *Conduction thermique en milieu à double conductivité : modèles macroscopiques.*

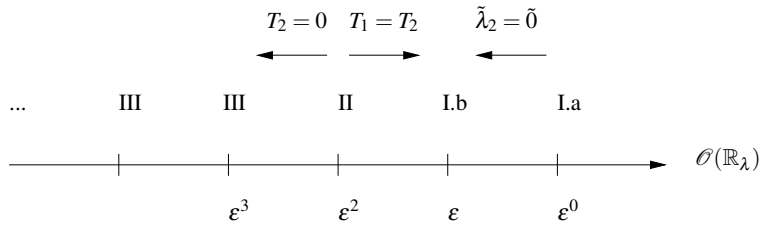

FIGURE 3.2 – *Modèles en milieux à double conductivité : domaines de validité en fonction de l'ordre de grandeur de $\mathbb{R}_\lambda$ et passages continus entre modèles.*

3.1.3 Interprétation des domaines de validité

L'analyse de ces passages continus entre modèles permet d'exprimer les domaines de validité en termes d'ordres de grandeur du rapport de deux temps caractéristiques (Royer and Boutin, 2012). Considérons, d'une part, le temps caractéristique local de conduction dans le constituant le moins conducteur

$$t_{2_l} = \frac{l^2 \rho_{2_{\mathrm{c}}} c_{2_{\mathrm{c}}}}{\lambda_{2_{\mathrm{c}}}},$$

Modèle de stockage

Il s'agit d'un modèle à un champ prenant en compte la totalité du volume du milieu, ce qui le distingue du modèle à simple conductivité. La capacité thermique effective est donc la capacité thermique globale $C_{\mathrm{T}}^{\mathrm{eff}}$ et le champ de température est $T = T_1 = T_2$. Le milieu le plus faiblement conducteur joue le rôle de réservoir de stockage de chaleur d'où l'appellation du modèle. Deux modèles réservoir sont à distinguer suivant que la conductivité effective est la conductivité partielle ou globale.

Modèle à double conductivité

Il s'agit d'un modèle à deux champs de température macroscopiques couplés : $T_1 \neq T_2$ et $T_2 = \mathscr{F}(T_1)$.

Modèle à simple conductivité

Il s'agit d'un modèle à un champ ignorant totalement le constituant le plus faiblement conducteur. Il s'agit du modèle que l'on obtiendrait dans le cas où ce dernier serait totalement isolant. Le champ de température macroscopique est donc T_1 et il s'agit d'un modèle à conductivité et à capacité thermiques effectives partielles : $\bar{\bar{\lambda}}_1^{\mathrm{eff}}$, C_1^{eff}.

Tableau 3.2 – *Conduction thermique en milieu à double conductivité : les trois catégories de modèles.*

et, d'autre part, le temps caractéristique macroscopique du phénomène qui n'est autre que le temps caractéristiques du milieu le plus conducteur

$$t_{1_L} = \frac{L^2 \rho_{1_{\mathrm{c}}} c_{1_{\mathrm{c}}}}{\lambda_{1_{\mathrm{c}}}}.$$

L'ordre de grandeur du rapport de ces deux temps caractéristiques vérifie :

$$\frac{t_{2_l}}{t_{1_{\mathrm{L}}}} = \mathscr{O}(\varepsilon^2 \mathbb{R}_\lambda^{-1}). \tag{3.5}$$

Chaque catégorie de modèle est associée à un ordre de grandeur de ce rapport de temps caractéristiques :

$$\begin{cases} \text{Modèles de stockage (I) : } t_{2_l} \ll t_{1_{\mathrm{L}}}; \\ \text{Modèle à double conductivité (II) : } t_{2_l} \approx t_{1_{\mathrm{L}}}; \\ \text{Modèle à simple conductivité (III) : } t_{2_l} \gg t_{1_{\mathrm{L}}}. \end{cases} \tag{3.6}$$

Quant à la conductivité effective, elle est directement associée à l'ordre de grandeur de $\mathbb{R}_\lambda$:

$$\begin{cases} \text{Conductivité effective globale } \bar{\bar{\lambda}}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{eff}} \text{ si } \lambda_{1_c} \approx \lambda_{2_c}, \\ \text{Conductivité effective partielle } \bar{\bar{\lambda}}_1^{\mathrm{eff}} \text{ si } \lambda_{1_c} \ll \lambda_{2_c}, \end{cases}$$

ce qui, en particulier, permet de distinguer les deux modèles de stockage.

S'appuyant sur la relation (Eq. (3.5)), on peut représenter les domaines de validité sur un diagramme $\log_\varepsilon(t_{2_l}/t_{1_\mathrm{L}})$ *vs.* $\log_\varepsilon(\mathbb{R}_\lambda)$ (FIG. 3.3). Il montre comment les domaines de validité initialement exprimés en ordres de grandeur de $\mathbb{R}_\lambda$ se traduisent en ordres de grandeur du rapport de temps caractéristiques. Il met aussi en évidence la correspondance entre les ordres de grandeur des conductivités locales et la conductivité effective.

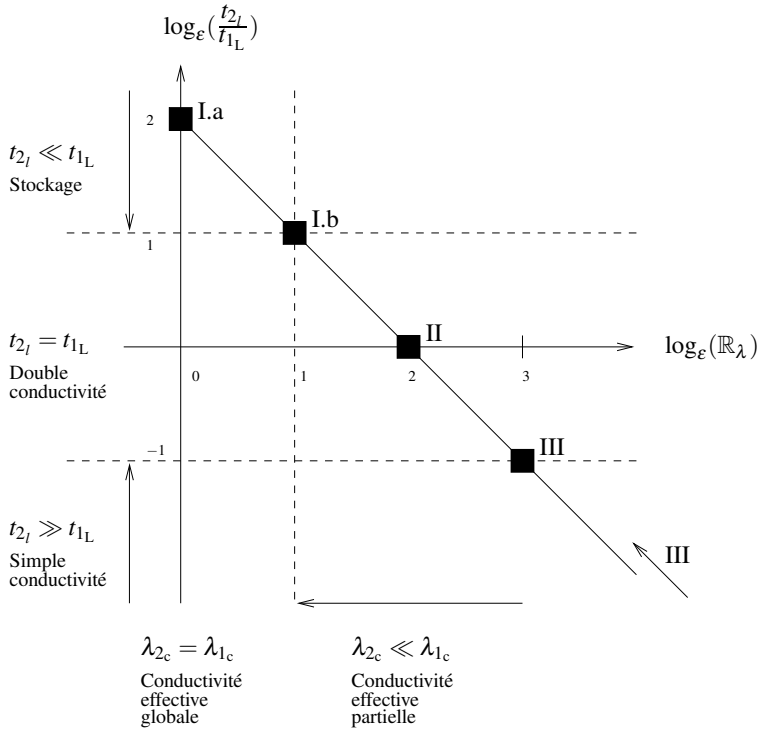

FIGURE 3.3 – *Domaines de validité des modèles en fonction de* $\log_\varepsilon(t_{2_l}/t_{1_\mathrm{L}})$ *et* $\log_\varepsilon(\mathbb{R}_\lambda)$.

Ces résultats mettent en évidence l'influence du régime de transfert dans le constituant le moins conducteur sur le comportement macroscopique. Lorsque $t_{2_l} \ll t_{1_L}$, au temps d'observation t_{1_L} un régime permanent a déjà été atteint localement dans le constituant 2. Ceci conduit aux modèles de stockage : il n'y a pas de couplages, mais l'influence du constituant 2 apparaît dans le terme de capacité effective. Lorsque $t_{2_l} \approx t_{1_L}$, le transfert au sein du constituant 2 et le transfert macroscopique ont lieu simultanément, ce qui conduit à des effets de couplage en temps. Enfin, quand $t_{2_l} \gg t_{1_L}$, au temps d'observation t_{1_L} le transfert de chaleur au sein du constituant 2 n'a pas encore démarré. Ce dernier apparaît donc comme un constituant isolant.

3.1.4 Modèle homogénéisé à double conductivité

L'écriture complète du modèle à double conductivité est la suivante :

$$C_{\Omega_1}^{\text{eff}} \frac{\partial T_1}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot (\tilde{\lambda}_1^{\text{eff}} \vec{\nabla} T_1) = - < \rho_2 c_2 \frac{\partial T_2}{\partial t} >_{\Omega}^{\Omega_2}, \tag{3.7}$$

où T_2 vérifie le problème aux limites :

$$\begin{cases} \rho_2 c_2 \dfrac{\partial T_2}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot (\bar{\bar{\lambda}}_2 \vec{\nabla} T_2) = 0 & \text{dans } \Omega_2, \\ T_2 = T_1 & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

On montre que les deux champs de température sont liés par la relation :

$$T_2 = T_1 - h * \frac{\partial T_1}{\partial t} = T_1 - \int_{-\infty}^{t} h(t-\tau) \frac{\partial T_1}{\partial \tau} \, d\tau, \tag{3.8}$$

où

$$h = \mathscr{F}^{-1} \left(\frac{T_1 - T_2}{i\omega T_1} \right) \quad (\mathscr{F}^{-1} : \text{transformée inverse de Fourier }).$$

Le modèle (Eq. (3.7)) peut ainsi s'écrire sous la forme :

$$C_{\Omega}^{\text{eff}} \frac{\partial T_1}{\partial t} - \vec{\nabla}_x \cdot (\bar{\bar{\lambda}}_1^{\text{eff}} \vec{\nabla}_x T_1) = \int_{-\infty}^{t} K(t-\tau) \frac{\partial^2 T_1}{\partial \tau} \, d\tau, \tag{3.9}$$

où $K = < \rho_2 c_2 h(t) >_{\Omega}^{\Omega_2}$.

Les produits de convolution dans les équations (Eqs. (3.8)), (3.9)) caractérisent la présence d'effets de mémoire. Les aspects numériques liés à la fonction mémoire K sont traités dans (Dureisseix et al., 2015). Il y est en particulier montré que la fonction mémoire peut être obtenue numériquement comme pour tout paramètre effectif, à partir de simulations sur la cellule périodique.

3.1.5 Comparaison avec un modèle phénoménologique à deux équations

Les modèles phénoménologiques de milieux à double conductivité sont des modèles à deux équations contenant un terme de flux entre les deux constituants (Pecker and Deresiewicz, 1973), (Aifantis and Beskos, 1980) :

$$n_1 \rho_1 c_1 \frac{\partial T_1}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot (\bar{\bar{\lambda}}_1^{\text{eff}} \vec{\nabla} T_1) = \alpha (T_1 - T_2), \tag{3.10}$$

$$n_2 \rho_2 c_2 \frac{\partial T_2}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot (\bar{\bar{\lambda}}_2^{\text{eff}} \vec{\nabla} T_2) = -\alpha (T_1 - T_2). \tag{3.11}$$

Le terme

$$\Psi = \alpha (T_1 - T_2), \tag{3.12}$$

où α est une constante négative, caractérise les échanges de chaleur entre les deux composants.

Une simplification de ce modèle consiste à négliger le terme de conduction dans le milieu le plus faiblement conducteur :

$$n_1\rho_1 c_1 \frac{\partial T_1}{\partial t} - \vec{\nabla}\cdot(\bar{\bar{\lambda}}_1^{\text{eff}}\vec{\nabla}T_1) = \alpha(T_1 - T_2) \tag{3.13}$$

$$n_2\rho_2 c_2 \frac{\partial T_2}{\partial t} = -\alpha(T_1 - T_2) \tag{3.14}$$

La comparaison entre le modèle homogénéisé à double conductivité et le modèle phénoménologique (Eqs. (3.13)-(3.14)) montre que ce dernier ne permet pas de reproduire le comportement aux temps courts. La correction suivante du terme d'échange

$$\Psi = \alpha(T_1 + \beta\frac{\partial T_1}{\partial t} - T_2), \tag{3.15}$$

permet d'améliorer la description aux temps courts (Auriault and Royer, 1993).

3.2 Milieu composite avec résistance de contact

3.2.1 Cas linéaire : conduction thermique en milieu composite avec résistance de contact

Une résistance de contact à l'interface de deux constituants d'un milieu composite est une fine couche de faible conductivité constituant une barrière au transfert de chaleur. Cinq modèles instationnaires sont obtenus par homogénéisation selon l'ordre de grandeur du nombre de Biot (Auriault and Ene, 1994). Ces domaines de validité se traduisent en termes d'ordres de grandeur de temps caractéristiques, comme dans le cas du milieu à double conductivité. Ces modèles sont mathématiquement identiques à ceux obtenus dans le cas de l'écoulement d'un fluide faiblement compressible en milieu poreux composite avec une barrière d'interface à l'écoulement. Dans le cas d'un fluide fortement compressible et barotrope, le problème devient non-linéaire. L'homogénéisation conduit à cinq modèles non-linéaires, dont les propriétés effectives sont identiques à celles obtenues dans le problème linéaire (Royer and Auriault, 1999).

3.2.1.1 Description locale et hypothèses

Considérons maintenant que le contact entre les deux constituants du composite périodique schématisé sur la figure (FIG.3.1) n'est pas parfait. Ceci entraîne une résistance de contact à l'interface, caractérisée par l'existence d'une fine couche de faible conductivité à l'interface entre les deux constituants. La conduction thermique sur la période s'écrit alors :

$$\begin{cases} \rho_k c_k \dfrac{\partial T_k}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\bar{\bar{\lambda}}_{\mathrm{k}}\vec{\nabla}T_k) = 0 \quad \text{dans } \Omega_k \ (k=1,2), & (3.16)\\ (\bar{\bar{\lambda}}_1\vec{\nabla}T_1)\cdot\vec{n} = (\bar{\bar{\lambda}}_2\vec{\nabla}T_2)\cdot\vec{n} \quad \text{sur } \Gamma, & (3.17)\\ -(\bar{\bar{\lambda}}_1\vec{\nabla}T_1)\cdot\vec{n}_1 = h(T_1 - T_2) \quad \text{sur } \Gamma. & (3.18)\end{cases}$$

Le scalaire $h > 0$ est la conductivité de contact. On suppose ici que les capacités thermiques et les conductivités sont du même ordre de grandeur :

$$\mathbb{R}_{\rho c} = \frac{\rho_1 c_1}{\rho_2 c_2} = \mathscr{O}(1), \qquad \mathbb{R}_\lambda = \frac{\lambda_{1_{\mathrm{c}}}}{\lambda_{2_{\mathrm{c}}}} = \mathscr{O}(1).$$

• **Modèles à un champ**

Modèle à conductivité effective globale (I.a)

$$C_{\Omega}^{\text{eff}} \frac{\partial T}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot (\bar{\bar{\lambda}}_{\text{T}}^{\text{eff}} \vec{\nabla} T) = 0$$

Modèle à conductivité effective modifiée (I.b)

$$C_{\Omega}^{\text{eff}} \frac{\partial T}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot (\bar{\bar{\lambda}}_{\text{h}}^{\text{eff}} \vec{\nabla} T) = 0$$

Modèle à conductivité effective séparée (I.c)

$$C_{\Omega}^{\text{eff}} \frac{\partial T}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot ((\bar{\bar{\lambda}}_{1}^{\text{eff}} + \tilde{\lambda}_{2}^{\text{eff}}) \vec{\nabla} T) = 0$$

• **Modèles à deux champs**

Modèle couplé (II.a)

$$C_{\Omega_1}^{\text{eff}} \frac{\partial T_1}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot (\bar{\bar{\lambda}}_{1}^{\text{eff}} \vec{\nabla} T_1) = -H(T_1 - T_2)$$

$$C_{\Omega_2}^{\text{eff}} \frac{\partial T_2}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot (\bar{\bar{\lambda}}_{2}^{\text{eff}} \vec{\nabla} T_1) = H(T_1 - T_2)$$

Modèle découplé (II.b)

$$C_{\Omega_1}^{\text{eff}} \frac{\partial T_1}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot (\bar{\bar{\lambda}}_{1}^{\text{eff}} \vec{\nabla} T_1) = 0$$

$$C_{\Omega_2}^{\text{eff}} \frac{\partial T_2}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot (\bar{\bar{\lambda}}_{2}^{\text{eff}} \vec{\nabla} T_1) = 0$$

Tableau 3.3 – *Modèles macroscopiques pour la conduction thermique en milieu composite avec résistance de contact.*

3.2.1.2 Modèles macroscopiques

L'homogénéisation de la description locale ci-dessus (Auriault and Ene, 1994) conduit à cinq modèles macroscopiques (TAB. 3.4), trois modèles à un champ et deux modèles à deux champs (TAB. 3.3), selon l'ordre de grandeur du nombre adimensionnel (FIG. 3.4)

$$\mathbb{B}_l = \frac{h_c l}{k_c} \qquad \text{(nombre de Biot).} \tag{3.19}$$

Les trois modèles à un champ (I.a, I.b. et I.c) se distinguent pas leur conductivité effective (TAB. 3.5). Dans le modèle I.a, $\bar{\bar{\lambda}}_{\text{T}}^{\text{eff}}$ est la conductivité effective en l'absence de résistance de contact ($h = \infty$). Dans le modèles I.b, la conductivité effective dépend de h et dans le modèle I.c, il s'agit de la somme des conductivités effectives des deux constituants. Le modèle II.a est un modèle à deux équations couplées faisant intervenir une conductance effective $H =< h >_{\Omega}^{\Gamma}$. Dans le modèle II.b, les transferts de chaleur dans les deux constituants sont indépendants et la résistance de contact est complètement isolante.

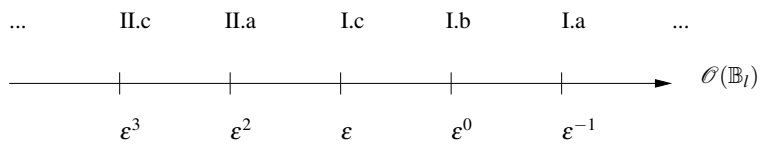

FIGURE 3.4 – *Milieu composite avec résistance de contact : domaines de validité des modèles en fonction de l'ordre de grandeur de $\mathbb{B}_l$.*

3.2.1.3 Interprétation des domaines de validité

Comme dans le cas du composite à double conductivité (*Cf.* §3.1.3), il est possible d'interpréter ces résultats en termes de temps caractéristiques. Considérons le temps caractéristique macroscopique du phénomène :

$$t_{\mathrm{L}} = \frac{L^2 \rho_{\mathrm{c}} c_{\mathrm{c}}}{\lambda_{\mathrm{c}}}.$$

Par analogie, on définit le temps caractéristique local du phénomène dans la résistance de contact :

$$t_l^h = \frac{l \rho_{\mathrm{c}} c_{\mathrm{c}}}{h_{\mathrm{c}}}.$$

L'ordre de grandeur du rapport entre ces deux temps caractéristiques est tel que :

$$\frac{t_l^h}{t_{\mathrm{L}}} = \varepsilon^2 \mathbb{B}_l^{-1}. \tag{3.20}$$

Chaque catégorie de modèle est associée à un ordre de grandeur de ce rapport de temps caractéristique :

$$\begin{cases} \text{Modèle à un champ (I) :} & t_l^h \ll t_{\mathrm{L}}, \\ \text{Modèle à deux champs (II) :} & t_l^h \geq t_{\mathrm{L}}. \end{cases}$$

Dans le cas d'un modèle à deux champs ($t_l^h \geq t_L^{\mathrm{diff}}$) on obtient :

$$\begin{cases} \text{Modèle couplé (II.a) si :} & t_l^h = t_L^{\mathrm{diff}} \\ \text{Modèle découplé (II.b) si :} & t_l^h > t_L^{\mathrm{diff}} \end{cases}$$

Dans le cas d'un modèle à un champ ($t_l^h \ll t_L^{\mathrm{diff}}$), on obtient :

$$\begin{cases} \text{Modèle à conductivité effective globale (I.a) si :} & h_c \gg \dfrac{k_c}{l} \\ \text{Modèle à conductivité effective modifiée (I.b) si :} & h_c = \mathscr{O}(\dfrac{k_c}{l}) \\ \text{Modèle à conductivité effective modifiée (I.c) si :} & h_c \ll \dfrac{k_c}{l} \ (h_c = \mathscr{O}(\dfrac{k_c}{L})) \end{cases}$$

Ces domaines de validité en termes des temps caractéristiques sont représentés sur la figure (FIG. 3.5). Ils montrent que c'est le temps de transfert dans la résistance de contact relativement au temps de transfert macroscopique qui conditionne le comportement macroscopique.

Modèles à un champ

Modèle à conductivité effective globale (I.a)

Modèle qu'on obtiendrait en l'absence de résistance de contact.

Modèle à conductivité effective modifiée (I.b)

La conductivité effective dépend de la conductance interfaciale.

Modèle à conductivité effective modifiée (I.c)

La conductivité effectivite est la somme des conductivités effectives des deux constituants et est donc indépendante de la conductance interfaciale. La conductivité effective de chaque constituant est obtenue en le considérant comme isolé.

Modèles à deux champs

Modèle couplé (II.a)

Le comportement macroscopique est à deux champs et à deux équations couplées. La résistance de contact induit un terme de couplage macroscopique avec une conductance effective.

Modèle découplé (II.a)

La résistance de contact est imperméable au premier ordre et isole les deux constituants.

Tableau 3.4 – *Caractéristiques des modèles macroscopiques.*

3.2.2 Cas non-linéaire : écoulement d'un fluide compressible en milieu poreux composite avec barrière à l'écoulement

3.2.2.1 Fluide compressible barotrope en milieu poreux

L'équation de conservation de la masse pour l'écoulement d'un fluide compressible en milieu poreux rigide s'écrit :

$$\phi \frac{\partial \rho}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot (\rho \bar{\bar{k}} \vec{\nabla} p) = 0, \tag{3.21}$$

où

$$\bar{\bar{k}} = \frac{\bar{\bar{K}}}{\mu} \tag{3.22}$$

désigne la conductivité hydraulique, $\bar{\bar{K}}$ étant la perméabilité du milieu et μ la viscosité dynamique du fluide. Pour pouvoir décrire l'écoulement, l'équation (Eq. (3.21)) doit être complétée par une équation d'état, reliant la masse volumique et la pression du fluide. En conditions isothermes, la compressibilité du fluide est définie par

$$\beta = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dp}.$$

Conductivité effective globale

La conductivité effective globale $\bar{\bar{k}}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{eff}}$ est la conductivité effective que l'on obtiendrait en l'absence de résistance de contact.

Conductivité effective modifiée

La conductivité effective modifiée $\bar{\bar{k}}_{\mathrm{h}}^{\mathrm{eff}}$ dépend de la conductance interfaciale h.

Conductivités effectives des constituants

Les conductivité effectives des deux constituants, $\bar{\bar{k}}_1^{\mathrm{eff}}$ et $\bar{\bar{k}}_2^{\mathrm{eff}}$ sont obtenues en considérant chaque constituant comme isolé.

Conductance effective

La conductance effective H est la moyenne de surface de la conductance interfaciale h.

Tableau 3.5 – *Caractéristiques des propriétés effectives.*

On considère des écoulements isothermes barotropes, caractérisés par une équation d'état du type

$$p = f(\rho). \tag{3.23}$$

Dans le cas d'un fluide légèrement compressible, c'est-à-dire d'un liquide compressible, l'équation d'état s'écrit sous la forme

$$\rho = \rho_0(1+\beta(p-p_0)) \qquad |\,\beta(p-p_0)\,| \ll 1, \tag{3.24}$$

pour signifier que les variations spatiales de la masse volumique sont négligeables par rapport à sa variation temporelle

$$\vec{V}\cdot\vec{\nabla}\rho \ll \phi\frac{\partial\rho}{\partial t}.$$

Avec ces hypothèses, l'équation de continuité (Eq. (3.21)) devient

$$\phi\beta\frac{\partial p}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\bar{\bar{k}}\vec{\nabla}p) = 0. \tag{3.25}$$

L'écoulement du fluide en milieu poreux est ainsi complètement décrit par l'équation linéaire ci-dessus décrivant l'évolution de la pression.

Dans le cas d'un fluide très compressible à équation d'état linéaire, on a :

$$\rho = A\ p, \qquad A = \frac{\rho_0}{p_0} = \rho_0\beta = \text{constante}. \tag{3.26}$$

L'évolution du champ de pression devient alors non-linéaire. Avec (Eq. (3.26)), l'équation de continuité (Eq. (3.21)) devient en effet :

$$\phi\frac{\partial p}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(p\bar{\bar{k}}\vec{\nabla}p) = 0. \tag{3.27}$$

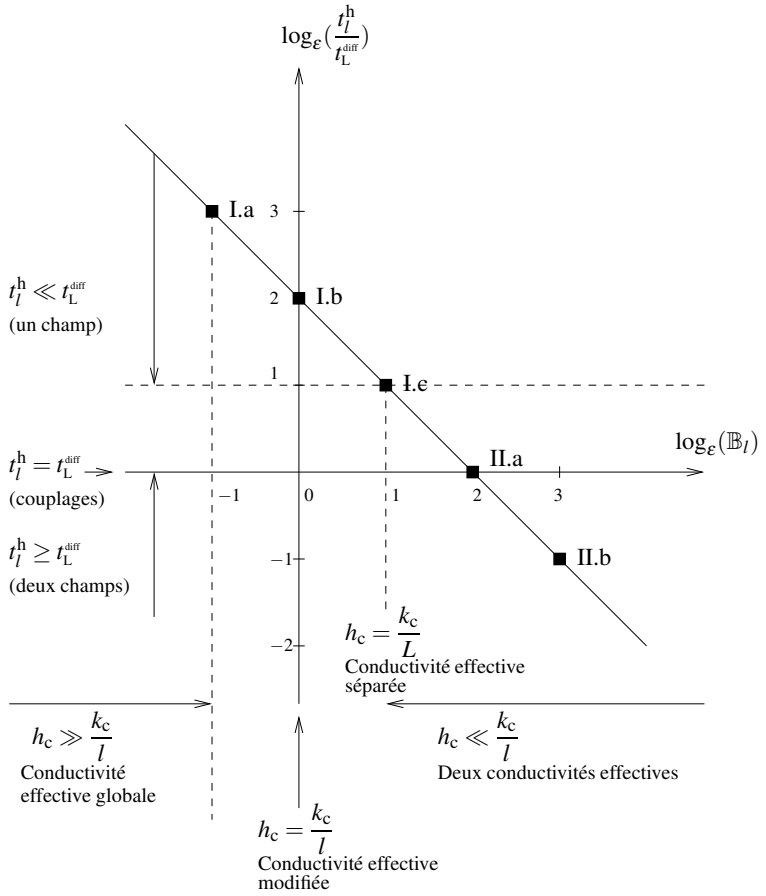

FIGURE 3.5 – *Milieu composite avec résistance de contact : domaines de validité des modèles en fonction de* $\log_\varepsilon(t_{2_l}/t_{1_{\mathrm{L}}})$ *et* $\log_\varepsilon(\mathbb{R}_\lambda)$.

3.2.2.2 Ecoulement en milieu poreux composite avec barrière interfaciale à l'écoulement

Une barrière à l'écoulement est une fine couche de très faible perméabilité qui se situe à l'interface entre les deux constituants. Compte tenu de la forme de l'équation (Eq. (3.25)), la description de l'écoulement d'un fluide légèrement compressible dans ce milieu est mathématiquement identique au cas de la conduction thermique en milieu composite avec résistance de contact (*Cf.* §3.2.1). Les résultats sont donc immédiats en remplaçant la température par la pression.

Dans le cas d'un fluide très compressible, l'équation (Eq. (3.27)) est vérifiée dans chacun des deux constituants. Sur l'interface Γ, la condition de continuité des flux s'écrit :

$$(p_1 \bar{\bar{k}}_1 \vec{\nabla} p_1) \cdot \vec{n} = (p_2 \bar{\bar{k}}_2 \vec{\nabla} p_2) \cdot \vec{n}. \tag{3.28}$$

Pour décrire la barrière à l'écoulement à l'interface, la condition suivante est considérée (Royer and Auriault, 1999) :

$$-(p_1\bar{\bar{k}}_1\vec{\nabla}p_1)\cdot\vec{n}_1 = \frac{h}{2}((p_1)^2-(p_2)^2). \tag{3.29}$$

Elle s'obtient soit par homogénéisation (à partir de l'échelle des pores sur l'interface), soit intuitivement à partir de la loi classiquement utilisée dans le cas linéaire (Eq. (3.18)). Comme dans le cas linéaire, l'homogénéisation de cette description locale conduit à cinq modèles macroscopiques, correspondant aux mêmes ordres de grandeur du nombre adimensionnel

$$\mathbb{B}_l = \frac{h_c l}{k_c}, \tag{3.30}$$

et qui obéissent à la même classification (TAB. 3.6). Les domaines de validité des modèles sont donc identiques à ceux obtenus pour le cas linéaire (FIG. 3.4).

Ces modèles sont non-linéaires, tout en conservant les mêmes propriétés effectives que dans le cas linéaire. Les domaines de validité en temps caractéristiques représentés sur la figure (FIG. 3.5) restent valables. Le problème étant non-linéaire, les temps caractéristiques t_{L} et t_l^h dépendent d'un pression caractéristique

$$t_{\mathrm{L}} = \frac{L^2\phi_{\mathrm{c}}}{p_{\mathrm{c}}k_{\mathrm{c}}}, \qquad t_l^h = \frac{l\phi_{\mathrm{c}}}{p_{\mathrm{c}}h_{\mathrm{c}}},$$

mais le rapport t_l^h/t_{L} vérifie toujours la relation (Eq. (3.20)).

3.3 Remarques de conclusion

Dans les trois situations présentées dans ce chapitre, on obtient plusieurs modèles macroscopiques selon l'ordre de grandeur en puissance de ε d'un nombre adimensionnel. Si la valeur de ce nombre adimensionnel est bien définie et liée à la connaissance de la microstructure, la valeur de ε quant à elle dépend de la longueur macroscopique, qui est soit la taille de l'échantillon, soit la longueur associée à la sollicitation (c'est-à-dire au gradient de température ou de pression). Par conséquent, si la longueur macroscopique est modifiée (par exemple en changeant le gradient macroscopique), la valeur du nombre adimensionnel reste la même mais comme son estimation en puissances de ε peut être modifiée, le comportement macroscopique peut donc changer. Le choix du modèle macroscopique dépend donc à la fois de la taille de l'échantillon et de la valeur du gradient.

A cet égard, la définition des domaines de validité en fonction des temps caractéristique s'avère pertinente car elle est basée sur la comparaison entre un temps caractéristique local (associé à la microstructure) et un temps caractéristique macroscopique (associé à la sollicitation).

- **Modèles à un champ**

Modèle à conductivité effective globale (I.a)

$$< \phi >_{\Omega} \frac{\partial p^{(0)}}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot (p \bar{\bar{k}}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{eff}} \vec{\nabla} p) = 0$$

Modèle à conductivité effective modifiée (I.b)

$$< \phi >_{\Omega} \frac{\partial p}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot (p \bar{\bar{k}}_{\mathrm{h}}^{\mathrm{eff}} \vec{\nabla} p) = 0$$

Modèle à conductivité effective séparée (I.c)

$$< \phi >_{\Omega} \frac{\partial p}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot (p (\bar{\bar{k}}_{1}^{\mathrm{eff}} + \bar{\bar{k}}_{2}^{\mathrm{eff}}) \vec{\nabla} p) = 0$$

- **Modèles à deux champs**

Modèle couplé (II.a)

$$< \phi_1 >_{\Omega}^{\Omega_1} \frac{\partial p_1}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot (p_1 \bar{\bar{k}}_{1}^{\mathrm{eff}} \vec{\nabla} p_1) = -\frac{H}{2}((p_1)^2 - (p_2)^2)$$

$$< \phi_2 >_{\Omega}^{\Omega_2} \frac{\partial p_2}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot (p_2 \bar{\bar{k}}_{2}^{\mathrm{eff}} \vec{\nabla} p_2) = \frac{H}{2}((p_1)^2 - (p_2)^2)$$

Modèle découplé (II.b)

$$< \phi_1 >_{\Omega}^{\Omega_1} \frac{\partial p_1}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot (p_1 \bar{\bar{k}}_{1}^{\mathrm{eff}} \vec{\nabla} p_1) = 0$$

$$< \phi_2 >_{\Omega}^{\Omega_2} \frac{\partial p_2}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot (p_2 \bar{\bar{k}}_{2}^{\mathrm{eff}} \vec{\nabla} p_2) = 0$$

Tableau 3.6 – *Modèles macroscopiques pour l'écoulement d'un fluide très compressible en milieu poreux composite avec barrière interfaciale à l'écoulement.*

4

Comportements macroscopiques des milieux à double porosité

Un milieu à double porosité, par exemple comme un milieu constitué de grains poreux, est un milieu à trois échelles : échelle des micropores, échelle des macropores et échelle macroscopique. L'évolution d'un phénomène instationnaire dans ce type de milieu peut donner lieu à des effets de couplage en temps. La prédiction de l'occurrence de ces couplages et leur modélisation constituent tout l'enjeu de la modélisation en milieu à double porosité. L'homogénéisation s'avère particulièrement bien adaptée pour cela, puisqu'elle permet de prendre explicitement en compte les trois échelles. L'homogénéisation de l'écoulement d'un fluide compressible et de la consolidation conduisent à l'identification de trois comportements caractéristiques des milieux à double porosité, selon l'ordre de grandeur des rapports d'échelles. Les domaines de validité de ces trois comportements s'expriment en fonction l'ordre de grandeur relatif entre deux caractéristiques.

4.1 Double porosité : concept et modèles

Un milieu à double porosité est constitué de deux réseaux de pores distincts, dont les tailles caractéristiques de pores sont significativement différentes (FIG. 4.1). C'est le cas par exemple d'un milieu constitué de grains poreux : la première structure poreuse est celle formée par l'espace inter-grains, et la seconde est celle liée à la microporosité de chaque grain. C'est également le cas d'un milieu poreux fracturé, constitué de fractures ouvertes interconnectées formant une première structure poreuse entourées de blocs de matrice poreuse. Dans un milieu à double porosité, le système macroporeux (fractures ou macropores) se caractérise par sa forte perméabilité alors que dans le système microporeux, la perméabilité est faible. La présence d'une échelle de porosité supplémentaire peut conduire à des comportements très complexes. En effet, du fait de la différence des propriétés, un fluide s'écoule principalement dans le réseau macroporeux, alors que la matrice microporeuse joue le rôle d'un réservoir de fluide. Cependant, suivant le phénomène considéré, le comportement global peut ne pas se limiter à une simple superposition des comportements dans les deux systèmes poreux.

En effet, des effets de couplages peuvent se produire, c'est-à-dire des échanges entre la matrice poreuse et le réseau macroporeux. Ainsi, les deux problèmes majeurs posés par le modélisation en milieu à double porosité sont d'une part de prévoir et de modéliser ces effets de couplage.

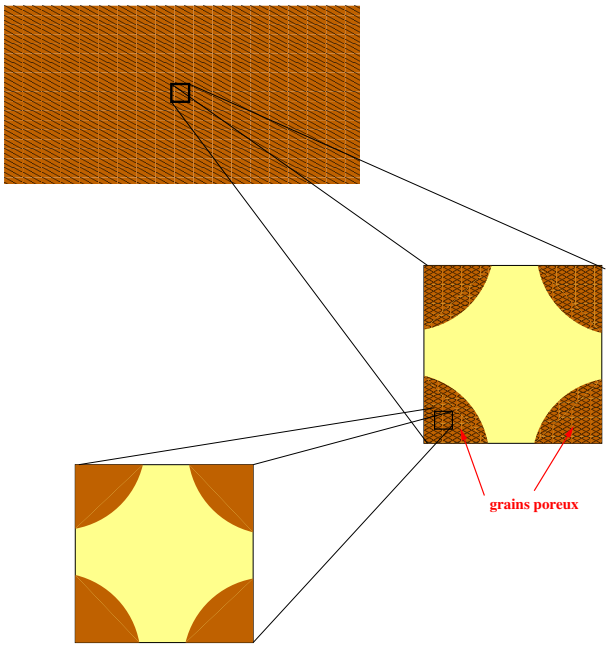

FIGURE 4.1 – *Schématisation d'un milieu à double porosité.*

Le concept de double porosité fût introduit par Barenblatt (Barenblatt et al., 1960), (Barenblatt, 1963), (Barenblatt, 1990) pour suggérer une approche continue pour modéliser les écoulements dans les réservoirs pétroliers fracturés. L'idée de base consiste à considérer le milieu comme constitué de deux continus interagissant.

Le modèle de Barenblatt (Barenblatt et al., 1960), s'exprime ainsi sous la forme de deux équations couplées. Pour l'écoulement d'un fluide faiblement compressible, il s'écrit :

$$\begin{cases} \phi_{\mathrm{p}}\beta\dfrac{\partial p_{\mathrm{p}}}{\partial t} - \vec{\nabla}\cdot(\dfrac{\bar{\bar{K}}_{\mathrm{p}}}{\mu}\vec{\nabla}p_{\mathrm{p}}) = \kappa(p_{\mathrm{M}} - p_{\mathrm{p}}) & \text{dans les macropores ,} \\ \phi_{\mathrm{M}}\beta\dfrac{\partial p_{\mathrm{M}}}{\partial t} - \vec{\nabla}\cdot(\dfrac{\bar{\bar{K}}_{\mathrm{M}}}{\mu}\vec{\nabla}p_{\mathrm{M}}) = -\kappa(p_{\mathrm{M}} - p_{\mathrm{p}}) & \text{dans la matrice microporeuse,} \end{cases} \tag{4.1}$$

où ϕ_{p} et ϕ_{m} désignent les porosités du réseau de macropores et de la matrice microporeuse, $\bar{\bar{K}}_{\mathrm{p}}$et $\bar{\bar{K}}_{\mathrm{M}}$ sont les perméabilités, p_{p} et p_{M} représentent les pressions du fluide dans les deux réseaux poreux, μ est la viscosité du fluide et β est sa compressibilité. Le terme

$$q = \kappa(p_{\mathrm{p}} - p_m) \tag{4.2}$$

décrit l'échange de fluide entre les deux réseaux poreux.
Le modèle de Warren et Root (Warren and Root, 1963) est une simplification du modèle de Barenblatt qui consiste à négliger l'écoulement dans la matrice microporeuse, puisque que sa perméabilité est beaucoup plus faible que celle du réseau de macropores :

$$\begin{cases} \phi_{\mathrm{p}}\beta\dfrac{\partial p_{\mathrm{p}}}{\partial t} - \vec{\nabla}\cdot(\dfrac{\bar{\bar{K}}_{\mathrm{p}}}{\mu}\vec{\nabla}p_{\mathrm{p}}) = \kappa(p_{\mathrm{M}} - p_{\mathrm{p}}) & \text{dans les macropores,} \\ \phi_{\mathrm{M}}\beta\dfrac{\partial p_{\mathrm{M}}}{\partial t} = -\kappa(p_{\mathrm{M}} - p_{\mathrm{p}}) & \text{dans la matrice microporeuse.} \end{cases} \tag{4.3}$$

L'utilisation de modèles à deux équations fût ensuite étendue à la consolidation Aifantis (1977), (Wilson and Aifantis, 1982), (Khaled et al., 1984), (Beskos and Aifantis, 1986), (Elsworth and Bai, 1992), (Bai et al., 1993), (Berryman and Wang, 1995), et au transport de soluté (Coats and Smith, 1964), (Bibby, 1981), (Huyakorn et al., 1983) (*Cf.* §6.2.1).

Les premiers résultats par homogénéisation furent obtenus par une approche à deux échelles pour l'analogue de la conduction thermique (Auriault, 1983), puis pour l'écoulement d'un fluide compressible (Arbogast et al., 1990), (Arbogast, 1997). Des modèles à effets de mémoire sont ainsi obtenus, qui sont non-locaux en temps, et qu'il est impossible de réduire à des modèles à deux équations (Hornung and Showalter, 1990), (Auriault and Royer, 1993), (Royer and Auriault, 1994). Ci-dessous, on présente les résultats obtenus par homogénéisation à trois échelles pour l'écoulement d'un fluide compressible (Royer and Auriault, 1994), (Royer and Boutin, 2012) et la consolidation (Auriault and Boutin, 1992), (Auriault and Boutin, 1993), (Boutin and Royer, 2015).

4.2 Ecoulement d'un fluide compressible en milieu à double porosité

4.2.1 Homogénéisation en milieu à trois échelles

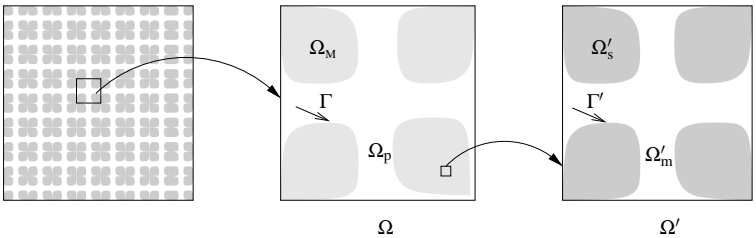

FIGURE 4.2 – *Les trois échelles du milieu périodique à double porosité : échelle macroscopique, échelle des macropores et échelle des micropores.*

Considérons le milieu à double porosité de longueur caractéristique macroscopique L qui est représenté sur la figure (FIG. 4.2). Le milieu est périodique, de période Ω, et la longueur caractéristique de cette échelle mésoscopique l est très petite par rapport à L :

$$\varepsilon = \frac{l}{L} \ll 1.$$

La cellule périodique Ω comprend un réseau de pore (Ω_{p}) et une matrice poreuse (Ω_{M}) et l'interface entre les deux domaines est notée Γ. Le volume de matrice poreuse Ω_{M} est lui-même périodique, de période Ω', dont la taille caractéristique l' est plus petite que l. On définit :

$$\alpha = \frac{l'}{l} = \mathscr{O}(\varepsilon^n) \ll 1. \tag{4.4}$$

La période Ω' comprend un domaine de micropores Ω'_{m} et un squelette solide Ω'_{s}. L'interface entre ces deux domaines est notée Γ'. On introduit les moyennes suivantes :

$$<\cdot>_{\Omega'} = <\cdot>_{\Omega'}^{\Omega'_{\mathrm{s}}} + <\cdot>_{\Omega'}^{\Omega'_{\mathrm{m}}}, \qquad ; \qquad <\cdot>_{\Omega} = <\cdot>_{\Omega}^{\Omega_{\mathrm{M}}} + <\cdot>_{\Omega}^{\Omega_{\mathrm{p}}},$$

où

$$<\cdot>_{\Omega_\delta}^{\Omega_\gamma} = \frac{1}{\mid \Omega_\delta \mid} \int_{\Omega_\gamma} \cdot \, d\Omega.$$

Le milieu est donc doublement périodique et est caractérisé par deux conditions de séparations des échelles. La première $\varepsilon \ll 1$ est la condition fondamentale de séparation des échelles qui est requise pour l'existence d'un modèle continu. Quant à la seconde condition, $\alpha \ll 1$, elle assure le caractère à double porosité du milieu.

La procédure d'homogénéisation s'exécute en deux étapes. La première consiste à homogénéiser la description à l'échelle des micropores (sur la période Ω') pour obtenir le comportement de la matrice poreuse. Ensuite, l'homogénéisation de la description sur la période Ω, qui comprend les équations dans les pores et le comportement homogénéisé de la matrice, conduit à la description macroscopique.

4.2.2 Description locale

Considérons l'écoulement d'un fluide légèrement compressible. A l'échelle des micropores, c'est-à-dire sur la période Ω', l'écoulement est décrit par les équations de Stokes et une condition d'adhérence sur l'interface Γ' :

$$\begin{cases} \mu \Delta \vec{v}_{\mathrm{m}} - \vec{\nabla} p_{\mathrm{m}} = \vec{0} \quad \text{dans } \Omega'_{\mathrm{m}}, & (4.5) \\ \beta \dfrac{\partial p_{\mathrm{m}}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_{\mathrm{m}} = 0 \quad \text{dans } \Omega'_{\mathrm{m}}, & (4.6) \\ \vec{v}_{\mathrm{m}} = \vec{0} \quad \text{sur } \Gamma'. & (4.7) \end{cases}$$

A l'échelle des pores, c'est-à-dire sur la période Ω, outre les équations de Stokes, on exprime la continuité des vitesses et des pressions sur l'interface Γ :

$$\begin{cases} \mu \Delta \vec{v}_{\mathrm{p}} - \vec{\nabla} p_{\mathrm{p}} = \vec{0} \quad \text{dans } \Omega_{\mathrm{p}}, & (4.8) \\ \beta \dfrac{\partial p_{\mathrm{p}}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_{\mathrm{p}} = 0 \quad \text{dans } \Omega_{\mathrm{p}}, & (4.9) \\ \vec{v}_{\mathrm{p}} = <\vec{v}_{\mathrm{m}}>_{\Omega}^{\Omega_{\mathrm{m}}} \quad \text{sur } \Gamma, & (4.10) \\ p_{\mathrm{p}} = p_{\mathrm{m}} \quad \text{sur } \Gamma. & (4.11) \end{cases}$$

4.2.3 Modèles macroscopiques

L'homogénéisation de cette description locale conduit à trois modèles macroscopiques selon l'ordre de grandeur de α en fonction de ε (FIG. 4.3).

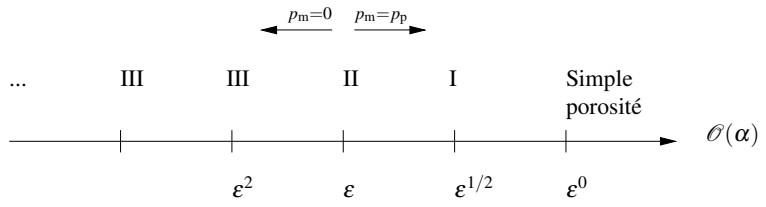

FIGURE 4.3 – *Modèles en milieu à double porosité : domaines en fonction de l'ordre de grandeur de α et passages continus entre modèles.*

• Modèle avec effet réservoir (I) : $\alpha > \mathscr{O}(\varepsilon)$

$$\phi_T \beta \frac{\partial p}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot (\frac{\bar{\bar{K}}_p}{\mu} \vec{\nabla} p) = 0 \tag{4.12}$$

Dans ce modèle, ϕ_T est la porosité de la totalité du milieu à double porosité et $\bar{\bar{K}}_p$ est la perméabilité du réseau de pores. Il s'agit d'un modèle à un champ de pression : $p = p_m = p_p$. C'est un modèle à simple porosité, mais où la porosité est la porosité totale et la perméabilité est celle des macropores. L'écoulement a donc lieu dans les pores uniquement, alors que le fluide est stocké dans les pores et les micropores. La matrice microporeuse joue donc le rôle de réservoir de fluide, d'où l'appellation du modèle.

• Modèle à double porosité (II) : $\alpha = \mathscr{O}(\varepsilon)$

$$\phi_p \beta \frac{\partial p_p}{\partial t} + \phi_m \frac{\partial < p_m >_{\Omega}^{\Omega_M}}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot (\frac{\bar{\bar{K}}_p}{\mu} \vec{\nabla} p_p) = 0, \tag{4.13}$$

où ϕ_p est la porosité du réseau de macropores. Il s'agit un modèle à deux champs de pression : $p_p \neq p_m$. La pression dans la matrice microporeuse p_m est la solution du problème au limites décrivant l'écoulement dans la matrice :

$$\begin{cases} \phi_m \beta \dfrac{\partial p_m}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot (\dfrac{\bar{\bar{K}}_m}{\mu} \vec{\nabla} p_m) = 0 & \text{sur } \Omega'_m, \\ p_m = p_p & \text{sur } \Gamma'. \end{cases} \tag{4.14}$$

ϕ_m et $\bar{\bar{K}}_m$ sont la porosité et la perméabilité de la matrice microporeuse.

On montre que les deux champs de pression sont liés par une relation du type :

$$p_m = p_p - h(t) * \frac{\partial p_p}{\partial t} = p_p - \int_{-\infty}^{t} h(t-\tau) \frac{\partial p_p}{\partial \tau} \, d\tau, \tag{4.15}$$

où $h(t)$ est une fonction mémoire. Le produit de convolution dans l'expression ci-dessus caractérise la présence d'effets de mémoire dûs à la microporosité : il s'agit d'un modèle à double porosité.

• Modèle à simple porosité (III) : $\alpha < \mathscr{O}(\varepsilon)$

$$\phi_{\mathrm{p}} \frac{\partial p_{\mathrm{p}}}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot (p_{\mathrm{p}} \frac{\bar{\bar{K}}_{\mathrm{p}}}{\mu} \vec{\nabla} p_{\mathrm{p}}) = 0 \tag{4.16}$$

Il s'agit du modèle que l'on obtiendrait dans le cas où la matrice serait non poreuse.

4.2.4 Interprétation des domaines de validité

4.2.4.1 Analogie avec la conduction thermique en milieu à double conductivité

Bien qu'il s'agisse de phénomènes différents, on observe une similitude entre les modèles d'écoulement en milieu à double porosité et les modèles I.b, II. et III obtenus pour la conduction thermique en milieu à double conductivité (§3.1.2). Cela vient du fait que l'homogénéisation de l'équation de Stokes conduit à la loi de Darcy, qui est une loi diffusive mathématiquement identique à la loi de Fourier. On peut donc établir une stricte analogie entre température, flux de chaleur, conductivité, capacité thermique, d'une part, et pression, vitesse, perméabilité, compressibilité, d'autre part. Pour le milieu à double porosité, à l'échelle macroscopique tout se passe comme si la matrice poreuse était un milieu de perméabilité $\bar{\bar{K}}_{\mathrm{m}}$ et le réseau de pore un milieu de perméabilité $\bar{\bar{K}}_{\mathrm{p}}$. Une conséquence directe de cette analogie est que les modèles à double porosité ci-dessus s'appliquent également aux milieux à double perméabilité.

Or, les valeurs des perméabilités sont liées aux tailles de pores :

$$K_{p_c} = \mathscr{O}(l^2), \qquad K_{m_c} = \mathscr{O}(l^2), \qquad \frac{K_{m_c}}{K_{p_c}} = \mathscr{O}(\alpha^2).$$

La condition de séparation entre les deux échelles de pores (Eq. 4.4), qui est caractéristique d'un milieu à double porosité, induit donc un contraste de perméabilités ($K_{m_c} \ll K_{p_c}$). C'est pour cette raison que le modèle I.a obtenu pour un milieu à double conductivité n'est pas retrouvé pour l'écoulement en milieu à double porosité.

4.2.4.2 Domaines de validité

Par similarité avec le rapport t_{2_l}/t_{1_L} en conduction thermique (*Cf.* §3.1.3), on examine l'ordre de grandeur du rapport

$$\frac{t_{\mathrm{M}_l}}{t_{\mathrm{p_L}}},$$

où t_{M_l} désigne le temps caractéristique local dans la matrice microporeuse et $t_{\mathrm{p_L}}$ est le temps caractéristique macroscopique. Par analyse dimensionnelle, on déduit :

$$t_{\mathrm{M}_{l_{\mathrm{p}}}} = \phi_{\mathrm{m}} \beta \mu l_{\mathrm{p}}^2 / K_{\mathrm{m_c}} \quad ; \quad t_{\mathrm{p_L}} = \phi_{\mathrm{p}} \beta \mu L^2 / K_{\mathrm{p_c}}. \tag{4.17}$$

Ainsi :

$$\frac{t_{\mathrm{M}_l}}{t_{\mathrm{p_L}}} = \mathscr{O}(\frac{\phi_{\mathrm{m}}}{\phi_{\mathrm{p}}} \frac{K_{\mathrm{p_c}}}{K_{\mathrm{m_c}}} \frac{l^2}{L^2}) = \mathscr{O}(\alpha^{-2} \varepsilon^2), \tag{4.18}$$

d'où (FIG. 4.4)

$$\begin{cases} t_{\mathrm{M}_l} \ll t_{\mathrm{p_L}} & \text{quand } \alpha > \mathscr{O}(\varepsilon), \\ t_{\mathrm{M}_l} \approx t_{\mathrm{p_L}} & \text{quand } \alpha = \mathscr{O}(\varepsilon), \\ t_{\mathrm{M}_l} \gg t_{\mathrm{p_L}} & \text{quand } \alpha < \mathscr{O}(\varepsilon). \end{cases}$$

Les domaines de validité des modèles sont donc redéfinis par (Royer et al., 2008), (Royer and Boutin, 2012) :

$$\begin{cases} t_{\mathrm{M}_{l_\mathrm{p}}} \ll t_{\mathrm{p_L}} : & \text{Modèle avec effet réservoir ,} \\ t_{\mathrm{M}_{l_\mathrm{p}}} \approx t_{\mathrm{p_L}} : & \text{Modèle à double porosité,} \\ t_{\mathrm{M}_{l_\mathrm{p}}} \gg t_{\mathrm{p_L}} : & \text{Modèle à simple porosité.} \end{cases} \tag{4.19}$$

Un comportement avec effet réservoir signifie qu'au temps d'observation $t \approx t_{\mathrm{p_L}}$,

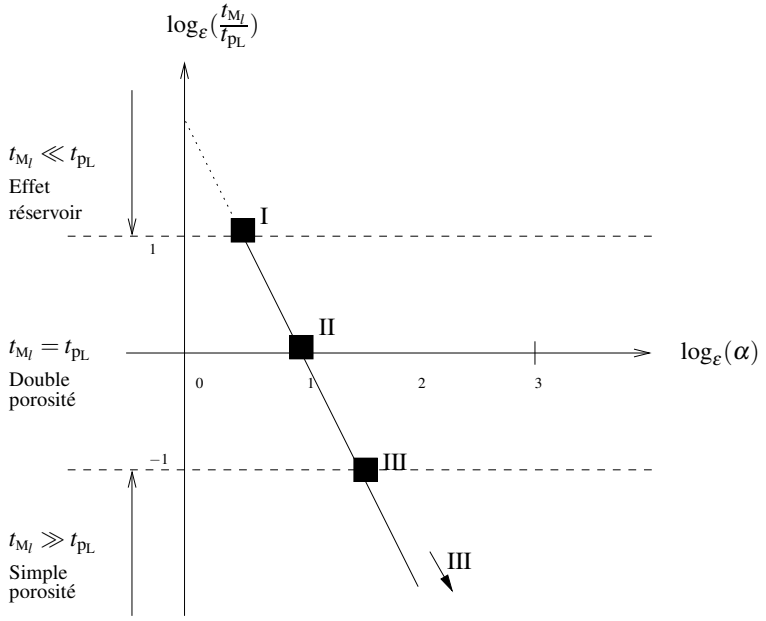

FIGURE 4.4 – *Domaines de validité des modèles en fonction de* $\log_\varepsilon(t_{\mathrm{M}_l}/t_{\mathrm{p_L}})$ *et* $\log_\varepsilon(\alpha)$.

l'écoulement instationnaire a déjà eu lieu dans la matrice poreuse et un régime permanent est atteint. Par conséquent, il n'y a pas d'effets de mémoire, mais la porosité totale du milieu est prise en compte. Un comportement à double porosité est observé à l'échelle macroscopique si à $t =\approx t_{\mathrm{p_L}}$: l'écoulement se produit simultanément dans la matrice poreuse. Un comportement à simple porosité correspond au cas où à $t \approx t_{\mathrm{p_L}}$, l'écoulement n'a pas encore démarré dans la matrice poreuse poreuse. La matrice est donc vue comme un solide non-poreux.

4.2.5 Comparaison avec les modèles phénoménologiques

Le modèle homogénéisé à double porosité (Eq.4.13) est très différent des deux modèles phénoménologiques (Eqs. 4.1, 4.3), même si les deux types de modèles impliquent deux champs de pression. En particulier, dans les deux modèles phénoménologiques, la pression dans la matrice est uniforme, alors qu'elle est non-uniforme dans

le modèle homogénéisé. Comme dans le cas du composite à à double-conductivité (Cf. §3.1.5), il est possible d'améliorer le modèle de Warren et Root en considérant la correction suivante du terme d'échange :

$$q = \kappa(p_{\mathrm{p}} + \gamma \frac{\partial p_{\mathrm{p}}}{\partial t} - p_m) \tag{4.20}$$

On remarque que les deux modèles phénoménologiques sont tous deux des modèles d'écoulement en milieu poreux composite avec barrière à l'écoulement (*Cf.* §3.2), où les deux perméabilités seraient du même ordre de grandeur dans le cas du modèle de Barenblatt et où il y aurait un contraste de perméabilités dans le cas du modèle de Warren et Root.

4.2.6 Cas d'un fluide très compressible

Dans le cas d'un fluide fortement compressible à équation d'état linéaire, les équations (Eqs. (4.5)-(4.6)) dans Ω'_m et (Eqs. (4.8)-(4.9)) dans Ω_p de la description locale sont remplacées par :

$$\begin{cases} \mu \Delta \vec{v}_\gamma + (\lambda + \mu) \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}_\gamma) - \vec{\nabla} p_\gamma = \vec{0} \quad (\gamma = m,p), & (4.21) \\ \dfrac{\partial \rho_\gamma}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho_\gamma \vec{v}_\gamma) = 0 \quad (\gamma = m,p), & (4.22) \\ \rho_\gamma = A\ p_\gamma \quad (\gamma = m,p). & (4.23) \end{cases}$$

L'homogénéisation de cette description locale (Royer and Auriault, 1992), (Royer and Auriault, 1994), (Royer et al., 1996b), (Royer et al., 1995) conduit à trois modèles non-linéaires (TAB. 4.1).

Ces résultats ont constitué la base d'autres études incluant des phénomènes additionnels (Royer et al., 1996a), (Chastanet et al., 2007) ou considérant un régime acoustique (Boutin et al., 1998).

Les domaines de validité sont identiques au cas linéaire. Ils se traduisent en considérant les temps caractéristiques :

$$t_{\mathrm{M}_l} = \frac{\phi_{\mathrm{m}} \beta \mu l^2}{K_{\mathrm{m_c}} p_{\mathrm{M}_c}} \qquad t_{\mathrm{pL}} = \frac{\phi_{\mathrm{p}} \beta \mu L^2}{K_{\mathrm{p_c}} p_{p_c}}$$

dont le rapport vérifie (Eq. (4.18)).

4.3 Poroélasticité en milieu à double porosité

4.3.1 Description locale

Considérons que le milieu à double porosité représenté sur la figure (FIG. 4.2) est élastique déformable, saturé par un fluide Newtonien incompressible et soumis à une sollicitation quasi-statique. A l'échelle des micropores (période Ω), la description locale (TAB. 4.2) comprend les équations de l'élasticité en petites déformations et en régime quasi-statique pour le squelette solide et les équations exprimant l'écoulement du fluide dans les conditions de Stokes dans Ω'_{m}. Sur l'interface Γ', on exprime la continuité des contraintes normales et des déplacements. La description à l'échelle des pores (cellule Ω) comprend les équations du fluide dans la matrice poreuse Ω_{M} ainsi que la continuité des contraintes normales, des vitesses et des pressions du fluide sur l'interface Γ.

• **Modèle avec effet réservoir (I) :** $\alpha > \mathscr{O}(\varepsilon)$

$$\phi_{\mathrm{T}} \frac{\partial p}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot (p \frac{\bar{\bar{K}}_{\mathrm{p}}}{\mu} \vec{\nabla} p) = 0$$

• **Modèle à double porosité (II) :** $\alpha = \mathscr{O}(\varepsilon)$

$$\phi_{\mathrm{p}} \frac{\partial p_{\mathrm{p}}}{\partial t} + \phi_{\mathrm{m}} \frac{\partial < p_{\mathrm{m}} >_{\Omega}^{\Omega_{\mathrm{M}}}}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot (p_{\mathrm{p}} \frac{\bar{\bar{K}}_{\mathrm{p}}}{\mu} \vec{\nabla} p_{\mathrm{p}}) = 0$$

$$\begin{cases} \phi_{\mathrm{m}} \beta \frac{\partial p_{\mathrm{m}}}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot (\frac{\bar{\bar{K}}_{\mathrm{m}}}{\mu} \vec{\nabla} p_{\mathrm{m}}) = 0 \quad \text{sur } \Omega_{\mathrm{m}} \\ p_{\mathrm{m}} = p_{\mathrm{p}} \quad \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

• **Modèle à simple porosité (II) :** $\alpha < \mathscr{O}(\varepsilon)$

$$\phi_{\mathrm{p}} \frac{\partial p_{\mathrm{p}}}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot (p_{\mathrm{p}} \frac{\bar{\bar{K}}_{\mathrm{p}}}{\mu} \vec{\nabla} p_{\mathrm{p}}) = 0$$

Tableau 4.1 – *Modèles macroscopiques pour l'écoulement d'un fluide très compressible en milieu à double porosité.*

4.3.2 Modèles macroscopiques

L'homogénéisation à trois échelles de cette description locale (Auriault and Boutin, 1992), (Auriault and Boutin, 1993),(Royer et al., 1996b), (Royer et al., 1998), (Boutin and Royer, 2015) conduit à trois modèles macroscopiques de structure similaire au modèle de Biot pour les milieux à simple porosité.

• Modèle avec effet réservoir (I) : $\alpha > \mathscr{O}(\varepsilon)$

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\bar{\bar{\bar{\bar{C}}}}_{\mathrm{I}} : \bar{\bar{e}}(\vec{u}_{\mathrm{s}}) - \bar{\bar{\alpha}}_{\mathrm{I}} p \right) = \vec{0} \tag{4.24}$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\frac{\bar{\bar{K}}_{\mathrm{p}}}{\mu} \vec{\nabla} p) = \bar{\bar{\alpha}}_{\mathrm{I}} \otimes \bar{\bar{e}}(\vec{u}_{\mathrm{s}}) + \beta_{\mathrm{I}} \frac{\partial p}{\partial t} \tag{4.25}$$

Il s'agit d'un modèle à un champ de pression $p_{\mathrm{m}} = p_{\mathrm{p}} = p$, dont le tenseur élastique est celui du du milieu à double porosité vide. Ce modèle macroscopique décrit la consolidation du milieu de porosité ϕ_T et de perméabilité $\bar{\bar{K}}_{\mathrm{p}}$ (perméabilité des pores) : il s'agit d'un modèle avec effet réservoir.

• **Echelle des micropores** (période Ω')

◇ Dans le squelette solide (Ω'_{s})
$\vec{\nabla}\cdot\tilde{\sigma}_{\mathrm{s}} = \vec{0}$
$\tilde{\sigma}_{\mathrm{s}} = \bar{\bar{\bar{\bar{a}}}} : \bar{\bar{e}}(\vec{u}_s)$

◇ Dans la phase fluide saturant les micropores (Ω'_{m})
$\vec{\nabla}\cdot\tilde{\sigma}_{\mathrm{m}} = \vec{0}$
$\tilde{\sigma}_{\mathrm{m}} = -p_{\mathrm{m}}\bar{\bar{I}} + 2\mu\bar{\bar{D}}(\vec{v}_{\mathrm{m}})$
$\vec{\nabla}\cdot\vec{v}_{\mathrm{m}} = 0$

◇ Sur l'interface solide/fluide (Γ')
$\tilde{\sigma}_{\mathrm{s}}\cdot\vec{n}' = \tilde{\sigma}_{\mathrm{m}}\cdot\vec{n}'$
$\vec{u}_{\mathrm{s}} = \vec{u}_{\mathrm{m}}$

• **Echelle des pores** (période Ω)

◇ Dans la phase fluide saturant les pores (Ω_{p})
$\vec{\nabla}\cdot\tilde{\sigma}_{\mathrm{p}} = \vec{0}$
$\tilde{\sigma}_{\mathrm{p}} = -p_{\mathrm{p}}\bar{\bar{I}} + 2\mu\bar{\bar{D}}(\vec{v}_{\mathrm{p}})$
$\vec{\nabla}\cdot\vec{v}_{\mathrm{p}} = 0$

◇ Sur l'interface matrice/fluide (Γ)
$\tilde{\sigma}_{\mathrm{p}}\cdot\vec{n} = (<\tilde{\sigma}_{\mathrm{m}}>_{\Omega'}^{\Omega'_m} + <\tilde{\sigma}_{\mathrm{s}}>_{\Omega'}^{\Omega'_s})\cdot\vec{n}$
$\vec{v}_{\mathrm{p}} = <\vec{v}_{\mathrm{m}}>_{\Omega'}^{\Omega'_m} + <\vec{v}_{\mathrm{s}}>_{\Omega'}^{\Omega'_s}$
$p_{\mathrm{p}} = p_{\mathrm{m}}$

Tableau 4.2 – *Description locale d'un milieu saturé déformable à double porosité.*

• Modèle à double porosité (II) : $\alpha = \mathscr{O}(\varepsilon)$

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\hat{\bar{\bar{\bar{\bar{C}}}}}_{\mathrm{II}} : \tilde{e}(\hat{\vec{u}}_{\mathrm{s}}) - \hat{\bar{\alpha}}_{\mathrm{II}}\,\hat{p}_{\mathrm{p}}\right) = \vec{0} \tag{4.26}$$

$$\vec{\nabla}_x\cdot\left(\frac{\hat{\bar{\bar{K}}}_{\mathrm{p}}}{\mu}\vec{\nabla}_x\hat{p}_{\mathrm{p}}\right) = i\omega\hat{\bar{\alpha}}_{\mathrm{II}}\otimes\tilde{e}(\hat{\vec{u}}_{\mathrm{s}}) + i\omega\hat{\beta}_{\mathrm{II}}\,\hat{p}_{\mathrm{p}} \tag{4.27}$$

Ce modèle est obtenu en régime harmonique de pulsation ω car il n'existe pas d'expression analytique en temps. Les paramètres effectifs sont dépendants de ω. Ce modèle décrit une double consolidation avec une participation de la matrice poreuse Ω_{M} qui différée dans le temps par rapport à la pression dans les pores et à la déformation d'ensemble. Ramenées dans le domaine temporel, ces équations présenteraient des effets de mémoire dû à un effet de retard dans l'écoulement. Il s'agit donc d'un modèle à double porosité.

• Modèle à simple porosité (III) : $\alpha < \mathscr{O}(\varepsilon)$

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\bar{\bar{\bar{\bar{C}}}}_{\mathrm{III}} : \tilde{e}(\vec{u}_{\mathrm{s}}) - \bar{\bar{\alpha}}_{\mathrm{III}} p_{\mathrm{p}} \right) = \vec{0} \tag{4.28}$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\frac{\bar{\bar{K}}_{\mathrm{p}}}{\mu} \vec{\nabla} p_{\mathrm{p}}) = \bar{\bar{\alpha}}_{\mathrm{III}} \otimes \tilde{e}(\vec{u}_{\mathrm{s}}) + \beta_{\mathrm{III}} \frac{\partial p_{\mathrm{p}}}{\partial t} \tag{4.29}$$

Ce modèle décrit la situation où il n'y a pas d'écoulement dans les micropores. La matrice poreuse a donc un comportement monophasique élastique car elle saturé par un fluide statique. Le comportement macroscopique est un comportement à simple porosité.

Ces trois modèles correspondent aux trois types de comportements macroscopiques identifiés pour le fluide compressible, et pour des domaines de validité identiques exprimés en ordres de grandeur de α.

4.3.3 Domaines de validité

Examinons ici le rapport de temps caractéristiques t_{M_l}/t_{pL}, où t_{M_l} est le temps caractéristique de consolidation local à l'échelle de la matrice poreuse, et où t_{pL} est le temps caractéristique macroscopique de consolidation dans les pores :

$$t_{\mathrm{M}_l} = \frac{\mu l^2}{a_{\mathrm{c}} K_{\mathrm{M_c}}} \quad ; \quad t_{\mathrm{p_L}} = \frac{\mu L^2}{a_c K_{\mathrm{p_c}}} \quad .$$

On a ainsi :

$$\frac{t_{\mathrm{M}_l}}{t_{\mathrm{p_L}}} = \mathscr{O}(\frac{l^2}{L^2} \frac{K_{\mathrm{p_c}}}{K_{\mathrm{m_c}}}) = \mathscr{O}(\alpha^{-2} \varepsilon^2), \tag{4.30}$$

D'où

$$\begin{cases} t_{\mathrm{M}_l} \ll t_{\mathrm{p_L}} & \text{quand } \alpha > \mathscr{O}(\varepsilon), \\ t_{\mathrm{M}_l} \approx t_{\mathrm{p_L}} & \text{quand } \alpha = \mathscr{O}(\varepsilon), \\ t_{\mathrm{M}_l} \gg t_{\mathrm{p_L}} & \text{quand } \alpha < \mathscr{O}(\varepsilon). \end{cases}$$

Comme pour l'écoulement d'un fluide compressible, les domaines de validité des modèles sont donc redéfinis par (Boutin and Royer, 2015) :

$$\begin{cases} t_{\mathrm{M}_{l_{\mathrm{p}}}} \ll t_{\mathrm{p_L}} : & \text{Modèle avec effet réservoir,} \\ t_{\mathrm{M}_{l_{\mathrm{p}}}} \approx t_{\mathrm{p_L}} : & \text{Modèle à double porosité,} \\ t_{\mathrm{M}_{l_{\mathrm{p}}}} \gg t_{\mathrm{p_L}} : & \text{Modèle à simple porosité.} \end{cases} \tag{4.31}$$

Le comportement à double porosité est obtenu lorsque la consolidation dans la matrice microporeuse est en régime instationnaire. Dans les autres cas, un modèle de type simple porosité est obtenu, mais avec des coefficients effectifs différents.

Ces résultats expliquent pourquoi on obtient des domaines de validité identiques pour l'écoulement d'un fluide compressible et pour la poroélasticité.

4.4 Remarques de conclusion

Ces travaux ont permis d'identifier trois comportements caractéristiques pour les milieux à double porosité, associés chacun à une relation entre deux temps caractéristiques du système :

$$\begin{cases} \bullet \text{ un comportement avec effet réservoir} \quad \text{si } t_{\mathrm{M}_{l_\mathrm{p}}} \ll t_{\mathrm{p_L}} \\ \text{Le milieu se comporte comme un milieu équivalent à simple porosité} \\ \bullet \text{ un comportement à double porosité} \quad \text{si } t_{\mathrm{M}_{l_\mathrm{p}}} \approx t_{\mathrm{p_L}} \\ \text{Il y a des effets de mémoire} \\ \bullet \text{ un comportement à simple porosité} \quad \text{si } t_{\mathrm{M}_{l_\mathrm{p}}} \gg t_{\mathrm{p_L}} \\ \text{Le phénomène ne se produit que dans les macropores} \end{cases} \tag{4.32}$$

où $t_{\mathrm{M}_{l_\mathrm{p}}}$ est le temps caractéristique local dans la matrice poreuse et où $t_{\mathrm{p_L}}$ représente le temps caractéristique macroscopique du phénomène.

Ces résultats se généralisent à tout phénomène instationnaire évoluant en milieu à double porosité.

5

Effet Klinkenberg

Lors de l'écoulement d'un gaz à faible pression en milieu poreux, la loi de Darcy peut ne plus être vérifiée. En effet, en milieux à faible taille caractéristique de pore, on observe des vitesses de gaz qui sont supérieures à celles prédites par la loi de Darcy. Il s'agit de l'effet Klinkenberg, lequel résulte d'un écoulement avec glissement à l'échelle des pores. Pour des pressions encore plus faibles, le transport du gaz devient diffusif : il s'agit de l'effet Knudsen. L'homogénéisation d'un écoulement avec glissement permet d'obtenir une forme tensorielle de la loi de Klinkenberg (Skjetne and Auriault, 1999). L'étude de ce phénomène en milieu à double porosité conduit à envisager plusieurs combinaisons de régimes puisqu'un écoulement avec glissement dans les macropores peut être associé à un régime de Klinkenberg ou de Knudsen dans la matrice microporeuse, et un régime de Klinkenberg dans la matrice microporeuse conduit à un écoulement avec ou sans glissement dans les macropores (Chastanet, 2004), (Chastanet et al., 2007). L'homogénéisation de l'effet Klinkenberg en milieu poreux composite montre que la loi de Klinkenberg n'est préservée que dans quelques cas particuliers à grande échelle (Chastanet et al., 2004).

5.1 Phénomènes et modèles

5.1.1 Description des phénomènes mis en jeu

5.1.1.1 Lois de Klinkenberg et de Knudsen

Dans le cas général, l'écoulement d'un gaz en milieu poreux est décrit par la loi de Darcy :

$$\vec{V} = -\frac{K}{\mu}\vec{\nabla}p. \tag{5.1}$$

A faible pression du gaz et à faible taille caractéristique de pore, il arrive que l'écoulement du gaz soit plus rapide que celui prédit par la loi de Darcy (Jannot and Lasseux, 2012). Adzumi (1937a,b) puis Klinkenberg (1941) montrèrent qu'on pouvait décrire ce phénomène par une correction de la loi de Darcy, qui consiste à considérer l'expression suivante pour la perméabilité au gaz K_{g} :

$$K_{\mathrm{g}} = K(1+\frac{b}{\bar{p}}), \tag{5.2}$$

où $\bar{p}$ est la moyenne arithmétique des pressions d'entrée et de sortie de l'échantillon et où $b > 0$ désigne le facteur de Klinkenberg et dépend des propriétés du milieu et, dans une moindre mesure, de la nature du gaz. En remplaçant K par K_{g} dans (Eq. (5.1)), on obtient la loi d'écoulement suivante :

$$\vec{V} = -\frac{K}{\mu}(1+\frac{b}{\bar{p}})\vec{\nabla}p. \tag{5.3}$$

Il s'agit de la loi de Klinkenberg. Comme elle dépend de $\bar{p}$, et donc des conditions aux limites, il s'agit d'une loi non-locale. L'expression de la perméabilité au gaz (Eq. 5.2) indique que le phénomène devient négligeable lorsqu'on augmente la pression. L'apparition du phénomène est liée à la valeur du nombre de Knudsen, rapport entre le libre parcours moyen des molécules de gaz et la taille caractéristique de pore :

$$\mathrm{Kn} = \frac{\lambda}{l}. \tag{5.4}$$

Il devient significatif et peut être décrit par la loi de Klinkenberg lorsque la valeur de λ atteint la taille caractéristique de pore, c'est-à-dire lorsque :

$$\mathrm{Kn} \approx 1.$$

A très faible pression du gaz, c'est-à-dire lorsque $\mathrm{Kn} \gg 1$, le transport du gaz devient diffusif. Ce phénomène fût étudié par Knudsen (1909) qui considéra l'écoulement d'un gaz fortement raréfié dans une conduite cylindrique, puis par Desjarguin (1946) qui proposa la loi de transport suivante pour le décrire en milieu poreux :

$$\vec{V} = -\frac{D_{\mathrm{g}}}{p}\vec{\nabla}p, \tag{5.5}$$

où D_{g} est le coefficient de diffusion de Knudsen et dépend très fortement de la géométrie des pores. Il s'agit de la loi de diffusion de Knudsen.

5.1.1.2 Physique à l'échelle des pores

L'effet Klinkenberg apparaît lorsqu'un nombre significatif de collisions de molécules se produisent sur la paroi des pores. La vitesse locale d'écoulement du gaz n'est alors plus nulle sur la paroi des pores : il s'agit d'un écoulement avec glissement à la paroi. Dans (Skjetne and Auriault, 1999), (Lasseux et al., 2014) une forme tensorielle de la loi de Klinkenberg est obtenue à partir d'un écoulement de Stokes avec glissement à l'échelle des pores. Les possibilités de retrouver une description similaire en se basant sur la théorie cinétique des gaz sont étudiées dans (Pavan and Oxarango, 2007).

Lorsque l'effet Knudsen apparaît ($\mathrm{Kn} \gg 1$), le gaz est alors si raréfié que le nombre de collisions molécule-molécule devient négligeable devant le nombre de collisions molécule-paroi. L'écoulement local du gaz dans les pores ne peut donc plus être décrit par un modèle continu : il s'agit d'un écoulement moléculaire libre, appelé encore écoulement de Knudsen. Dans (Charrier and Dubroca, 2003), la loi continue de diffusion de Knudsen est obtenue par passage micro-macro à partir des équations de Boltzmann à l'échelle des pores.

5.1.2 Homogénéisation de l'écoulement avec glissement d'un gaz en milieu poreux

5.1.2.1 Description locale de l'écoulement avec glissement

Considérons l'écoulement d'un gaz en milieu poreux périodique (FIG. 5.1). Sur la cellule périodique, l'écoulement permanent d'un fluide compressible barotrope avec glissement sur l'interface Γ s'écrit :

$$\begin{cases} \mu\Delta\vec{v}_{\mathrm{p}} + (\lambda+\mu)\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}_{\mathrm{p}}) - \vec{\nabla}p_{\mathrm{p}} = \vec{0} \quad \text{dans } \Omega_{\mathrm{p}}, & (5.6) \\ \vec{\nabla}\cdot(\rho_{\mathrm{p}}\vec{v}_{\mathrm{p}}) = 0 \quad \text{dans } \Omega_{\mathrm{p}}, & (5.7) \\ \rho_{\mathrm{p}} = A\ p_{\mathrm{p}} \quad \text{dans } \Omega_{\mathrm{p}}, & (5.8) \\ \vec{v}_{\mathrm{p}} = -c_{\mathrm{p}}\lambda_{\mathrm{p}}(\vec{t}_1\cdot\vec{\nabla}\vec{v}_{\mathrm{p}}\cdot\vec{n})\vec{t}_1 \quad \text{sur } \Gamma, & (5.9) \end{cases}$$

où $\vec{t}_1$ désigne le vecteur unitaire tangentiel orienté dans la direction du glissement et $\vec{n}$ est le vecteur unitaire normal dirigé vers l'extérieur du volume fluide.

La condition

$$\lambda_{\mathrm{p}} \ll l$$

sur le libre parcours moyen λ_{p} est imposée, pour pouvoir recourir à une description continue de l'écoulement local. Par conséquent, la valeur du nombre de Knudsen

$$\mathrm{Kn}_{\mathrm{p}} = \frac{\lambda_{\mathrm{p}}}{l},$$

est telle que

$$\mathrm{Kn}_{\mathrm{p}} \ll 1.$$

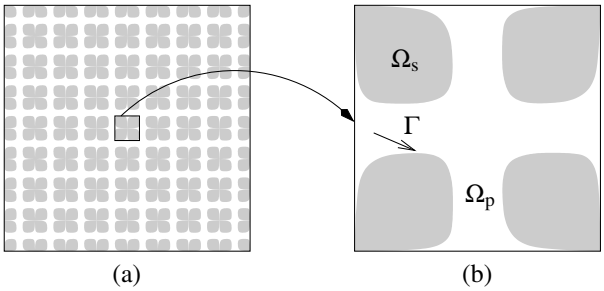

FIGURE 5.1 – *Milieu poreux : (a) Echantillon macroscopique ; (b) Cellule périodique.*

5.1.2.2 Modèles macroscopiques

L'homogénéisation de la description locale (Skjetne and Auriault, 1999) conduit au bilan de masse macroscopique suivant :

$$\vec{\nabla}\cdot(p_{\mathrm{p}} < \vec{v}_{\mathrm{p}} >_{\Omega}^{\Omega_{\mathrm{p}}}) = 0, \tag{5.10}$$

assorti de la loi d'écoulement définissant la vitesse macroscopique $< \vec{v}_{\mathrm{p}} >_{\Omega}^{\Omega_{\mathrm{p}}}$.

Loi d'écoulement au premier ordre Lorsque

$$\varepsilon \ll \mathrm{Kn_p} \ll \varepsilon^{-1}, \tag{5.11}$$

la loi macroscopique d'écoulement obtenue par homogénéisation s'écrit :

$$< \vec{v}_\mathrm{p} >_\Omega^{\Omega_\mathrm{p}} = -\frac{\bar{\bar{K}}_{\mathrm{pG}}}{\mu} \vec{\nabla} p, \tag{5.12}$$

où le tenseur $\bar{\bar{K}}_{\mathrm{pG}}$ est une perméabilité au gaz. Il s'agit d'une fonction non-linéaire de $\mathrm{Kn_p}$ dont on ne peut déterminer d'expression littérale et que nous désignons par perméabilité au gaz non-linéaire.

Approximation à faible nombre de Knudsen Pour de faibles valeurs de $\mathrm{Kn_p}$, c'est-à-dire lorsque

$$\varepsilon \ll \mathrm{Kn} \ll \varepsilon^0, \tag{5.13}$$

il est possible de déterminer une approximation de la loi d'écoulement (Eq. 5.12) et donc de la perméabilité au gaz non-linéaire $\bar{\bar{K}}_{\mathrm{pG}}$:

$$< \vec{v}_\mathrm{p} >_\Omega^{\Omega_\mathrm{p}} = -\frac{\bar{\bar{K}}_{\mathrm{p_g}}}{\mu} \vec{\nabla} p, \tag{5.14}$$

$$\bar{\bar{K}}_{\mathrm{p_g}} = \bar{\bar{K}}_\mathrm{p}(\tilde{I} + \frac{1}{p_\mathrm{p}^{(0)}} \tilde{J}_\mathrm{p}), \tag{5.15}$$

où le tenseur $\tilde{J}_\mathrm{p}$ est indépendant de la pression. L'expression ci-dessus constitue donc une forme tensorielle de la loi de Klinkenberg pour la perméabilité au gaz (Eq. 5.2). Contrairement à l'équation (Eq. 5.2), l'équation (Eq. 5.15) est une loi locale, c'est-à-dire indépendante des conditions aux limites. On désigne donc $\bar{\bar{K}}^*_{\mathrm{p_g}}$ par perméabilité au gaz de Klinkenberg. Il s'agit d'une approximation de la perméabilité au gaz non-linéaire $\bar{\bar{K}}^*_{\mathrm{pG}}$ qui est valable lorsque la condition (Eq. 5.13) est vérifiée.

5.2 Effet Klinkenberg en milieu à double porosité

Considérons le milieu à double porosité périodique représenté sur la figure (FIG. 5.2) et supposons que les deux conditions de séparation des échelles liées à un milieu à double porosité sont vérifiées :

$$\varepsilon = \frac{l}{L} \ll 1,$$
$$\alpha = \frac{l'}{l} \ll 1,$$

et on pose :

$$\alpha = \varepsilon^n \quad \text{avec} \quad n > 0. \tag{5.16}$$

L'homogénéisation (à deux échelles) de l'écoulement d'un gaz à faible pression dans ce milieu (Chastanet, 2004), (Chastanet et al., 2007) conduit en premier lieu à identifier quels régimes dans la matrice et dans les macropores sont physiquement compatibles.

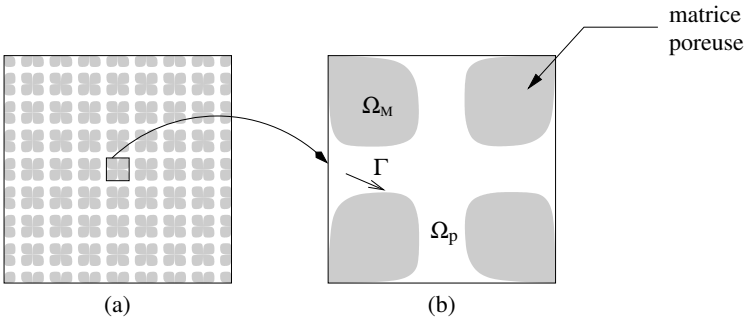

FIGURE 5.2 – *Représentation à deux échelles d'un milieu à double porosité : (a) échantillon macroscopique ; (b) cellule périodique.*

5.2.1 Analyse des régimes locaux d'écoulement

Les régimes de Darcy, de Klinkenberg puis de Knudsen sont successivement considérés dans la matrice microporeuse, ce qui correspond à différents ordres de grandeur du nombre de Knudsen dans les micropores :

$$\mathrm{Kn_m} = \mathscr{O}(\frac{\lambda_\mathrm{m}}{l'}), \tag{5.17}$$

où λ_m désigne le libre parcours moyen des molécules à l'échelle des micropores. Pour chaque régime considéré dans la matrice, on doit donc déterminer quel régime est physiquement compatible dans le réseau de macropores et en particulier s'il peut s'agir d'un écoulement avec ou sans glissement. Celui-ci est conditionné par l'ordre de grandeur du nombre de Knudsen dans les macropores :

$$\mathrm{Kn_p} = \mathscr{O}(\frac{\lambda_\mathrm{p}}{l}), \tag{5.18}$$

où λ_p est le libre parcours moyen du gaz dans les macropores. Il découle la relation suivante entre les deux nombres de Knudsen :

$$\mathrm{Kn_p} = \mathscr{O}(\alpha \mathrm{Kn_m}). \tag{5.19}$$

5.2.1.1 Régimes d'écoulement dans la matrice microporeuse

Comme le nombre de Knudsen $\mathrm{Kn_m}$ est défini à l'échelle des micropores, on utilise le rapport d'échelle α pour en mesurer l'ordre de grandeur et on pose :

$$\mathrm{Kn_m} = \mathscr{O}(\alpha^q). \tag{5.20}$$

L'étude est ainsi basée sur l'hypothèse que la loi d'écoulement dans la matrice microporeuse est

$$\begin{cases} \bullet \text{ la loi de Darcy lorsque } \mathrm{Kn_m} \leq \mathscr{O}(\alpha^0)\,; \\ \bullet \text{ la loi de Klinkenberg lorsque } \mathscr{O}(\alpha^0) < \mathrm{Kn_m} < \mathscr{O}(\alpha^{-1})\,; \\ \bullet \text{ la loi de Knudsen lorsque } \mathrm{Kn_m} \geq \mathscr{O}(\alpha^{-1}). \end{cases} \tag{5.21}$$

5.2.1.2 Régimes d'écoulement dans les macropores

Le régime d'écoulement dans les macropores est conditionné par l'ordre de grandeur du nombre de Knudsen $\mathrm{Kn_p}$. Comme λ_p est défini à l'échelle de la période, on mesure l'ordre de grandeur de $\mathrm{Kn_p}$ en fonction du rapport d'échelles ε. Les ordres de grandeur en $\mathscr{O}(\varepsilon)$ issus de l'étude en milieu à simple porosité ne sont pas modifiés par la présence de la microporosité dans la matrice. On considère donc que l'écoulement dans le réseau de macropores est :

$$\begin{cases} \bullet \text{ un écoulement sans glissement lorsque } \mathrm{Kn_p} \leq \mathscr{O}(\varepsilon)\,; \\ \bullet \text{ un écoulement avec glissement lorsque } \mathscr{O}(\varepsilon) \ll \mathrm{Kn_p} \leq \mathscr{O}(\varepsilon^0)\,; \\ \bullet \text{ un écoulement moléculaire de Knudsen lorsque } \mathrm{Kn_p} > \mathscr{O}(\varepsilon^0). \end{cases} \tag{5.22}$$

Comme on se limite aux passages micro-macro de type continu-continu, le cas d'un écoulement de Knudsen est écarté, ce qui conduit à se limiter à

$$\mathrm{Kn_p} \leq \mathscr{O}(\varepsilon^0). \tag{5.23}$$

5.2.1.3 Combinaisons possibles

Comme les ordres de grandeur des nombres de Knudsen sont reliés par (Eq. 5.19), les définitions (Eq. 5.16) et (Eq. 5.20) de α et de $\mathrm{Kn_m}$ entraînent :

$$\mathrm{Kn_p} = \mathscr{O}(\alpha \mathrm{Kn_m}) = \mathscr{O}(\alpha^{q+1}) = \mathscr{O}(\varepsilon^{n(q+1)}). \tag{5.24}$$

La relation ci-dessus montre que le nombre de Knudsen dans les macropores dépend à la fois du régime d'écoulement dans la matrice microporeuse (q) et des caractéristiques géométriques du milieu à double porosité (n). On en déduit que le régime d'écoulement dans les macropores est :

$$\begin{cases} \bullet \text{ un écoulement sans glissement lorsque } n \geq \dfrac{1}{q+1}\,; \\ \bullet \text{ un écoulement avec glissement lorsque } 0 \leq n(q+1) < 1\,. \end{cases} \tag{5.25}$$

Du fait de la relation qui existe entre les ordres de grandeur des deux nombres de Knudsen (Eq. 5.24), la restriction (Eq. 5.23) imposée sur l'ordre de grandeur de $\mathrm{Kn_p}$ entraîne les limitations suivantes sur les ordres de grandeur de $\mathrm{Kn_m}$ qui doivent être considérés :

$$\mathrm{Kn_m} = \mathscr{O}(\alpha^q) \text{ avec } q \leq -1.$$

Le régime d'écoulement dans la matrice est ainsi :

$$\begin{cases} \bullet \text{ la loi de Darcy lorsque } q \geq 0\,; \\ \bullet \text{ la loi de Klinkenberg lorsque } -1 < q < 0\,; \\ \bullet \text{ la loi de Knudsen lorsque } q = -1. \end{cases} \tag{5.26}$$

Les ordres de grandeur (Eq. 5.26) et (Eq. 5.25) conduisent à distinguer les quatre combinaisons de régimes locaux d'écoulement qui sont récapitulées dans le tableau (TAB. 5.1) (Chastanet, 2004). La figure (FIG. 5.3 visualise les domaines de validité des quatre combinaisons de régimes locaux d'écoulements (*Cf.* TAB. 5.1) sur un diagramme $\mathrm{Kn_m}$-α. Les domaines de validité des régimes locaux d'écoulements dans les macropores sont mis en évidence sur la figure (FIG. 5.4).

$\mathscr{A}$:	$q \geq 0$ Loi de Darcy dans la matrice microporeuse Ecoulement sans glissement dans les macropores
$\mathscr{B}$:	$-1 < q < 0$ et $n \geq \dfrac{1}{q+1}$ Loi de Klinkenberg dans la matrice microporeuse Ecoulement sans glissement dans les macropores
$\mathscr{C}$:	$-1 < q < 0$ et $n < \dfrac{1}{q+1}$ Loi de Klinkenberg dans la matrice microporeuse Ecoulement avec glissement dans les macropores
$\mathscr{D}$:	$q = -1$ Loi de Knudsen dans la matrice microporeuse Ecoulement avec glissement dans les macropores

Tableau 5.1 – *Les quatre combinaisons de régimes locaux d'écoulement.*

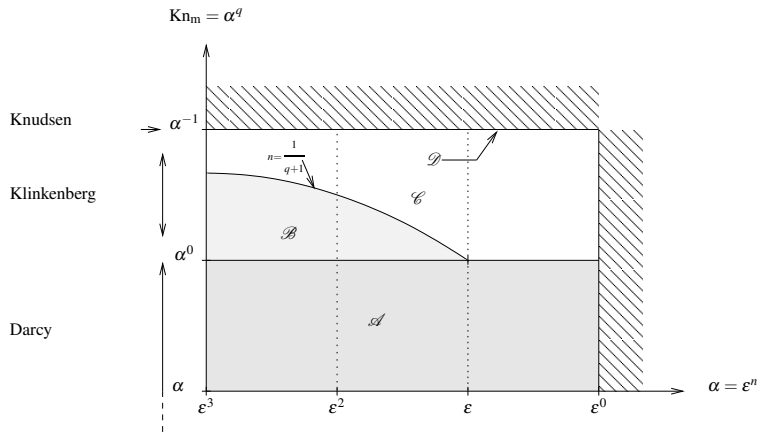

FIGURE 5.3 – *Diagramme* $\mathrm{Kn_m}$-α *des domaines de validité des quatre combinaisons de régimes d'écoulements.*

5.2.2 Commentaires et interprétation

Les quatre combinaisons d'écoulements locaux identifiés conduisant à neuf modèles macroscopiques (TAB. 5.2). Chacun de ces modèles s'identifie par deux propriétés fondamentales : le type de comportement à double porosité qu'il décrit (effet réservoir, double porosité, simple porosité) et sa perméabilité effective (perméabilité au liquide, perméabilité au gaz de Klinkenberg et perméabilité au gaz non-linéaire) qui caractérise le régime d'écoulement macroscopique.

• **Régime macroscopique de Darcy**

Modèle avec effet réservoir (I_l) : $n < 1$

$$\phi \frac{\partial p}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot (p \frac{\bar{\bar{K}}_{\mathrm{p}}}{\mu} \vec{\nabla} p) = 0$$

Modèle à double porosité (II_l) : $n = 1$

$$\phi_{\mathrm{p}} \frac{\partial p_{\mathrm{p}}}{\partial t} + \phi_{\mathrm{M}} \frac{\partial < p_{\mathrm{M}} >_{\Omega}^{\Omega_{\mathrm{M}}}}{\partial t^*} - \vec{\nabla} \cdot (p_{\mathrm{p}} \frac{\bar{\bar{K}}_{\mathrm{p}}}{\mu} \vec{\nabla} p_{\mathrm{p}}) = 0$$

$$\begin{cases} \phi_{\mathrm{M}} \frac{\partial p_{\mathrm{M}}}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot (p_{\mathrm{M}} \frac{K_{\mathrm{M}}}{\mu} \vec{\nabla} p_{\mathrm{M}}) = 0 & \text{dans } \Omega_{\mathrm{M}} \\ p_{\mathrm{M}} = p_{\mathrm{p}} & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

Modèle à simple porosité (III_l) : $n > 1,\ -1 < q < 0,\ n \geq 1/q + 1.$

$$\phi_{\mathrm{p}} \frac{\partial p_{\mathrm{p}}}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot (p_{\mathrm{p}} \frac{\bar{\bar{K}}_{\mathrm{p}}}{\mu} \vec{\nabla} p_{\mathrm{p}}) = 0$$

• **Régime macroscopique de Klinkenberg**

Modèle avec effet réservoir (I_g) : $n < 2/q + 2$

$$\phi \frac{\partial p}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot (p \frac{\bar{\bar{K}}_{\mathrm{p_g}}}{\mu} \vec{\nabla} p) = 0$$

Modèle à double porosité (II_g) : $n = 2/q + 2$

$$\phi_{\mathrm{p}} \frac{\partial p_{\mathrm{p}}}{\partial t} + \phi_{\mathrm{M}} \frac{\partial < p_{\mathrm{M}} >_{\Omega}^{\Omega_{\mathrm{M}}}}{\partial t^*} - \vec{\nabla} \cdot (p_{\mathrm{p}} \frac{\bar{\bar{K}}_{\mathrm{p_g}}}{\mu} \vec{\nabla} p_{\mathrm{p}}) = 0$$

$$\begin{cases} \phi_{\mathrm{M}} \frac{\partial p_{\mathrm{M}}}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot (p_{\mathrm{M}} \frac{K_{\mathrm{M_g}}}{\mu} \vec{\nabla} p_{\mathrm{M}}) = 0 & \text{dans } \Omega_{\mathrm{M}} \\ p_{\mathrm{M}} = p_{\mathrm{p}} & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

Modèle à simple porosité (III_g) : $n > 2/q + 2.$

$$\phi_{\mathrm{p}} \frac{\partial p_{\mathrm{p}}}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot (p_{\mathrm{p}} \frac{\bar{\bar{K}}_{\mathrm{p_g}}}{\mu} \vec{\nabla} p_{\mathrm{p}}) = 0$$

• **Régime macroscopique de transition non-linéaire**

Modèle avec effet réservoir (I_G) : $n < 2$

$$\phi \frac{\partial p}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot (p \frac{\bar{\bar{K}}_{\mathrm{pG}}}{\mu} \vec{\nabla} p) = 0$$

Modèle à double porosité (II_G) : $n = 2$

$$\phi_{\mathrm{p}} \frac{\partial p_{\mathrm{p}}}{\partial t} + \phi_{\mathrm{M}} \frac{\partial < p_{\mathrm{M}} >_{\Omega}^{\Omega_{\mathrm{M}}}}{\partial t^*} - \vec{\nabla} \cdot (p_{\mathrm{p}} \frac{\bar{\bar{K}}_{\mathrm{pG}}}{\mu} \vec{\nabla} p_{\mathrm{p}}) = 0$$

$$\begin{cases} \phi_{\mathrm{M}} \frac{\partial p_{\mathrm{M}}}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot (p_{\mathrm{M}} \frac{D_{\mathrm{M}_g}}{p_{\mathrm{M}}} \vec{\nabla} p_{\mathrm{M}}) = 0 & \text{dans } \Omega_{\mathrm{M}} \\ p_{\mathrm{M}} = p_{\mathrm{p}} & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

Modèle à simple porosité (III_G) : $n > 2$

$$\phi_{\mathrm{p}} \frac{\partial p_{\mathrm{p}}}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot (p_{\mathrm{p}} \frac{\bar{\bar{K}}_{\mathrm{pG}}}{\mu} \vec{\nabla} p_{\mathrm{p}}) = 0$$

Tableau 5.2 – *Modèles macroscopiques pour l'écoulement d'un gaz à faible pression en milieu à double porosité.*

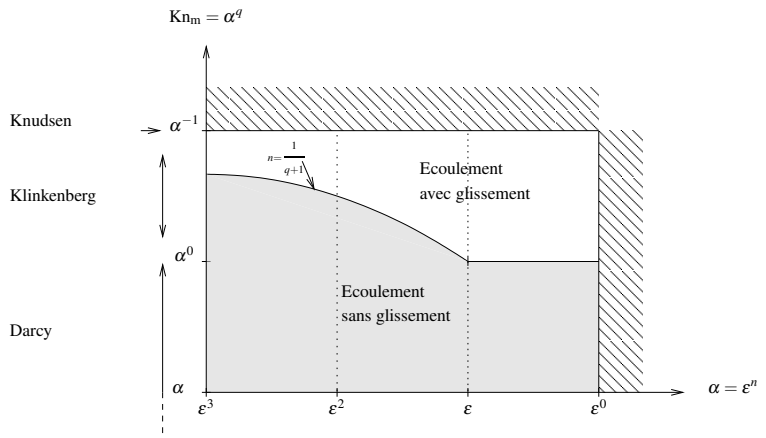

FIGURE 5.4 – *Diagramme* $\mathrm{Kn_m}$-α *des régimes locaux d'écoulements dans les macropores.*

5.2.2.1 Types de comportements macroscopiques

On retrouve les trois types de comportements macroscopiques spécifiques aux milieux à double porosité :

Type I : comportement avec effet réservoir

$$\phi_\Gamma \frac{\partial p}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot (p \frac{\bar{\bar{K}}_\mathrm{p}^\mathrm{eff}}{\mu} \vec{\nabla} p) = 0 \tag{5.27}$$

Type II : comportement à double porosité

$$\phi_\mathrm{p} \frac{\partial p_\mathrm{p}}{\partial t} + \phi_\mathrm{m} \frac{\partial < p_\mathrm{M} >_\Omega^{\Omega_\mathrm{M}}}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot (p_\mathrm{p} \frac{\bar{\bar{K}}_\mathrm{p}^\mathrm{eff}}{\mu} \vec{\nabla} p_\mathrm{p}) = 0 \tag{5.28}$$

Type III : comportement à simple porosité

$$\phi_\mathrm{p} \frac{\partial p_\mathrm{p}}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot (p_\mathrm{p} \frac{\bar{\bar{K}}_\mathrm{p}^\mathrm{eff}}{\mu} \vec{\nabla} p_\mathrm{p}) = 0 \tag{5.29}$$

Dans les équations ci-dessus, $\bar{\bar{K}}_\mathrm{p}^\mathrm{eff}$ désigne la perméabilité effective et peut prendre différentes valeurs. Dans les modèles de type II, la pression dans la matrice microporeuse vérifie un problème aux limites de la forme suivante :

$$\begin{cases} \phi_\mathrm{m} \dfrac{\partial p_\mathrm{M}}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot (p_\mathrm{M} \kappa_\mathrm{M}^\mathrm{eff} \vec{\nabla} p_\mathrm{M}) = 0 \quad \text{dans } \Omega_\mathrm{M}, \\ p_\mathrm{M} = p_\mathrm{p} \quad \text{sur } \Gamma, \end{cases} \tag{5.30}$$

où la valeur de κ_{M} dépend du régime d'écoulement qui est considéré dans la matrice :

$$\kappa_{\mathrm{M}} = \begin{cases} \dfrac{K_{\mathrm{M}}}{\mu} & \text{modèle II}_l \text{ (loi de Darcy)}; \\ \dfrac{K_{\mathrm{M_g}}}{\mu} & \text{modèle II}_{\mathrm{g}} \text{ (loi de Klinkenberg)}; \\ \dfrac{D_{\mathrm{M_g}}}{p_{\mathrm{M}}} & \text{modèle II}_{\mathrm{G}} \text{ (loi de Knudsen)}. \end{cases} \tag{5.31}$$

Les domaines de validité de ces trois types de comportements macroscopiques sont présentés sur la figure (FIG. 5.5) sur un diagramme $\mathrm{Kn_m}$-α, qui révèle l'existence d'une courbe à double de porosité qui divise l'espace $\mathrm{Kn_m}$-α en deux parties : une zone correspondant à l'effet réservoir et une autre pour le comportement à simple porosité. La forme de la courbe reflète le fait que lorsque l'écoulement local est régi par la loi de Darcy, le type de comportement ne dépend que de la géométrie caractérisée par la valeur de n, alors que lorsque l'écoulement local est régi par la loi de Klinkenberg, le type de comportement macroscopique est conditionné à la fois par n et q, ce qui indique qu'en plus de dépendre de la géométrie du milieu le comportement dépend également du nombre de Knudsen dans les micropores. On voit que lorsque n est compris entre 1 et 2, les trois types de comportements peuvent être obtenus, ce qui signifie qu'un même milieu peut, selon la valeur du nombre de Knudsen dans la matrice microporeuse avoir les trois types de comportements.

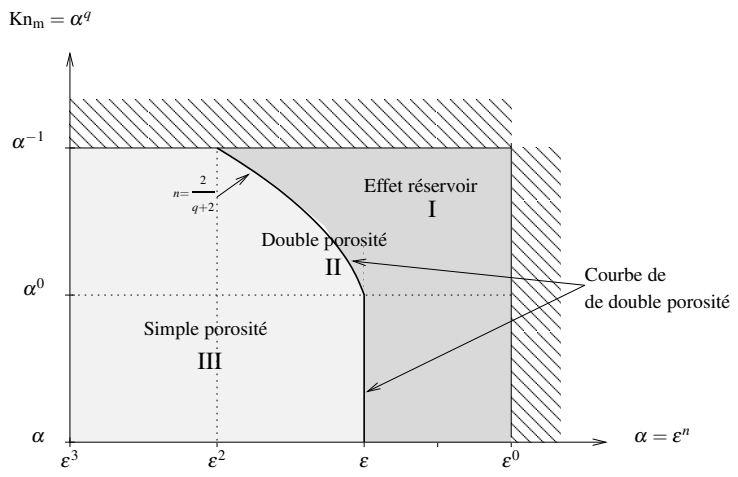

FIGURE 5.5 – *Diagramme* $\mathrm{Kn_m}$-α *des types de comportements macroscopiques.*

5.2.3 Perméabilités effectives

On obtient trois perméabilités effectives suivant l'ordre de grandeur de $\mathrm{Kn_m}$ en fonction de α. Ces trois perméabilités effectives sont des propriétés du réseau de macropores. Ceci résulte de la prédominance de l'écoulement dans les macropores. La perméabilité effective notée $\bar{\bar{K}}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{eff}}$ dans les équations (Eqs. (5.27), (5.28), (5.29)) peut donc être

— la perméabilité au liquide $\bar{\bar{K}}_{\mathrm{p}}$,
— la perméabilité au gaz de Klinkenberg $\bar{\bar{K}}_{\mathrm{p_g}}$,
— la perméabilité au gaz non-linéaire $\bar{\bar{K}}_{\mathrm{p_G}}$.

Les trois perméabilités effectives caractérisent le régime macroscopique d'écoulement du gaz :

• Régime macroscopique de Darcy	lorsque	$\bar{\bar{K}}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{eff}} = \bar{\bar{K}}_{\mathrm{p}}^{*}$
• Régime macroscopique de Klinkenberg	lorsque	$\bar{\bar{K}}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{eff}} = \bar{\bar{K}}_{\mathrm{p_g}}^{*}$
• Régime macroscopique de transition entre régimes de Klinkenberg et de Knudsen	lorsque	$\bar{\bar{K}}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{eff}} = \bar{\bar{K}}_{\mathrm{p_G}}^{*}$

Les domaines de validité des trois perméabilités effectives et donc des trois régimes macroscopiques de transport sont présentés sur la figure (FIG. 5.6) sur un diagramme $\mathrm{Kn_m}$-α. Ils révèlent l'existence d'une courbe de perméabilité au gaz au dessus de laquelle la perméabilité effective est une perméabilité au gaz et en dessous de laquelle il s'agit de la perméabilité intrinsèque. On remarque que la zone de perméabilité intrinsèque n'est pas limitée à la zone où le régime local d'écoulement est un régime de Darcy. En effet, la zone qui correspond au cas $\mathscr{B}$ (FIG. 5.4) se caractérise par un régime local de Klinkenberg et un régime macroscopique de Darcy. Pour un ordre de grandeur donné du nombre de Knudsen $\mathrm{Kn_m}$ à l'intérieur de cette zone, la perméabilité effective est soit la perméabilité au liquide, soit la perméabilité au gaz de Klinkenberg, selon l'ordre de grandeur de α. Ceci indique que la perméabilité effective dépend alors de la taille des micropores. La forme de la courbe de perméabilité au gaz montre en outre que plus la taille de micropores est grande, plus l'ordre de grandeur du nombre de Knudsen qui est nécessaire pour obtenir un effet Klinkenberg macroscopique est petit. Ceci montre que la microporosité a une influence notable sur la perméabilité effective, bien que celle-ci soit une propriété du réseau de macropores.

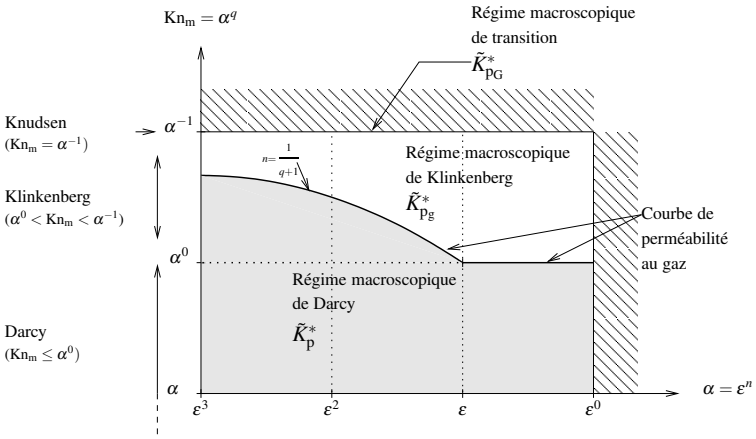

FIGURE 5.6 – *Diagramme* $\mathrm{Kn_m}$-α *des perméabilités effectives.*

5.2.3.1 Domaines de validité des modèles

Les neuf modèles macroscopiques résultent de la combinaison des trois types de comportements et des trois perméabilités effectives. En superposant les domaines de validité des trois types de comportements (FIG. 5.5) avec ceux des trois perméabilités effectives (FIG. 5.6), on obtient les domaines de validité des neuf modèles macroscopiques (FIG. 5.7).

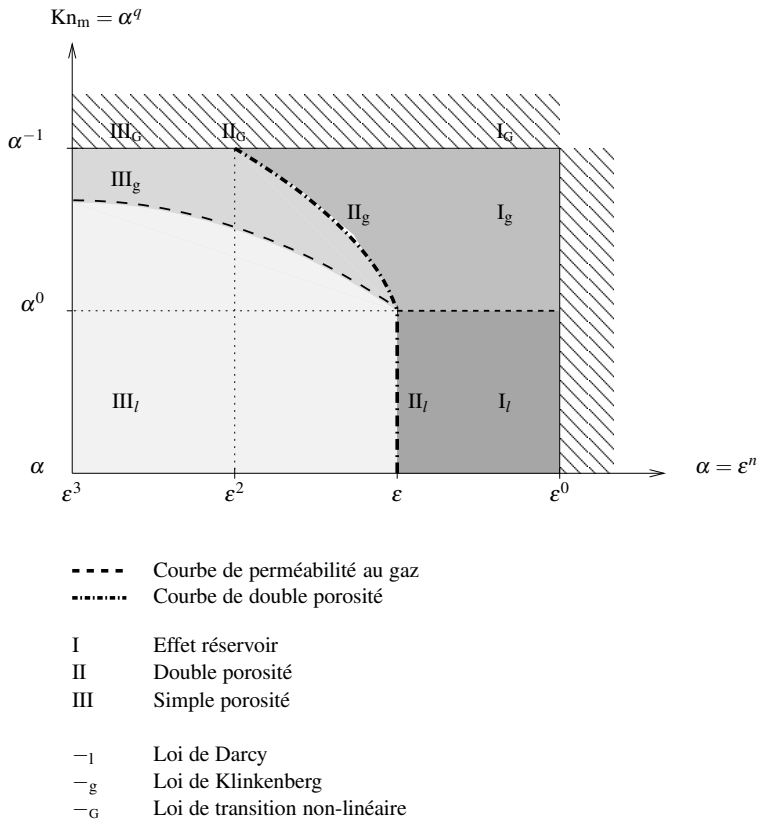

FIGURE 5.7 – *Diagramme* $\mathrm{Kn_m}$-α *des domaines de validité des modèles macroscopiques.*

Chacun des neuf modèles se caractérise par le type de comportement qu'il décrit et sa perméabilité effective. Les domaines de validité des modèles ne dépendent pas uniquement de la séparation des échelles entre micropores et macropores, ils sont également conditionnés par le nombre de Knudsen dans la matrice. Dans le cas de l'écoulement d'un gaz à faible pression en milieu à double porosité, le comportement macroscopique dépend du régime local d'écoulement et la perméabilité effective est conditionnée par la taille de micropores.

5.3 Effet Klinkenberg en milieu composite

5.3.1 Description locale

L'objectif est d'examiner si la loi de Klinkenberg est conservée à grande échelle. Pour cela, on considère la loi de Klinkenberg dans chacun des constituants d'un milieu poreux composite bi-constituant (FIG. 3.1.) et on homogénéise le comportement local afin d'examiner la loi à grande échelle (Chastanet et al., 2004).

Considérons l'écoulement d'un gaz barotrope à équation d'état linéaire, décrit par le système :

$$\begin{cases} \vec{\nabla}\cdot(p_\gamma \tilde{k}_{\mathrm{g}_\gamma}\vec{\nabla}p_\gamma) = 0 \qquad (\gamma = 1,2), & (5.1)\\ (p_1\tilde{k}_{\mathrm{g}_1}\vec{\nabla}p_1)\cdot\vec{n} = (p_2\tilde{k}_{\mathrm{g}_2}\vec{\nabla}p_2)\cdot\vec{n} \qquad \text{sur } \Gamma, & (5.2)\\ p_1 = p_2 \qquad \text{sur } \Gamma. & (5.3)\end{cases}$$

Les deux conductivités au gaz $\tilde{k}_{\mathrm{g}_1}$ et $\tilde{k}_{\mathrm{g}_2}$ vérifient :

$$\tilde{k}_{\mathrm{g}_\gamma} = \tilde{k}_\gamma(1+\frac{b_\gamma}{p_\gamma}) \qquad (\gamma = 1,2). \tag{5.4}$$

On suppose que le constituant 1 est le plus conducteur :

$$k_{1_\mathrm{c}} \geq k_{2_\mathrm{c}},$$

5.3.2 Modèles homogénéisés

On obtient deux modèles selon l'ordre de grandeur du rapport de conductivités :

$$\mathbb{R}_\mathrm{k} = \frac{k_{2_\mathrm{c}}}{k_{1_\mathrm{c}}} \qquad \text{(rapport des conductivités).} \tag{5.5}$$

Notons que dans cette écriture on a supposé :

$$\frac{b_{1_c}}{p_c} = \mathscr{O}(\varepsilon^0) \qquad \frac{b_{2_c}}{p_c} = \mathscr{O}(\varepsilon^0),$$

et que par conséquent, les valeurs caractéristiques des perméabilités au gaz sont celles des perméabilités au liquide :

$$k_{g_{1_c}} = k_{1_c} \qquad k_{g_{2_c}} = k_{2_c}.$$

• **Modèle à conductivité globale (A)** : $\mathbb{R}_k = \mathscr{O}(\varepsilon^0)$

$$\vec{\nabla}\cdot(p\tilde{k}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{g_T}}\vec{\nabla}p) = 0, \tag{5.6}$$

où $p = p_1 = p_2$ et où $\tilde{k}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{g_T}}$ est la conductivité effective au gaz globale, c'est-à-dire qu'elle dépend des conductivités au gaz des deux constituants.

• **Modèle à conductivité partielle (B)** : $\mathbb{R}_k \leq \mathscr{O}(\varepsilon)$

$$\vec{\nabla}\cdot(p_1\tilde{k}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{g}_1}\vec{\nabla}p_1) = 0, \tag{5.7}$$

où $\tilde{k}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{g}_1}$ est la conductivité effective au gaz partielle et ne dépend que de la conductivité au gaz du constituant le plus conducteur.

5.3.3 Conductivités effectives

La loi de Klinkenberg est vérifiée si la conductivité effective au gaz s'écrit sous la forme :

$$\tilde{k}_{\mathrm{g}}^{\mathrm{eff}} = \tilde{k}^{\mathrm{eff}}(\tilde{I} + \frac{\tilde{J}}{p}) \qquad (\tilde{J} \text{ indépendant de } p), \tag{5.8}$$

avec

$$\tilde{k}_{\mathrm{g}}^{\mathrm{eff}} = \tilde{k}_{\mathrm{gT}}^{\mathrm{eff}}, \qquad \text{ou} \qquad \tilde{k}_{\mathrm{gT}}^{\mathrm{eff}} = \tilde{k}_{\mathrm{g1}}^{\mathrm{eff}},$$

et où $\tilde{k}^{\mathrm{eff}}$ est la conductivité effective au liquide correspondante :

$$\tilde{k}^{\mathrm{eff}} = \tilde{k}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{eff}}, \qquad \text{ou} \qquad \tilde{k}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{eff}} = \tilde{k}_{1}^{\mathrm{eff}}.$$

5.3.3.1 Conductivité effective au gaz globale

Dans le cas le plus général de constituants hétérogènes, la conductivité effective au gaz globale $\tilde{k}_{\mathrm{gT}}^{\mathrm{eff}}$ qui apparaît dans le modèle A vérifie une expression du type

$$\tilde{k}_{\mathrm{gT}}^{\mathrm{eff}} = \tilde{G}_{\mathrm{T}}(\tilde{I} + \frac{\tilde{J}_{\mathrm{T}}}{p}) \qquad \text{où } \tilde{G}_{\mathrm{T}} \neq \tilde{k}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{eff}} \text{ et } \tilde{J}_{\mathrm{T}} = \tilde{J}_{\mathrm{T}}(p),$$

où $\tilde{k}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{eff}}$ désigne la perméabilité effective globale au liquide. La propriété (Eq. 5.8) n'est donc pas vérifiée puisque le tenseur $\tilde{J}_{\mathrm{T}}$ dépend de la pression.

Dans le cas particulier de constituants homogènes, $\tilde{k}_{\mathrm{gT}}^{\mathrm{eff}}$ vérifie :

$$\tilde{k}_{\mathrm{gT}}^{\mathrm{eff}} = \tilde{G}_{\mathrm{T}}(\tilde{I} + \frac{1}{p^{*(0)}}\tilde{J}_{\mathrm{T}}), \tag{5.9}$$

où

$$\begin{cases} \bullet\ \tilde{G}_{\mathrm{T}} = \tilde{k}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{eff}} \text{ et } \tilde{J}_{\mathrm{T}} \text{ indépendant de } p & \text{si } b_1 = b_2, \\ \bullet\ \tilde{G}_{\mathrm{T}} \neq \tilde{k}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{eff}} \text{ et } \tilde{J}_{\mathrm{T}} = \tilde{J}_{\mathrm{T}}(p) & \text{si } b_1 \neq b_2. \end{cases}$$

La propriété (Eq. 5.8) n'est donc vérifiée que lorsque les deux constituants sont homogènes et que les deux coefficients de Klinkenberg sont égaux.

5.3.3.2 Conductivité effective au gaz partielle

Dans le cas de constituants hétérogènes, la conductivité effective au gaz partielle qui apparaît dans le modèle B $\tilde{k}_{\mathrm{g1}}^{\mathrm{eff}}$ vérifie une expression du type :

$$\tilde{k}_{\mathrm{g1}}^{\mathrm{eff}} = \tilde{G}_{1}(\tilde{I} + \frac{\tilde{J}_{1}}{p}) \qquad \text{où } \tilde{G}_{1} \neq \tilde{k}_{1}^{\mathrm{eff}} \text{ et } \tilde{J}_{1} = \tilde{J}_{1}(p).$$

La propriété (Eq. 5.8) n'est donc pas vérifiée. Elle l'est par contre dans le cas particulier de constituants homogènes ou encore lorsque seul le constituant 2 est hétérogène. On en conclut que lorsque la conductivité effective est la conductivité effective partielle $\tilde{k}_{\mathrm{g1}}^{\mathrm{eff}}$, la loi de Klinkenberg est vérifiée lorsque le constituant le plus conducteur est homogène.

Modèle de stockage à conductivité effective globale (I.a)

$$< \phi >_\Omega \frac{\partial p}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot (p \tilde{k}_{\mathrm{g_T}}^{\mathrm{eff}} \vec{\nabla} p) = 0$$

Modèle de stockage à conductivité effective partielle (I.b)

$$< \phi >_\Omega \frac{\partial p}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot (p \tilde{k}_{\mathrm{g_1}}^{\mathrm{eff}} \vec{\nabla} p) = 0$$

Modèle à double conductivité (II)

$$< \phi_1 >_\Omega^{\Omega_1} \frac{\partial p_1}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot (p_1 \tilde{k}_{\mathrm{g_1}}^{\mathrm{eff}} \vec{\nabla} p_1) = - < \phi_2 \frac{\partial p_2}{\partial t} >_\Omega^{\Omega_2}$$

Modèle à simple conductivité (III)

$$< \phi_1 >_\Omega^{\Omega_1} \frac{\partial p_1}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot (p_1 \tilde{k}_{\mathrm{g_1}}^{\mathrm{eff}} \vec{\nabla} p_1) = 0$$

Tableau 5.3 – *Modèles macroscopiques transitoires.*

5.3.4 Remarques de conclusion

L'étude a mis en évidence l'existence de deux conductivités effectives au gaz, suivant que le contraste entre les conductivités des deux constituants est faible ou fort. La loi de Klinkenberg est préservée à grande échelle dans les deux cas suivants :

— A faible contraste de conductivité ($\mathbb{R}_k = \mathscr{O}(\varepsilon^0)$, quand les deux constituants sont homogènes et que les deux coefficients de Klinkenberg sont égaux ;

— A fort contraste de conductivités ($\mathbb{R}_k \leq \mathscr{O}(\varepsilon)$), quand le constituant le plus conducteur est homogène.

Dans toutes les autres situations, la loi de Klinkenberg n'est pas vérifiée et la conductivité effective à grande échelle vérifie une expression du type :

$$\tilde{k}_{\mathrm{g}}^{\mathrm{eff}} = \tilde{G}^{\mathrm{eff}}(\tilde{I} + \frac{1}{p}\tilde{J}^{\mathrm{eff}}) \qquad \text{où } \tilde{G}^{\mathrm{eff}} \neq \tilde{k}^{\mathrm{eff}} \text{ et } \tilde{J}^{\mathrm{eff}} = \tilde{J}^{\mathrm{eff}}(p). \tag{5.10}$$

La loi de Klinkenberg n'est donc préservée que dans quelques cas particuliers à grande échelle. En régime transitoire, on obtient quatre modèles suivant l'ordre de grandeur de $\mathbb{R}_k$:

$$\begin{cases} \mathbb{R}_k = \mathscr{O}(\varepsilon^0) & \text{Modèle de stockage à conductivité globale (I.a) ;} \\ \mathbb{R}_k = \mathscr{O}(\varepsilon) & \text{Modèle de stockage à conductivité partielle (I.b) ;} \\ \mathbb{R}_k = \mathscr{O}(\varepsilon^2) & \text{Modèle à double conductivité (II) ;} \\ \mathbb{R}_k \leq \mathscr{O}(\varepsilon^3) & \text{Modèle à simple conductivité (III).} \end{cases}$$

Ces quatre modèles sont récapitulés dans le tableau (TAB. 5.3). Ils font intervenir les deux perméabilités effectives obtenues en régime permanent. Ces quatre modèles sont de même type que ceux obtenus pour la conduction thermique en milieu composite . Ils s'en distinguent par leur non-linéarité due à la fois à la compressibilité du fluide et aux expressions des conductivités effectives.

6

Transport de soluté en milieu poreux

On présente ici une sélection de résultats obtenus par homogénéisation concernant le transport non-réactif de soluté : en milieu à simple et à double porosité (Auriault and Adler, 1995), (Royer et al., 2002), (Tejchman, 2004), (Royer and Boutin, 2012), en milieu poroélastique (Royer and Cherblanc, 2010, 2016) et en milieu à faible séparation d'échelles (Royer, 2016).

6.1 Transport par convection-diffusion

Considérons un milieu poreux saturé par une phase liquide dont une portion contient un soluté en faible concentration. A l'échelle des pores, le transport du soluté est gouverné par les mécanismes de diffusion moléculaire et de convection. Le phénomène de diffusion résulte des variations de concentration au sein de la phase liquide et le phénomène de convection est le transport de soluté dû à l'écoulement du fluide.

6.1.1 Modèles de la littérature

Quand le fluide est au repos, seule la diffusion moléculaire a lieu à l'échelle locale. Le modèle macroscopique de diffusion s'écrit :

$$\phi_{\mathrm{p}} \frac{\partial c_{\mathrm{p}}}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot \left(\bar{\bar{D}}_{\mathrm{p}}^{D} \vec{\nabla} c_{\mathrm{p}} \right) = 0, \tag{6.1}$$

où ϕ_{p} désigne la porosité de l'échantillon poreux, $\bar{\bar{D}}_{\mathrm{p}}^{D}$ est le tenseur de diffusion effective, ou de diffusivité du milieu et est défini par (Bear, 1972), (Bear and Bachmat, 1990)

$$\bar{\bar{D}}_{\mathrm{p}}^{D} = \phi_{\mathrm{p}} \, D_0 \bar{\bar{T}}_{\mathrm{p}}, \tag{6.2}$$

où $\bar{\bar{T}}_{\mathrm{p}}$ est la tortuosité du milieu.

Lorsque le fluide est en mouvement, le transport macroscopique est décrit par le modèle d'advection-dispersion

$$\phi_{\mathrm{p}} \frac{\partial c_{\mathrm{p}}}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot (\bar{\bar{D}}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{ph}} \vec{\nabla} c_{\mathrm{p}}) + \vec{V}_{\mathrm{p}} \cdot \vec{\nabla} c_{\mathrm{p}} = 0. \tag{6.3}$$

$\vec{V}_{\mathrm{p}}$ désigne la vitesse d'écoulement du fluide et vérifie :

$$\vec{V}_{\mathrm{p}} = -\frac{\bar{\bar{K}}_{\mathrm{p}}}{\mu}\vec{\nabla}p_{\mathrm{p}}, \tag{6.4}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{V}_{\mathrm{p}} = 0. \tag{6.5}$$

Le tenseur $\bar{\bar{D}}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{ph}}$ est le tenseur de dispersion hydrodynamique : il dépend de la vitesse $\vec{V}_{\mathrm{p}}$. Il est traditionnellement décomposé en un terme de diffusion et un terme de dispersion hydrodynamique (Bear, 1972), (Bear and Bachmat, 1990) :

$$\bar{\bar{D}}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{ph}} = \bar{\bar{D}}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{D}} + \bar{\bar{D}}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{M}}, \tag{6.6}$$

$$D_{\mathrm{p}_{ij}}^{\mathrm{M}} = \alpha_{\mathrm{p}_{ijlm}}\frac{V_{\mathrm{p}_l}V_{\mathrm{p}_m}}{||\,\vec{V}_{\mathrm{p}}\,||}, \tag{6.7}$$

où $\bar{\bar{D}}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{M}}$ désigne le tenseur de dispersion mécanique et où $\bar{\bar{\bar{\alpha}}}_{\mathrm{p}}$ est la dispersivité.

Il existe un régime intermédiaire entre la diffusion et la dispersion. Il s'agit du régime d'advection-diffusion :

$$\phi_{\mathrm{p}}\frac{\partial c_{\mathrm{p}}}{\partial t} - \vec{\nabla}\cdot(\bar{\bar{D}}_{\mathrm{p}}^{D}\vec{\nabla}c_{\mathrm{p}}) + \vec{V}_{\mathrm{p}}\cdot\vec{\nabla}c_{\mathrm{p}} = 0. \tag{6.8}$$

Ce régime de transport est très peu relevé dans la littérature relative au transport de polluants en milieux géologiques. Il est par contre pertinent de le prendre en compte pour la modélisation de couplages électro-chimio-mécaniques dans les milieux gonflants tels que les argiles ou les cartilages (Moyne and Murad, 2006a) et il s'agit du mécanisme de transport usuel dans les tissus biologiques (*e.g.* (Becker and Kuznetsov, 2013), (Ambard and Swider, 2006), (Swider et al., 2010)).

6.1.2 Modèles homogénéisés de transport par diffusion et convection

6.1.2.1 Description à l'échelle des pores

On considère le transport par convection-diffusion d'un soluté dans le milieu poreux à simple porosité (FIG. 5.1). Les équations décrivant le transport du soluté sur la période Ω s'écrivent :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial c_{\mathrm{p}}}{\partial t} - \vec{\nabla}\cdot(D\vec{\nabla}c_{\mathrm{p}} - c_{\mathrm{p}}\vec{v}_{\mathrm{p}}) = 0 \quad \text{dans } \Omega_{\mathrm{p}}, & (6.9)\\ (D\vec{\nabla}c_{\mathrm{p}})\cdot\vec{n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma. & (6.10)\end{cases}$$

La vitesse $\vec{v}_{\mathrm{p}}$ vérifie :

$$\begin{cases} \mu\Delta\vec{v}_{\mathrm{p}} - \vec{\nabla}p_{\mathrm{p}} = \vec{0} \quad \text{dans } \Omega_{\mathrm{p}}, & (6.11)\\ \vec{\nabla}\cdot\vec{v}_p = 0 \quad \text{dans } \Omega_{\mathrm{p}}, & (6.12)\\ \vec{v}_{\mathrm{p}} = \vec{0} \quad \text{sur } \Gamma. & (6.13)\end{cases}$$

6.1.2.2 Modèles homogénéisés

L'homogénéisation de la description locale (Auriault and Adler, 1995) permet de retrouver les trois régimes de transport mentionnés ci-dessus, et d'en préciser les domaines de validité en fonction de l'ordre de grandeur du nombre de Péclet

$$\mathbb{P}\mathrm{e}_{\mathrm{p_L}} = \frac{v_{\mathrm{p_c}} L}{D_{\mathrm{c}}}. \tag{6.14}$$

Il est ainsi obtenu :

$$\begin{cases} \mathbb{P}\mathrm{e}_{\mathrm{p_L}} \leq \mathscr{O}(\varepsilon) \ : & \text{Modèle de diffusion} \\ \mathbb{P}\mathrm{e}_{\mathrm{p_L}} = \mathscr{O}(\varepsilon^0) \ : & \text{Modèle d'advection-diffusion} \\ \mathbb{P}\mathrm{e}_{\mathrm{p_L}} = \mathscr{O}(\varepsilon^{-1}) \ : & \text{Modèle d'advection-dispersion} \\ \mathbb{P}\mathrm{e}_{\mathrm{p_L}} \geq \mathscr{O}(\varepsilon^{-2}) \ : & \text{Pas de modèle homogénéisé} \end{cases} \tag{6.15}$$

Les modèles homogénéisés de diffusion et d'advection-diffusion sont des modèles du premier ordre. Ils sont identiques aux modèles (Eq. (6.1)) et (Eq. (6.8)) : le tenseur de diffusion effective obtenu par homogénéisation (Dormieux and Lemarchand, 2000), (Quintard, 1993) vérifie la propriété (Eq. (6.2)).

Par contre, le modèle homogénéisé d'advection dispersion est différent du modèle classique de la littérature (Eq. (6.3)). Il s'agit d'un modèle du second ordre, ce qui a en particulier pour conséquence que la vitesse ne vérifie plus la loi de Darcy. De plus, le tenseur de dispersion homogénéisé ne vérifie pas la relation (Eq. (6.6)). A fort nombre de Péclet $\mathbb{P}\mathrm{e}_{\mathrm{p_L}} \geq \mathscr{O}(\varepsilon^{-2})$, il n'existe plus de modèle macroscopique équivalent car le problème devient dépendant des conditions aux limites macroscopiques.

6.1.2.3 Commentaires sur le modèle homogénéisé de dispersion

La dispersion est un phénomène reconnu comme dépendant de la longueur d'observation (donc par définition non-homogénéisable) lorsqu'il est pleinement développé. L'existence d'un modèle homogénéisé de dispersion, donc par définition d'un modèle intrinsèque est un résultat important. Comme nous allons le voir, ce modèle homogénéisé présente de nombreuses fragilités. Il s'écrit :

$$\phi_{\mathrm{p}} \frac{\partial c_{\mathrm{p}}}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot (\bar{\bar{D}}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{H}} \vec{\nabla} c_{\mathrm{p}}) + < \vec{v}_{\mathrm{p}} >_{\Omega} \cdot \vec{\nabla} c_{\mathrm{p}} = 0, \tag{6.16}$$

La particularité de ce modèle est qu'il s'agit d'un modèle du second ordre. En s'arrêtant au premier ordre, on obtient un modèle d'advection pure. La vitesse $< \vec{\vec{v}}_{\mathrm{p}} >_{\Omega}$ est donc la vitesse au second ordre et ne vérifie pas la loi de Darcy. Le tenseur de dispersion homogénéisé ne vérifie pas la relation (Eq. (6.6)). De plus, il est non-symétrique (Auriault et al., 2010), (Valdés-Parada et al., 2016).

Loi d'écoulement L'équation de transport (Eq. 6.16) fait intervenir un terme de vitesse du second ordre. La détermination et l'analyse de la vitesse au second ordre est présentée dans (Auriault et al., 2005), où la loi de Darcy jusqu'à l'ordre trois est étudiée. Dans le cas d'un milieu macroscopiquement homogène (hypothèse qui a été faite pour l'obtention du modèle de dispersion), la vitesse au second ordre s'écrit :

$$< \vec{v}_{\mathrm{p}} >_{\Omega}^{\Omega_{\mathrm{p}}} = -\frac{\bar{\bar{K}}_{\mathrm{p}}}{\mu} \vec{\nabla} p - \frac{\bar{\bar{\bar{N}}}_{\mathrm{p}}}{\mu} \vec{\nabla} p \otimes \vec{\nabla} p, \tag{6.17}$$

et vérifie

$$\vec{\nabla}\cdot < \vec{v}_{\mathrm{p}} >_{\Omega}^{\Omega_{\mathrm{p}}} = 0. \tag{6.18}$$

Dans l'expression (Eq. 6.17), p_{p} désigne la pression au second ordre et le tenseur du troisième ordre $\bar{\bar{\bar{N}}}_{\mathrm{p}}$ est un tenseur correcteur de perméabilité. Le terme correcteur ne peut être négligé puisqu'il est de l'ordre de grandeur du terme de dispersion dans la modèle macroscopique de transport (Eq. 6.16). Le tenseur $\bar{\bar{\bar{N}}}_{\mathrm{p}}$est symétrique par rapport à ses deux derniers indices et antisymétrique par rapport à ses deux premiers indices. Cette propriété d'antisymétrie a pour conséquence que :

$$\vec{\nabla}\cdot(\frac{\tilde{\bar{N}}_{\mathrm{p}}}{\mu}\vec{\nabla}p\otimes\vec{\nabla}p) = 0 \tag{6.19}$$

Le bilan de masse macroscopique (Eq. 6.18) s'écrit donc :

$$\vec{\nabla}\cdot(\frac{\bar{\bar{K}}_{\mathrm{p}}}{\mu}\vec{\nabla}p_{\mathrm{p}}) = 0. \tag{6.20}$$

Il est donc identique au bilan de masse macroscopique au premier ordre, mais avec une erreur relative de l'ordre de ε^2 au lieu de ε. Dans le cas d'un milieu macroscopiquement isotrope, le tenseur $\bar{\bar{\bar{N}}}_{\mathrm{p}}$ est proportionnel au tenseur de permutation. La symétrie par rapport aux deux derniers indices impliquent alors que :

$$\bar{\bar{\bar{N}}} = \tilde{\bar{0}}.$$

La loi d'écoulement du second ordre présente une autre propriété importante. On montre en effet que la vitesse macroscopique au second ordre ne présente pas les propriétés d'un flux, c'est-à-dire qu'il ne s'agit pas d'une moyenne de surface mais de volume. Au premier ordre, la moyenne volumique de $\vec{v}_{\mathrm{p}}$ est identiquement égale à une moyenne de surface. Cette propriété n'est pas vérifiée au second ordre. On montre que le flux macroscopique est lié à la moyenne volumique $< \vec{v}_{\mathrm{p}} >_{\Omega}$ par la relation :

$$< \vec{v}_{\mathrm{p}} >_{\Sigma}^{\Sigma_{\mathrm{p}}} = < \vec{v}_{\mathrm{p}_i} >_{\Omega}^{\Omega_{\mathrm{p}}} + \frac{\bar{\bar{\bar{N}}}_{\mathrm{p}}^{\Sigma}}{\mu}\vec{\nabla}p_{\mathrm{p}}\otimes p_{\mathrm{p}}. \tag{6.21}$$

Le flux macroscopique de fluide, s'écrit donc

$$< \vec{v}_{\mathrm{p}} >_{\Sigma}^{\Sigma_{\mathrm{p}}} = -\frac{\bar{\bar{K}}_{\mathrm{p}}}{\mu}\vec{\nabla}\bar{p} - \frac{1}{\mu}(\bar{\bar{\bar{N}}}_{\mathrm{p}} - \bar{\bar{\bar{N}}}_{\mathrm{p}}^{\Sigma})\vec{\nabla}\bar{p}\otimes\vec{\nabla}\bar{p}. \tag{6.22}$$

Quand il est exprimé en fonction du flux, le modèle d'advection-dispersion (Eq. (6.16)) s'écrit :

$$\phi_{\mathrm{p}}\,\frac{\partial\bar{c}_{\mathrm{p}}}{\partial t} - \vec{\nabla}\cdot(\bar{\bar{D}}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{h}}\vec{\nabla}\bar{c}_{\mathrm{p}}) + < \vec{v}_{\mathrm{p}} >_{\Sigma}\cdot\vec{\nabla}\bar{c}_{\mathrm{p}} = 0, \tag{6.23}$$

où le nouveau tenseur de dispersion $\bar{\bar{D}}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{h}}$ est tel que :

$$\bar{\bar{D}}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{h}} = \bar{\bar{D}}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{H}} - < \vec{v}_{\mathrm{p}}\otimes\vec{x} >_{\Omega}^{\Omega_{\mathrm{p}}}. \tag{6.24}$$

Dans le cas d'un milieu macroscopiquement isotrope (et homogène), les tenseurs correcteurs du troisième ordre disparaissent du fait de leurs propriétés de symétrie et on a alors :

$$< \vec{v}_{\mathrm{p}_i} >_{\Omega}^{\Omega_{\mathrm{p}}} = < \vec{v}_{\mathrm{p}} >_{\Sigma}^{\Sigma_{\mathrm{p}}}, \qquad \bar{\bar{D}}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{H}} = \bar{\bar{D}}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{h}}. \tag{6.25}$$

Tenseur de dispersion La comparaison du tenseur de dispersion effectif avec les nombreuses expressions de la littérature n'a de sens que dans le domaine de validité du modèle homogénéisé : $\mathbb{P}\mathrm{e}_{\mathrm{p_L}} = \mathscr{O}(\varepsilon^{-1})$. Il est intéressant de constater que, bien que distincte de celle du tenseur homogénéisé, l'expression obtenue par Brenner (1980) par la méthode des moments sur un milieu périodique présente de grandes similitudes. Des éléments de comparaison sont présentés dans (Auriault and Adler, 1995).
Les deux expressions du modèle homogénéisé permettant de définir deux tenseurs de dispersion met en évidence qu'il est nécessaire de comparer les modèles complets de dispersion et non de se limiter aux tenseurs (Valdés-Parada et al., 2016). Il s'agit d'une conséquence des propriétés de la vitesse macroscopique du fluide.
Le modèle phénoménologique de dispersion (Eq. 6.3) suggère que le tenseur de dispersion est la résultante de deux contributions indépendantes, diffusion effective et dispersion mécanique, correspondant respectivement aux mécanismes locaux de diffusion moléculaire et de convection. Le tenseur de dispersion homogénéisé ne vérifie pas cette propriété.

6.1.2.4 Analyse des domaines de validité des modèles

Les domaines de validité des trois régimes de transport sont exprimés en ordres de grandeur du nombre de Péclet macroscopique $\mathbb{P}\mathrm{e}_{\mathrm{p_L}}$. Pour analyser la signification de ces domaines de validité, nous allons parallèlement examiner leurs définitions en ordres de grandeur du nombre de Péclet local (FIG. 6.1) :

$$\mathbb{P}\mathrm{e}_{\mathrm{p}_l} = \mathscr{O}(\varepsilon \mathbb{P}\mathrm{e}_{\mathrm{p_L}}). \tag{6.26}$$

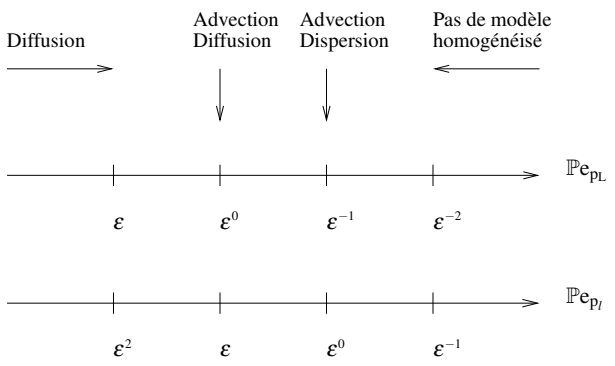

FIGURE 6.1 – *Régimes de transport macroscopiques en fonction des ordres de grandeur de* $\mathbb{P}\mathrm{e}_{\mathrm{p_L}}$ *et de* $\mathbb{P}\mathrm{e}_{\mathrm{p}_l}$.

Pour visualiser la signification de ces ordres de grandeur, considérons le graphe où $\log_\varepsilon(\mathbb{P}\mathrm{e}_{\mathrm{p_L}})$ et $\log_\varepsilon(\log_\varepsilon(\mathbb{P}\mathrm{e}_{\mathrm{p}_l})$ sont respectivement portés en ordonnées et en abscisses (*Cf.* FIG. 6.2). Les ordres de grandeur des deux nombres de Péclet étant reliés par la relation (Eq. 6.26), les trois régimes de transport se situent la droite d'équation :

$$\log_\varepsilon(\mathbb{P}\mathrm{e}_{\mathrm{p_L}}) = \log_\varepsilon(\mathbb{P}\mathrm{e}_{\mathrm{p}_l}) - 1.$$

Or, les nombres de Péclet $\mathbb{P}\mathrm{e}_{\mathrm{p_L}}$ et $\mathbb{P}\mathrm{e}_{\mathrm{p}_l}$ sont les rapports de temps caractéristiques :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\mathrm{e}_{\mathrm{p_L}} &= \frac{v_{\mathrm{p_c}} L}{D_{\mathrm{c}}} = \frac{t_{\mathrm{p_L}}^{\mathrm{diff}}}{t_{\mathrm{p_L}}^{\mathrm{conv}}}, \\ \mathbb{P}\mathrm{e}_{\mathrm{p}_l} &= \frac{v_{\mathrm{p_c}} l}{D_{\mathrm{c}}} = \frac{t_{\mathrm{p}_l}^{\mathrm{diff}}}{t_{\mathrm{p}_l}^{\mathrm{conv}}}, \end{aligned} \tag{6.27}$$

où les temps caractéristiques macroscopiques et locaux de diffusion, $t_{\mathrm{p_L}}^{\mathrm{diff}}$ et $t_{\mathrm{p}_l}^{\mathrm{diff}}$, et de convection, $t_{\mathrm{p_L}}^{\mathrm{conv}}$ et $t_{\mathrm{p}_l}^{\mathrm{conv}}$, sont définis par :

$$\begin{aligned} t_{\mathrm{p_L}}^{\mathrm{diff}} &= \frac{L^2}{D_{\mathrm{c}}} \quad t_{\mathrm{p}_l}^{\mathrm{diff}} = \frac{l^2}{D_{\mathrm{c}}} \\ t_{\mathrm{p_L}}^{\mathrm{conv}} &= \frac{L}{v_{\mathrm{p_c}}} \quad t_{\mathrm{p}_l}^{\mathrm{conv}} = \frac{l}{v_{\mathrm{p_c}}} \end{aligned} \tag{6.28}$$

Le graphe de la figure (FIG. 6.2) permet ainsi de définir chaque régime de transport en termes de temps caractéristiques :

$$\begin{cases} \text{Régime de diffusion :} & t_{\mathrm{p_L}}^{\mathrm{diff}} \ll t_{\mathrm{p_L}}^{\mathrm{conv}} \\ \text{Régime d'advection-diffusion :} & t_{\mathrm{p_L}}^{\mathrm{diff}} = t_{\mathrm{p_L}}^{\mathrm{conv}} \\ \text{Régime d'advection-dispersion :} & t_{\mathrm{p}_l}^{\mathrm{diff}} = t_{\mathrm{p}_l}^{\mathrm{conv}} \\ \text{Pas de modèle homogénéisé :} & t_{\mathrm{p}_l}^{\mathrm{conv}} \ll t_{\mathrm{p}_l}^{\mathrm{diff}} \end{cases} : \tag{6.29}$$

On remarque en particulier que :

— Lorsque il y a égalité des deux temps caractéristiques macroscopiques, $t_{\mathrm{p_L}}^{\mathrm{diff}} = t_{\mathrm{p_L}}^{\mathrm{conv}}$, il y a superposition sans couplage des deux phénomènes à l'échelle macroscopique : c'est le régime d'advection-diffusion.

— Lorsque il y a égalité des deux temps caractéristiques locaux, $t_{\mathrm{p}_l}^{\mathrm{diff}} = t_{\mathrm{p}_l}^{\mathrm{conv}}$, un couplage émerge par transition d'échelles : c'est le régime de dispersion.

Ces résultats se généralisent : ils sont en effet vérifiés dès lors qu'on a deux phénomènes transitoires à l'échelle des pores. Le second résultat permet de détecter les couplages qui apparaissent par transition d'échelle. C'est ce qui a permis d'anticiper qu'il y aurait un couplage pour le transport advectif-diffusif en milieu poroélastique (*Cf.* §6.3).

6.2 Transport en milieu à double porosité

De très nombreuses études expérimentales *situ* et *ex situ* sur le transport de soluté en milieu à double porosité, font état d'effets de retard sur les profils de concentration (Grisack and Pickens, 1980), (Rao et al., 1980), (Lafolie et al., 1997), Drazer et al. (1998), (Freeze and Cherry, 1979), (Neretnieks, 1980), (Lever et al., 1983), (Fetter, 1993), (Moreno et al., 1997). Ces profils anormaux sont attribués à la présence de la microporosité qui jouerait un rôle dans la rétention des polluants. Toutefois, les modèles existant ne permettent pas une prévision fiable des temps de transfert d'une pollution en milieu géologique à double porosité : les temps de transfert mesurés in situ sont très souvent inférieurs de plusieurs décades aux temps prévus par les modèles. Cette étude

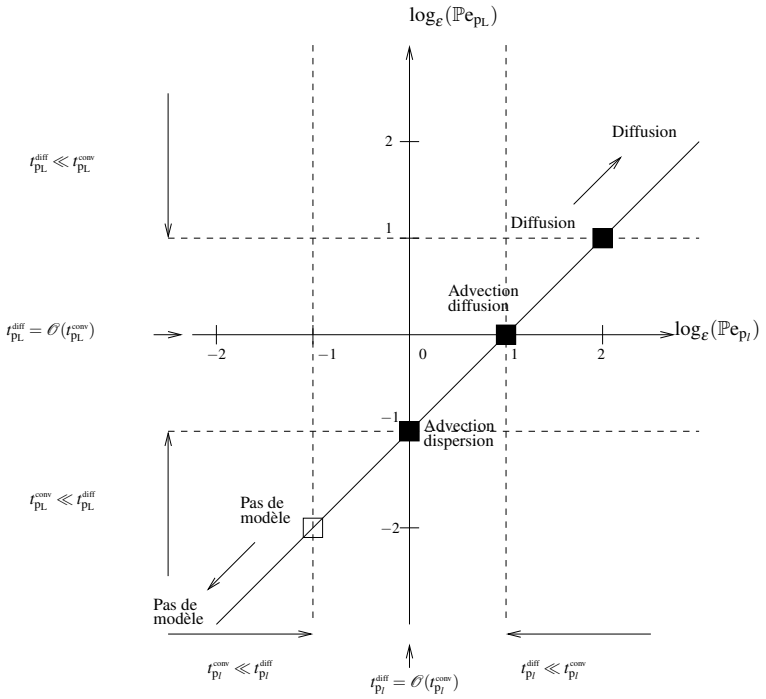

FIGURE 6.2 – *Régimes de transport en fonction des ordres de grandeur de* $\log_\varepsilon(\mathbb{P}e_{p_L})$ *et* $\log_\varepsilon(\mathbb{P}e_{p_l})$ *et correspondance en temps caractéristiques.*

a donc été motivée par la nécessité de déterminer les modèles macroscopiques continus pour décrire le transport en milieu à double porosité et d'étudier l'origine de ces effets de retard.

6.2.1 Modèles de la littérature

Il existe deux types de modèles phénoménologiques pour décrire le transport de soluté en milieu à double porosité. Le plus utilisé est un modèle à deux champs, inspiré du modèle de Barenblatt, introduit par (Coats and Smith, 1964) :

$$\begin{aligned} \phi_{\mathrm{p}} \frac{\partial c_{\mathrm{p}}}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot \left(\bar{\bar{D}}_p^H \vec{\nabla} c_p - c_p \vec{V}_p \right) &= -\sigma(c_{\mathrm{p}} - c_{\mathrm{M}}), \\ \phi_{\mathrm{M}} \frac{\partial c_{\mathrm{M}}}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot \left(\bar{\bar{D}}_{\mathrm{M}}^D \vec{\nabla} c_M \right) &= \sigma(c_{\mathrm{p}} - c_{\mathrm{M}}). \end{aligned} \tag{6.30}$$

La première équation traduit l'advection-dispersion dans les pores et la seconde la diffusion dans les matrice microporeuse. Le terme $\sigma(c_{\mathrm{p}} - c_{\mathrm{M}})$ caractérise le transfert de soluté entre les deux systèmes poreux.

Dans la communauté hydrologue, ce modèle est souvent appelé modèle MIM (Mobile-Immobile water model). Il a été suggéré dans le but d'expliquer les effets de traîne (ou effets de mémoire) observés lors du transport en milieu à double porosité. Dans la littérature liée à l'hydrogéologie en milieux poreux fracturé, le même phénomène est

appelé "effet de diffusion matricielle".

Le second type de modèle est un modèle à un champ. Il décrit donc le milieu à double porosité par un seul milieu poreux équivalent :

$$\phi_{\Gamma}\,\frac{\partial c}{\partial t} - \vec{\nabla}\cdot\left(\bar{\bar{D}}^{H}\vec{\nabla}c - c\vec{V}_{M}\right) = 0, \tag{6.31}$$

où ϕ_{Γ} désigne la porosité effective de l'ensemble du milieu à double porosité et $\bar{\bar{D}}^{H}$ est le tenseur de dispersion hydrodynamique de l'ensemble du milieu à double porosité.

Dans (Berkowitz et al., 1988), il est souligné que dans de nombreux cas, le profil de concentration obtenu lors du transport en milieu à double porosité était parfaitement reproduit par le modèle à un champ (Eq. (6.31)), mais qu'il n'existait aucun cadre théorique permettant d'orienter le choix du modèle.

6.2.2 Modèles homogénéisés

6.2.3 Description locale

Considérons le milieu à double porosité représenté sur la figure (FIG. 4.2). Dans la cellule Ω', considérons un transport purement diffusif dans les micropores :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial c_{\mathrm{m}}}{\partial t} - \vec{\nabla}\cdot(D\vec{\nabla}c_{\mathrm{m}}) = 0 \quad \text{dans}\Omega_{\mathrm{m}}, \\ (D\vec{\nabla}c_{\mathrm{m}})\cdot\vec{n}' = 0 \quad \text{sur } \Gamma, \end{cases}$$

où c_{m} désigne la concentration du soluté et D est le coefficient de diffusion moléculaire.

Dans la cellule Ω, considérons que le transport est convectif-diffusif dans les pores :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial c_{\mathrm{p}}}{\partial t} - \vec{\nabla}\cdot(D\vec{\nabla}c_{\mathrm{p}} - \ c_{\mathrm{p}}\vec{v}_{\mathrm{p}}) = 0 \quad \text{dans } \Omega_{\mathrm{p}}, \\ \vec{v}_{\mathrm{p}} = 0 \quad \text{sur } \Gamma, \\ (D\vec{\nabla}c_{\mathrm{p}})\cdot\vec{n} = < D\vec{\nabla}c_{\mathrm{m}} >_{\Omega}^{\Omega_{\mathrm{m}}} \cdot\vec{n} \quad \text{sur } \Gamma_{\mathrm{Mp}}, \\ c_{\mathrm{p}} = c_{\mathrm{m}} \quad \text{sur } \Gamma_{\mathrm{Mp}}, \end{cases}$$

où c_{p} et $\vec{v}_{\mathrm{p}}$ sont la concentration et la vitesse du fluide dans les pores.

6.2.4 Modèles homogénéisés

Par analogie avec la conduction thermique, on sait que l'ordre de grandeur du rapport de diffusivités conditionne le comportement macroscopique. Il est défini par :

$$\mathbb{R}_{\mathrm{D}} = \frac{D_{\mathrm{c}}}{D_{\mathrm{M_c}}}, \tag{6.32}$$

où D_{c} est la diffusion moléculaire et $D_{\mathrm{M_c}}$ est une valeur caractéristique de la diffusion effective et vérifie

$$D_{\mathrm{M_c}} = \mathscr{O}(\phi_{\mathrm{M}} D_{\mathrm{c}} T_{\mathrm{M_c}}), \tag{6.33}$$

où $T_{\mathrm{M_c}}$ désigne une valeur caractéristique de la tortuosité. Généralement on a :

$$\phi_{\mathrm{M}} T_{\mathrm{M_c}} = \mathscr{O}(1), \tag{6.34}$$

ce qui conduit à

$$\mathbb{R}_{\mathrm{D}} = \mathscr{O}(\varepsilon^0). \tag{6.35}$$

Il est possible de trouver des situations particulières où $\mathbb{R}_{\mathrm{D}} < \mathscr{O}(\varepsilon^0)$ (par exemple pour des milieux très tortueux), mais comme les effets de mémoire mentionnés dans la littérature apparaissent lorsque (Eq. (6.35)), c'est à cette situation qu'on s'intéresse.

Avec cette hypothèse, on obtient trois modèles macroscopiques suivant l'ordre de grandeur du nombres de Péclet dans les pores (Royer et al., 2002), (Royer et al., 2003), (Tejchman, 2004) :

$$\mathbb{P}\mathrm{e}_{\mathrm{p_L}} = \frac{v_{\mathrm{p_c}} L}{D_{\mathrm{c}}}. \tag{6.36}$$

• **Modèle de diffusion (I)** : $\mathbb{P}\mathrm{e}_{\mathrm{p_L}} = \mathscr{O}(\varepsilon^0)$

$$\phi_{\mathrm{T}} \frac{\partial c}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot (\bar{\bar{D}}^{\mathrm{D}} \vec{\nabla} c) = 0 \tag{6.37}$$

• **Modèle d'advection-diffusion (II)** : $\mathbb{P}\mathrm{e}_{\mathrm{p_L}} = \mathscr{O}(\varepsilon^0)$

$$\phi_{\mathrm{T}} \frac{\partial c}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot (\bar{\bar{D}}^{\mathrm{D}} \vec{\nabla} c - c < \vec{v}_{\mathrm{p}} >_{\Omega}^{\Omega_p}) = 0 \tag{6.38}$$

• **Modèle d'advection-dispersion (III)** : $\mathbb{P}\mathrm{e}_{\mathrm{p_L}} = \mathscr{O}(\varepsilon^{-1})$.

$$\phi_{\mathrm{T}} \frac{\partial c}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot (\bar{\bar{D}}^{\mathrm{H}} \vec{\nabla} c - c < \vec{v}_{\mathrm{p}} >_{\Omega}^{\Omega_p}) = 0 \tag{6.39}$$

• **Pas de modèle macroscopique** : $\mathbb{P}\mathrm{e}_{\mathrm{p_L}} \geq \mathscr{O}(\varepsilon^{-2})$.

Dans ces modèles ϕ_{T} désigne la porosité totale du milieu à double porosité et D^{D} et $\bar{\bar{D}}^{\mathrm{H}}$ sont les tenseurs de diffusion effective et de dispersion du milieu à double porosité. Ces modèles ne présentent aucun effet de mémoire ; Il s'agit de modèles avec effets effet réservoir (*Cf.* §4), mais où les propriétés effectives de transfert (diffusivité et dispersivité) prennent en compte la totalité de l'espace poreux du milieu à double porosité. Ils correspondent en fait au modèle de stockage avec conductivité effective globale identifié pour la conduction thermique en milieu à double conductivité (*Cf.* §3.1.2). Le modèle d'advection-dispersion est identique au modèle phénoménologique (Eq. 6.31).

Ces résultats (modèles et domaines de validité) ont été validés expérimentalement par des tests en colonne dans (Tejchman, 2004).

6.2.5 Interprétation de l'absence d'effets de mémoire dans les modèles homogénéisés à double porosité

Nous avons vu (*Cf.* §4) que les effets de mémoire en milieux à double porosité apparaissent lorsque

$$\frac{t_{\mathrm{M}_l}}{t_{\mathrm{p_L}}} = \mathscr{O}(\varepsilon^0). \tag{6.40}$$

Le temps caractéristique t_{M_l} est le temps caractéristique de diffusion dans la matrice poreuse :

$$t_{\mathrm{M}_l} = \frac{L^2}{D_{\mathrm{M_c}}},$$

et $t_{\mathrm{p_L}}$ est le temps caractéristique macroscopique de diffusion ou d'advection dans les pores :

$$t_{\mathrm{p}_L} = \begin{cases} \dfrac{L^2}{D_{\mathrm{c}}} & \text{quand } \mathbb{P}\mathrm{e}_{\mathrm{p_L}} \leq \mathscr{O}(\varepsilon^0), \quad (6.41) \\ \dfrac{L}{v_{\mathrm{p_c}}} & \text{quand } \mathbb{P}\mathrm{e}_{\mathrm{p_L}} \geq \mathscr{O}(\varepsilon^0). \quad (6.42) \end{cases}$$

On a donc :

$$\frac{t_{\mathrm{M}_l}}{t_{\mathrm{p}_L}} = \begin{cases} \mathscr{O}(\varepsilon^2) & \text{lorsque } \mathbb{P}\mathrm{e}_{\mathrm{p_L}} \leq \mathscr{O}(\varepsilon^0), \quad (6.43) \\ \mathscr{O}(\varepsilon^2 \mathbb{P}\mathrm{e}_{\mathrm{p_L}}) & \text{lorsque } \mathbb{P}\mathrm{e}_{\mathrm{p_L}} \geq \mathscr{O}(\varepsilon^0). \quad (6.44) \end{cases}$$

La condition (Eq. 6.40) est donc remplie lorsque $\mathbb{P}\mathrm{e}_{\mathrm{p_L}} \geq \mathscr{O}(\varepsilon^{-2})$, ordre de grandeur pour lequel il n'existe pas de modèle homogénéisé.

On en conclut que les effets de mémoire observés expérimentalement sont bien dûs à la structure à double porosité du milieu. Ils apparaissent à fort Péclet, situation pour laquelle il n'existe pas de modèle homogénéisé.

6.3 Transport en milieu poroélastique

Historiquement, la migration de polluants dans les sols déformables n'a fait l'objet d'aucune théorie. La majorité des études concernant la migration de contaminants dans les sols supposent que le sol est non déformable, ce qui est une hypothèse raisonnable dans la plupart des applications liées à la décontamination. La nécessité d'étudier l'impact de la déformation du sol sur le transport de soluté est apparu dans le cadre de la conception de sites de stockage de déchets (Brannon and Poitdexter-Rollings, 1990), (Alshawabkeh et al., 2005), (Arega and Hayter, 2008), (Smith, 2000), (Peters and Smith, 2002).

L'étude du transport advectif-diffusif d'un soluté non-réactif en milieu poreux déformable revêt un intérêt majeur pour la modélisation des tissus biologiques et le sujet a fait l'objet de nombreuses études, notamment sous chargement cyclique, afin de mettre en évidence le transport mécaniquement induit (Tate, 2001), (Mauck et al., 2003), (Urciuolo et al., 2008), (O'Hara et al., 1990), (Evans and Quinn, 2006), (Wang et al., 2000), (Goldsztein and Santamarina, 2004).

Les modèles utilisés dans les modélisations consistent souvent à superposer le modèle poroélastique de Biot et l'équation de d'advection-diffusion. Par homogénéisation, on montre qu'il existe un terme de couplage qui décrit un mécanisme de transport mécaniquement induit. Ce résultat est implicitement contenu dans le modèle homogénéisé de (Moyne and Murad, 2006a), pour le transport advectif-diffusif d'un soluté chargé électriquement en milieu poreux déformable.

6.3.1 Description locale

Considérons le transport par convection et diffusion dans le milieu poreux saturé déformable (FIG. 5.1). Les domaines solide et fluide sont tous deux supposés connexes. A l'échelle microscopique, le squelette élastique vérifie les équations de Navier en conditions quasi-statique

$$\begin{cases} \vec{\nabla}\cdot\bar{\bar{\sigma}}_{\mathrm{S}} = \vec{0} & \text{dans } \Omega_{\mathrm{s}}, \quad (6.45)\\ \bar{\bar{\sigma}}_{\mathrm{s}} = \tilde{a} : \bar{\bar{e}}(\vec{u}_{\mathrm{s}}) & \text{dans } \Omega_{\mathrm{s}}. \quad (6.46) \end{cases}$$

Le fluide vérifie les équations de Stokes, que l'on écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \vec{\nabla}\cdot\bar{\bar{\sigma}}_{\mathrm{p}} = \vec{0} & \text{dans } \Omega_{\mathrm{p}}, \quad (6.47)\\ \bar{\bar{\sigma}}_{\mathrm{p}} = -p_{\mathrm{p}}\,\mathrm{I} + 2\mu\mathrm{D}(\vec{v}_p) & \text{dans } \Omega_{\mathrm{p}}, \quad (6.48)\\ \vec{\nabla}\cdot\vec{v}_{\mathrm{p}} = 0 & \text{dans } \Omega_{\mathrm{p}}. \quad (6.49) \end{cases}$$

Sur l'interface Γ entre les phases solide et liquide sont vérifiées les conditions de continuité des contraintes normales et des déplacements :

$$\begin{cases} \bar{\bar{\sigma}}_{\mathrm{p}}\cdot\vec{n} = \bar{\bar{\sigma}}_{\mathrm{s}}\cdot\vec{n} & \text{sur } \Gamma, \quad (6.50)\\ \vec{v}_{\mathrm{p}} = \vec{v}_{\mathrm{s}} = \dfrac{\partial\vec{u}_{\mathrm{s}}}{\partial t} & \text{sur } \Gamma. \quad (6.51) \end{cases}$$

Le transport du soluté dans la phase fluide est décrit par l'équation de convection-diffusion dans la phase fluide

$$\frac{\partial c_{\mathrm{p}}}{\partial t} - \vec{\nabla}\cdot(D\vec{\nabla}c_{\mathrm{p}} - c_{\mathrm{p}}\vec{v}_{\mathrm{p}}) = 0 \qquad \text{dans } \Omega_{\mathrm{p}}, \quad (6.52)$$

et la condition de flux nul sur l'interface Γ

$$(D\vec{\nabla}c_{\mathrm{p}} - c_{\mathrm{p}}\vec{v}_{\mathrm{p}})\cdot\vec{n} = 0 \qquad \text{sur } \Gamma. \quad (6.53)$$

6.3.2 Modèle homogénéisé

6.3.2.1 Modèle poroélastique

L'homogénéisation des équations du mouvement des phases fluide et solide (Eq. (6.45)-(6.51)) conduit au modèle de Biot (Auriault and Sanchez-Palencia, 1977) :

$$\begin{cases} \vec{\nabla}\cdot\bar{\bar{\sigma}}_{\mathrm{T}} = \vec{0}, & (6.54)\\ \bar{\bar{\sigma}}_{\mathrm{T}} = \bar{\bar{\bar{\bar{C}}}} : \bar{\bar{e}}(\vec{u}_{\mathrm{s}}) - \bar{\bar{\alpha}}p_{\mathrm{p}}, & (6.55)\\ \vec{\nabla}\cdot(<\vec{v}_{\mathrm{p}}>_{\Omega}\Omega_{\mathrm{p}} - \phi\dfrac{\partial\vec{u}_{\mathrm{s}}}{\partial t}) = -\bar{\bar{\alpha}}\otimes\bar{\bar{e}}(\vec{u}_{\mathrm{s}}) - \beta\dfrac{\partial p_{\mathrm{p}}}{\partial t}, & (6.56)\\ <\vec{v}_{\mathrm{p}}>_{\Omega}\Omega_{\mathrm{p}} - \phi\dfrac{\partial\vec{u}_{\mathrm{s}}}{\partial t} = -\bar{\bar{K}}_{\mathrm{p}}\vec{\nabla}p_{\mathrm{p}}. & (6.57) \end{cases}$$

6.3.2.2 Modèle d'advection diffusion en milieu poroélastique

On s'intéresse à un régime macroscopique d'advection-diffusion, caractérisé par un un nombre de Péclet qui est tel que (*Cf.* §6.1.2) :

$$\mathbb{P}\mathrm{e}_{\mathrm{L}} = \mathscr{O}(\varepsilon^0). \tag{6.58}$$

L'homogénéisation des équations (Eqs. (6.52),(6.53), (6.51)) avec l'ordre de grandeur (Eq. (6.58)) conduit au modèle macroscopique de transport suivant (Royer and Cherblanc, 2010, 2016) :

$$\phi \frac{\partial c_{\mathrm{p}}}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot (\bar{\bar{D}}^{\mathrm{D}} \vec{\nabla} c_{\mathrm{p}}) + (< \vec{v}_{\mathrm{p}} >_{\Omega}^{\Omega_{\mathrm{p}}} - \phi \frac{\partial \vec{u}_{\mathrm{s}}}{\partial t}) \cdot \vec{\nabla} c_{\mathrm{p}} + \phi \bar{\bar{T}}_{\mathrm{p}} \vec{\nabla} \cdot (c_{\mathrm{p}} \frac{\partial \vec{u}_{\mathrm{s}}}{\partial t}) = 0,$$

où $\bar{\bar{T}}_{\mathrm{p}}$ désigne le tenseur de tortuosité et où le terme d'advection est exprimé en fonction de la vitesse relative. Un terme de couplage pondéré par la tortuosité émerge donc de la transition d'échelles. Il est dû à fois à la déformation du solide et à la convection du fluide. Ce terme est nul à plus faible nombre de Péclet.

Des travaux en cours consistent à considérer le régime de dispersion pour l'équation de transport (Royer et al., 2016). Le modèle de dispersion étant un modèle du second ordre, ils nécessitent au préalable d'établir le modèle de poroélasticité au second ordre.

6.4 Advection-diffusion en milieu poreux à faible séparation d'échelles

En général, on se satisfait de la description au premier ordre, valable à ε près. Lorsque la taille macroscopique est grande sans être très grande par rapport à l, il devient nécessaire d'affiner la description en poussant plus loin les développements.

L'homogénéisation aux ordres supérieurs a fait l'objet d'un grand nombre de travaux théoriques et numériques pour les composites élastiques (Boutin, 1996), (Gambin and Kröner, 1989), (Schraad and Triantafyllidis, 1997), (Smyshlyaev and Cherednichenko, 2000), (Triantafyllidis and Bardenhagen, 1996), (Kouznetsova et al., 2004). Le cas de la conduction thermique en milieu composite est traitée dans (Boutin, 1996).

Les milieux poreux à faible séparation d'échelles ont fait l'objet de peu d'études. Dans (Goyeau et al., 1997), la méthode de moyenne est utilisée pour obtenir des termes correcteurs de la loi de Darcy. Le problème est traité jusqu'au troisième ordre par homogénéisation dans (Auriault et al., 2005). Il y est montré qu'un terme de Brinkman apparaît au troisième ordre pour un milieu macroscopiquement isotrope.

On s'intéresse ici au transport de soluté par convection-diffusion en milieu poreux rigide. Le résultat remarquable de cette étude est que des effets de dispersion apparaissent aux ordres supérieurs. Ces travaux sont en cours de publication (Royer et al., 2016).

6.4.1 Physique locale

A l'échelle des pores (FIG. 5.1), on considère l'équation de convection-diffusion

$$\begin{cases} \dfrac{\partial c_{\mathrm{p}}}{\partial t} - \vec{\nabla}\cdot(D\vec{\nabla}c_{\mathrm{p}} - c_{\mathrm{p}}\vec{v}_{\mathrm{p}}) = 0 \quad \text{dans } \Omega_{\mathrm{p}}, & (6.59) \\ (D\vec{\nabla}c_{\mathrm{p}})\cdot\vec{n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma, & (6.60) \end{cases}$$

avec le régime de transport défini par

$$\mathbb{P}\mathrm{e}_{\mathrm{L}} = \mathscr{O}(\varepsilon^0). \tag{6.61}$$

Au premier ordre, ceci conduit au modèle d'advection-diffusion (*Cf.* §6.1.2) :

$$\phi_{\mathrm{p}}\frac{\partial c_{\mathrm{p}}}{\partial t} - \vec{\nabla}\cdot(\bar{\bar{D}}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{D}}\vec{\nabla}c_{\mathrm{p}}) + <\vec{v}_{\mathrm{p}}>_{\Omega}^{\Omega_{\mathrm{p}}}\cdot\vec{\nabla}c_{\mathrm{p}} = 0, \tag{6.62}$$

où $\bar{\bar{D}}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{D}}$ désigne le tenseur de diffusion effective.

6.4.2 Modèles aux ordres supérieurs

Au second ordre, et pour un milieu macroscopiquement homogène, on obtient le modèle suivant :

$$\phi_{\mathrm{p}}\frac{\partial c_{\mathrm{p}}}{\partial t} - \vec{\nabla}\cdot(\bar{\bar{D}}_{\mathrm{II}}^{\mathrm{disp}}\vec{\nabla}c_{\mathrm{p}}) + <\vec{v}_{\mathrm{p}}>_{\Omega}^{\Omega_{\mathrm{p}}}\cdot\vec{\nabla}c_{\mathrm{p}} = 0, \tag{6.63}$$

où

$$\bar{\bar{D}}_{\mathrm{II}}^{\mathrm{disp}} = \bar{\bar{D}}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{D}} + \bar{\bar{D}}_{\mathrm{II}}^{\prime\,\mathrm{disp}}. \tag{6.64}$$

Il s'agit donc d'un modèle d'advection-dispersion dont le tenseur de dispersion vérifie la relation (Eq. (6.6)). La vitesse est la vitesse au second ordre et donc elle ne vérifie pas la loi de Darcy.

Au troisième ordre, le modèle devient :

$$\begin{cases} \phi_{\mathrm{p}}\dfrac{\partial c_{\mathrm{p}}}{\partial t} \\ -\vec{\nabla}\cdot(\bar{\bar{D}}_{\mathrm{III}}^{\mathrm{disp}}\vec{\nabla}c_{\mathrm{p}} + \bar{\bar{\bar{E}}}^{\mathrm{disp}}\vec{\nabla}c_{\mathrm{p}}\otimes\vec{\nabla}c_{\mathrm{p}} + \bar{\bar{\bar{\bar{F}}}}^{\mathrm{diff}}\vec{\nabla}c_{\mathrm{p}}\otimes\vec{\nabla}c_{\mathrm{p}}\otimes\vec{\nabla}c_{\mathrm{p}}) \\ + <\vec{v}_{\mathrm{p}}>_{\Omega}^{\Omega_{\mathrm{p}}}\cdot\vec{\nabla}c_{\mathrm{p}} = 0. \end{cases} \tag{6.65}$$

$\bar{\bar{D}}_{\mathrm{III}}^{\mathrm{disp}} \neq \bar{\bar{D}}_{\mathrm{II}}^{\mathrm{disp}}$: tenseur de dispersion du second ordre
$\bar{\bar{\bar{E}}}^{\mathrm{disp}}$: tenseur de dispersion du troisième ordre
$\bar{\bar{\bar{\bar{F}}}}^{\mathrm{diff}}$: tenseur de diffusion du quatrième ordre

Le tenseur $\bar{\bar{D}}_{\mathrm{III}}^{\mathrm{disp}}$ vérifie également la relation (Eq. (6.6)).

Le résultat fondamental de cette étude est donc que la faible séparation des échelles induit des effets de dispersion. Le modèle du second ordre s'apparente au modèle de dispersion de la littérature.

7

Remarques de conclusion

Ce travail de synthèse met en lumière l'intérêt d'interpréter et de traduire les domaines de validité des modèles homogénéisés, initialement formulés par le biais d'ordres de grandeur de nombres adimensionnels exprimés en puissance de ε. La valeur d'un nombre adimensionnel est bien définie et souvent uniquement liée à la connaissance de la microstructure. Par contre, son ordre de grandeur en fonction de ε peut varier : la valeur de ε dépend de la longueur macroscopique qui peut varier (par exemple en changeant le gradient macroscopique). Le comportement macroscopique peut donc varier, même si le paramètre adimensionnel conserve la même valeur. Cette réalité est plus tangible lorsqu'on exprime les domaines de validité par le biais d'une comparaison entre deux temps caractéristiques.

Cette démarche a permis de montrer que l'évolution d'un phénomène instationnaire en milieu à double porosité se caractérise par :

$$\begin{cases} \bullet \text{ un comportement avec effet réservoir} \quad \text{si } t_{\mathrm{M}_{l_\mathrm{p}}} \ll t_{\mathrm{p_L}} \\ \text{Le milieu se comporte comme un milieu équivalent à simple porosité} \\ \bullet \text{ un comportement à double porosité} \quad \text{si } t_{\mathrm{M}_{l_\mathrm{p}}} \approx t_{\mathrm{p_L}} \\ \text{Il y a des effets de mémoire} \\ \bullet \text{ un comportement à simple porosité} \quad \text{si } t_{\mathrm{M}_{l_\mathrm{p}}} \gg t_{\mathrm{p_L}} \\ \text{Le phénomène ne se produit que dans les macropores} \end{cases}$$

où $t_{\mathrm{M}_{l_\mathrm{p}}}$ est le temps caractéristique local dans la matrice poreuse et où $t_{\mathrm{p_L}}$ représente le temps caractéristique macroscopique du phénomène.

Les résultats présentés dans ce mémoire permettent de tirer des conclusions sur la prédiction de couplages en milieux hétérogènes :

— il y a couplage en temps d'un même phénomène dans une une structure à deux composantes (composite, double porosité) lorsqu'il y a égalité entre le temps caractéristique local le plus grand et le temps caractéristique macroscopique ;

— un couplage émerge par transition d'échelles entre deux phénomènes dans un même milieu (dispersion, advection-diffusion en milieu poroélastique) lorsqu'il y a égalité entre les deux temps caractéristiques locaux.

Ces corrélations entre un couplage et l'égalité entre deux temps caractéristiques ne sont pas conditionnées par l'existence d'un modèle continu équivalent. Elles sont observables pour tout système hétérogène.

Soulignons enfin que l'ensemble de ces résultats et analyses exploitent le fait que le petit paramètre ε a une valeur finie. Cette idée rejoint les concepts fondateurs de l'Analyse Non-Standard, laquelle avec la notion notion d'infiniment petit, est basée sur le fait qu'une quantité petite est une quantité fixe et non un paramètre qui tend vers zéro.

Bibliographie

Adzumi H. : Studies on the flow of gaseous mixtures through capillaries : I. The viscosity of binary gasesous mixtures, *Bulletin of the Chemical Society of Japan*, **12**, 199-226, (1937).

Adzumi H. : Studies on the flow of gaseous mixtures through capillaries : II. The molecular flow of gasesous mixtures, *Bulletin of the Chemical Society of Japan*, **12**, 185-291, (1937).

Agoras M., Lopez-Pamies O., P. Ponte Castañeda : A general hyperelastic model for incompressible fiber-reinforced elastomers, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **57**, 268–286, (2009).

Ahmadi A., Lasseux D., Letellier S. : In vitro cartilage culture : flow, transport and reaction in fibrous porous media, *Marie Curie Workshop on Flow and Transport in Industrial Porous Media*, Utrecht University, 12-16 November 2007.

Ahmadi A., Quintard M. : Large-scale properties for two-phase flow in random porous media, *Journal of Hydrology*, **183**, 69–99, (1996).

Ahmadi A., Quintard M., Whitaker S. : Transport in chemically and mechanically heterogeneous porous media V : Two-equation model for solute transport with adsorption, *Advances in Water Resources*, **22**, 59–86, (1998).

Aifantis E.C. : Introducing a multi-porous medium. *Developments in Mechanics*, **8**, 209-211, (1977).

Aifantis E. C. and Beskos E. : Heat extraction from hot dry rocks, *Mechanics Research Communications*, **7** (3), 165-170, (1980).

Allaire G. : Homogenization and two-scale convergence, *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, **23**, 1482-1518, (1992).

Alshawabkeh N.A., Rahbar N., Sheahan T. : A model fo contaminant mass flux in capped sediment under consolidation, *Journal of Contaminant Hydrology*, **78**, 147-165, (2005).

Ambard D., Cherblanc C. : Mechanical behavior of annulus fibrosus : a microstructural model of fibers reorientation *Annals of biomedical Engineering*, **37** (11), 2256-2265, (2009)

Ambard D., Swider P. : A predictive mechano-biological model of the bone-implant healing, *European Journal of Mechanics. A/ Solids*, **25**, 927–937, (2006).

Arbogast T. : Computational aspects of dual-porosity models, in *Homogenization and Porous Media*, U. Hornung Ed., Springer, New-york, (1997).

Arbogast T., Douglas J., Hornung U : Derivation of the double porosity model of single phase flow via homogenization theory, *SIAM J. Anal. Math. Anal.*, **21**(4), 823-836, (1990).

Arega F., Hayter E. : Coupled consolidation and contaminant transport model for simulating migration of contaminants through the sediment and a cap, *Applied Mathematical Modelling*, **32**, 2413-2428, (2008).

Auriault J.-L., Sanchez-Palencia E. : Etude du comportement macroscopique d'un milieu poreux saturé déformable, *Journal de Mécanique*, **16** , 37-53, (1997).

Auriault J.-L. : Effective macroscopic description for heat conduction in periodic composites, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, **26**(6), 861-869, (1983).

Auriault J.-L. : Heterogeneous medium : is an equivalent macroscopic description possible ?, *International Journal of Engineering Science*, *29*, 785-795 (1991).

Auriault J.-L. and Adler P. : Taylor dispersion in porous media : Analysis by multiple scale expansions, *Advances in Water Resources*, **18**, (4), 217-226 (1995).

Auriault J.-L., Boutin C. : Deformable porous media with double porosity. Quasi-statics. I : Coupling effects. *Transport in Porous Media*, **7**, 63-82, (1992).

Auriault J.-L., Boutin C. : Deformable porous media with double porosity. Quasi-statics. II : Memory effects. *Transport in Porous Media*, **10**, 153-169, (1993).

Auriault J.-L., Ene H. I. : Macroscopic modelling of heat transfer in composites with interfacial thermal barrier, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, **37** (18), 2885-2892, (1994).

Auriault J.-L., Geindreau C. and Boutin C. : Filtration law in porous media with poor separation of scales, *Transport in Porous Media*, **60**, 89-108, (2005).

Auriault J.-L., Moyne C., Amaral Souto H.P. : On the asymmetry of the dipsersion tensor in porous media, *Transport in Porous Media*, **85**, 771-783, (2010).

Auriault J.-L., Royer P. : Double conductivity media : a comparison between phenomenological and homogenization approaches, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, **36** (10), 2613-2621, (1993).

Bai M., Elsworth D., Roegiers J.-C : Modeling of naturally fractured reservoirs using deformation dependent fow mechanism, *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. Geomech. Abstr.*, **30**, 1185-1191, (1993). .

Baldit A. : Etude des interactions hydro-chimio-mécaniques dans les tissus biologiques : application à la nutrition du disque intervertébral, *Thèse de Doctorat de l'Université Montpellier II*, (2013)

Baldit A, Ambard D., Cherblanc F., Royer P. : Experimental analysis of the transverse mechanical behaviour of annulus fibrosus tissue, *Biomechanics And Modeling In Mechanobiology*, **13**, 643-652, (2014).

Baldit A, Ambard D., Cherblanc F., Royer P. : Mechanical behaviour of annulus fibrosus tissue : Identification of a poro-hyper-elastic model from experimental measurements, *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering*, **16**, (Sup. 1), 80-81, (2014).

Baldit A, Ambard D., Cherblanc F., Royer P. : Annulus fibrosus microstructure : an explanation to local heterogeneities, *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering*, **17** (Sup. 1), 38-39, (2014).

Barenblatt G.I., Zheltov Iu, Kochina I.N. : Basic concept in the theory of seepage of homogeneous liquids in fissured rocks, *PMM*, **24**(5), 852-864, (1960).

Barenblatt G.I. : On certain boundary value problems for the equations of seepage of liquid in fissured rocks, *PMM*, **27**(2), 348-350, 1963.

Barenblatt G.I., Entov V.M., Ryzhik, V.M. : *Theory of fluid flows through natural rocks*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Bear J : *Dynamics of Fluids in Porous media* Elsevier, New-York (1972)

Bear J., Bachmat Y. : *Introduction to Modeling of Transport Phenomena in Porous Media*, KLuwer Academic Publishers, (1990).

Becker S., Kuznetsov A. : *Transport in Biological Media*, Elsevier (2013).

Bensoussan A., Lions J.-L. Papanicolaou G. : *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, (1978).

Berkowitz B, Bear J., Braester C. : Continuum models for contaminant transport in fractured formations, *Water Resources Research*, **24** (8), 1225-1236, (1988).

Berryman J.G., Wang F.W. : The elastic coefficients of double-porosity models for fluid transport in jointed rock, *Journal of Geophysical Research*, **100**(B12), 24, 611-24-627, (1995).

Beskos D.E., Aifantis E.C. : On the theory of consolidation with double porosity, II, *Int. J. Engng. Sci.*, **24**, 1697-1716, (1986).

Bibby R. : Mass transport of solutes in dual-porosity media, *Water Resources Research*, **24**(8), 1225-1236, (1981).

Boutin C. : Microstructural influence on heat conduction, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, **38** (17), 3181-3195, (1995).

Boutin C. : Microstructural effects in elastic composites, *International Journal of Solids and Structures*, **7**, 1023-1051, (1996).

Boutin C., Royer P., Auriault J.-L. : Acoustic Absorption of Porous Surfacing with Dual Porosity, *International Journal of Solids and Structures*, **35**, 4709-4737, (1998).

Boutin C. and Royer P. : On models of double porosity poroelastic media, *Geophysical Journal International*, **203**, 1694-1725, (2015).

Brannon J.M, Pointdexter-Rollings M.E : Consolidation and contaminant migration in a capped dredged material deposit, *The Science of Total Environement*, **91**,115-126, (1990).

Brenner H. : Dispersion resulting from flow through spatially periodic porous media, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Serie A*, **297**, 81-133, (1980).

Cailllerie D. : Modeling by homogenization of the saturated porous medium consolidation under *Pormechanics II, Proceedings of the Second Biot Conference*, 141-144.

Charrier P., Dubroca B. : Asymptotic transport models for heat ans mass transfer in reactive porous media, *C.R.A.S Série II*, **336**, 537-542 (2003).

Chastanet J. : Modélisation des écoulements de gaz dans les milieux poreux et poreux fracturé. Effet Klinkenberg et effet d'échelles, *Thèse de l'Université Joseph Fourier*, (2004).

Chastanet J., Royer P., Auriault J.-L. : Does Klinkenberg's law survive upscaling ?, *Transport in Porous Media*, **56**, 171-198, (2004).

Chastanet J., Royer P., Auriault J.-L. : Flow of Low Pressure Gas through Dual-Porosity Media, *Transport in Porous Media*, **66**, 457-479, (2007).

Cherblanc F., Ahmadi A., Quintard M. : Two-medium description of dispersion in heterogeneous porous media : Calculation of macroscopic properties, *Water Resources Research*, **6**, 1154-1173, (2003).

Coats K., Smith B. : Dead-end pore volume and dispersion in porous media, *Society of Petroleum Engineers Journal*, **III**, 73-84, (1964).

Desjarguin B. : Measurement of specific surface of porous and disperse bodies by their resistance to the flow of rarefied gas, *C.R. Acad. Sci. URSS*, **53**, 623-626, (1946).

Dormieux L., Lemarchand E. : Modélisation macroscopique du transport diffusif, *Oil and Gas Science and Technology, Revue IFP*, **55**, (1), 15-34, (2000).

Dureisseix D., Royer P., Faverjon B. : Numerization of a memory effect for an homogenized composite material with a large contrast in the phase thermal conductivities, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, **90**, 140-148, (2015).

Drazer G., Chertcoff R., Bruno L., Rosen M. : Tracer dispersion in double porosity porous media with non-linear adsorption, *Physica A*, **257**, 371-375, (1998).

Eidsath A., Carbonell R. G., Whitaker S., Hermann L. R.. : Dispersion in pulsed systems-III : Comparison between theory and experiment for packed beds, *Chemical Engineering Science*, **38**, 1803-1816, (1983).

Elsworrth D, Bai M : Flow-deformation response of dual-porosity media, *ASCE J. Geotech. Eng.*, **118**, 107-124, (1992).

Epstein M., Maugin G.A. : , Thermomechanics of volumetric growth in uniform bodies, *International Journal of Plasticity*, **16**, 951–978, (2000).

Eshelby J. : The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems, *Proceedings of the Royal Society*, **A241**, 376-396, (1957).

Evans R.C., Quinn T.M. : Dynamic Compression Augments Interstitial Transport of a Glucose-Like Solute in Articular Cartilage, *Biophysical Journal*, **91**, 1541-1547, (2006).

Fetter C. : *Contaminant Hydrology*, Macmillan Publishing, (1993).

Freeze R., Cherry J. : *Groundwater*, Prentice-Hall, (1979).

Garikipati K., Arruda E.M., Grosh K., Narayanan H., Calve S. : A continuum treatment of growth in biological tissue : The coupling of mass transport and mechanics, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **52**, 1595–1625, (2004).

Gambin B., Kröner E : High-order termes in the homogenized stress-strain relation of periodic elastic media, *Phys. Stat. Sol.*, **151**, 513-519 (1989).

Gehlar L.W. : Stochastic analysis of solute transport in saturated and unsaturated porous media, *Fundamentals of Transport in Porous Media*, Eds. J. Bear, Y. Corapcioglu, M. Nijfoff, publishers.

Goldsztein G.H., Santamarina J.C. : Solute transport during cyclic flow in saturated porous media, *Applied Physics Letters*, **85**, 2432-2434, (2004).

Goyeau, B., Benihaddadene, T., Gobin, D. and Quintard, M. : Averaged momentum equation for flow through a nonhomogeneous porous structure, *Transport in Porous Media*, **28**, 19–50 (1997).

Goyeau B., Benihaddadene T., Gobin D., Quintard M. : Numerical calculation of the permeability in a dendritic mushy zone, *Metallical and Materials Transactions B*, **30B**, 613-622, (1999).

Grisack G., Pickens J. :Transport through fractured media : the effect of matrix diffusion, *Water Resources Research*, *16*, 719-730, (1980).

HersheyA. : The elasticity of an isotropic aggregate of anisotropic cubic crystals, *Journal of Applied Mechanics*, **21**, 236-240, (1954).

Hornung U., Showalter R.R. : Diffusion models for fractured media, *J. Math. Anal. Applics*, **147**, 69-80, (1990).

Humphrey J.D., Rajagopal K.R. : A constrained mixture model for growth and remodeling of soft tissues, *Mathematical Models and Methods in Applied Science*, **12**, 407–430, (2002).

Huyakorn P., Lester B., Mercer J. : An efficient finite element technique for modelling transport in fractured porous media, 1, Single species, *Water resources Research*, **19**(3), 841-854, (1983).

Jannot Y., Lasseux D. : A new quasi-steady method to measure gas permeability of weakly permeable porous media, *Review of Scientific Instruments*, **83**, 015113, (2012).

Jones G.W., Chapman S.J. : Modeling Growth in Biological Materials, *SIAM review*, **54** (1), 52-118, (2012).

Keller J.-B. : Effective behavior of heterogeneous media, chapter in *Statistical Mechanics and Statistical Methods in Theory and Application*, Plenum, New-York, 644-731, (1977)

Khaled M.Y., Beskos D. E., Aifantis E.C. : On the theory of consolidation with double porosity-III A finite element formulation, *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, **8**, 101-123, (1984).

Klinkenberg L.-J. : The permeability of porous media to liquids and gas, *Drilling and Production Practice, American Petroleum Institute*, 200-213, (1941).

Knudsen M. : Die gesetze der molecularströmung and der inneren reibungsströmung der gase durch röhren, *Annalen der phyzik*, **34**, 75-130, (1941).

KouznetsovaV. G. , Geers M. G. D., Brekelmans W. A. M. : Size of a representative volume element in a second-order computational homogenization framework, *International Journal Multiscale Computational Engineering*, **2** (4), 575–598, (2004).

Kröner E. : Self-consistent scheme and graded disorder in polycristal elasticity, *Jouranl of Physics F*, **8**, 2261-2267, (1972).

Kröner E. : *Statistical Continuum Mechanics*, CISME Course 92, Springer, (1972).

Kröner E. : Statistical Modelling : modelling small deformations of polycrystals, Chap. 8, J.Gittus, J. Zarka Eds., Elsevier, (1986).

Lafolie F., Hayot C., Schweich D. : Experiemnts on solute transport in aggregated porous media : are diffusions within aggregates and hydrdynamic dispersion independent ?, *Transport in Porous Media*, **29**, 281-307, (1997).

Lasseux D., Ahmadi A., Cleis X., Garnier J. : A macroscopic model for species transport during in vitro tissue growth obtained by the volume averaging method, *Chemical Engineering Science*, **59**, 1949-1964, (2004).

Lasseux D., Quintard M., Whitaker S. : Determination of permeability tensors for two-phase flow in homogeneous porous media : Theory, *Transport in Porous Media*, **24**, 107-137, (1996).

Lasseux D., Valdes Parada F.J., Ochoa Tapia J.A., Goyeau B. : A macroscopic model for slightly compressible gas slip-flow in homogeneous porous media, *Physics of Fluids*, **26**, 53-102, (2014).

Le Corre S., Caillerie D., Orgéas L., Favier D. : Behavior of a net of fibers linked by viscous interactions : theory and mechanical properties, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **52**, 395–421, (2004).

Lemaire T., Naili S., Rémond A. : Multiscale analysis of the coupled effects governing the movement of interstitial fluid in cortical bone, *Biomechanics and Modeling in Mechanobiology*, **5** (1), 39-52, (2006).

Lemaire T., Naili S., Rémond A. : Study of the role of fibrous pericellular matrix in the cortical interstitial fluid movement with hydro-electro-chemical effects, *Journal of Biomechanics Engineering*, **130**, 1-11 (2008).

Lever D., Bradbury M., Hemingway S. : Modelling the effect of diffusion into the rock matrix on radionuclide migration, *Progress in Nuclear Energy*, **12** (1), 85-117, (1983).

Lubarda V.A., Hoger A. : On the mechanics of solids with a growing mass, *International Journal of Solids and Structures*, **39**, 4627–4664, (2002).

Marle C.M. : Ecoulements monophasiques en milieu poreux, *Revue de l'Institut Français du Pétrole*, **XII** (10), 1471-1509, (1967).

Mauck R.T, Hung C.T., Ateshian G.A. : Modelling of neutral solute transport in a dynamically loaded porous permeable gel : implications for articular cartilage biosynthesis and tissue engineering, *Journal of Biomechanical Engineering*, **125**, 602-614, (2003).

Matheron G. : *Eléments pour une théorie des milieux poreux*, Masson et Cie, (1967).

Moreau G., Caillerie D. : Continuum modeling of lattice structures in large displacement framework, *Dev. Comput. Tech. Struct. Eng.*, **20**, 53–70, (1995).

Moreno L., Gylling B., Neretnieks I : Solute transport in fractured media - the important mechanisms for performance assessment, *Journal of Contaminant Hydrlogy*, **25**, 283-296, (1997)

Moyne, C. and Murad, M. A. : Electro-chemo-mechanical couplings in swelling clays derived from a micro/macro-homogenization procedure, *International Journal of Solids and Structures*, **39**, 6159-6190, (2002).

Moyne C., Murad M.A. : Macroscopic behavior of swelling porous media derived from micromechanical analysis *Transport in Porous Media*, **50**, 127-151, (2003).

Moyne C., Murad M. : A Two-Scale Model for Coupled Electro-Chemo-Mechanical Phenomena and Onsager's Reciprocity Relations in Expansive Clays : I Homogenization Analysis, *Transport in Porous Media*, **62**, 333-380 (2006).

Moyne C., Murad M. : A Two-Scale Model for Coupled Electro-Chemo-Mechanical Phenomena and Onsager's Reciprocity Relations in Expansive Clays : II Computational validation, *Transport in Porous Media*, **63**, 13-56 (2006).

Murad M.A., Moyne C. : Micromechanical computational modeling of expansive porous media, *Comptes Rendus Mécanique*, **330**, 865–870, (2002).

Neretnieks I. : Diffusion in the rocks matrix : an important factor in radionuclide retardation, *Journal of Geophysical research*, **85** (B8), 4379-4397, (1980).

O'Hara B.P., Urban J., Maroudas A. : Influence of cyclic loading on the nutrition of articular cartilage, *Ann Rheum Dis.*, **49**, 536-539, (1990).

Pavan V. and Oxarango L. : A new momemtum equation for gas flow in porous media : the Klinkenberg effect seen through the kinetic theory, *Journal of Statistical Physics*, **126**, 2, (2007).

Pecker C. and H. Deresiewicz H. : Thermal effects on waves propagation in liquid-filled porous media, *Acta Mechanica*, **(16)**, 45-64 (1973).

Peters G.P., Smith D.W. : Solute transport through a deforming porous medium, *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, **26**, 683-717, (2002).

Prudnicki E. : Hyperelastic homogenized law for reinforced elastomer at finite strain with edge effects, *Acta Mechanica*, , 139-162, (1998).

Quintard M., Whitaker S. : Two-phase flow in heterogeneous porous media : The method of large-scale averaging, *Transport in Porous Media*, **3**, 357-413, (1988).

Quintard M. : Diffusion in isotropic and anisotropic porous systems : Three-dimensional calculations, *Transport in Porous Media*, **11**, 187-199 (1993).

Quintard M., Whitaker S. : Transport in chemically and mechanically heterogeneous porous media IV : large-scale mass equilibrium for solute transport with adsorption, *Advances in Water Resources*, **22**, (1), 33-57, (1999).

Rao P., Rolston D., Jessup R., Davidson J. : Solute transport in aggregated porous media : theoretical and experimental evaluation, *Soil Science Society of America Journal*, **44**, 1139-1146.

Royer P., Auriault J.-L. : Very Compressible Fluid Flow through a Porous Medium with Double Porosity, *Studia Geotechnica et Mechanica*, **13** (1-2), 65-77, (1992).

Royer P., Auriault J.-L. : Transient quasi-static gas flow through a rigid porous medium with double porosity. *Transp. Porous Media* **17**, 33-57, (1994).

Royer P., Auriault J.-L., Boutin C. : Contribution de l'homogénéisation à l'étude de la filtration d'un fluide en
milieu poreux fracturé, *Revue de l'Institut Français du pétrole*, **3**, 337-352, (1995).

Royer P., Auriault J.-L., Strzelecki T. : Macroscopic Behavior of Gas Flow with Adsorption through a Fractured Porous Medium *Mechanics Research Communication*, **23** (1), 67-73, (1996).

Royer P., Auriault J.-L., Boutin C. : Macroscopic Modeling of Double-Porosity Reservoirs, *Journal of Petroleum Science and Engineering*, **16**, 187-202, (1996).

Royer P., Auriault J.-L., Boutin C. : Reply to : Macroscopic Modeling of Double-Porosity Reservoirs, by M. Bai and F. Civan, *Journal of Petroleum Science and Engineering*, **20**, 89-92, (1998).

Royer P., Auriault J.-L. : Homogenization of compressible fluid flow in porous media with interfacial flow barrier, *Archives of Mechanics*, **51** (3-4), 469-486.

Royer P., Auriault J.-L., Lewandowska J., Serres C. (2002) : Continuum modelling of contaminant transport in fractured porous media, *Transport in Porous Media*, **49** (3), 333-359, (2002).

Royer P., Auriault J.-L., Lewandowska J., Serres C. (2002) : Contaminant transport in fractured porous media, *Studia Geotechnica et Mechanica*, **XXV** (1-2), 171-180, (2003).

Royer P., Auriault J.-L., Boutin C. (2008) : The three characteristic behaviours of dual-porosity media, Proceedings of XXII International Congress of Theoretical and Applied Mechanics, Adelaide, Australia, 24-29 August, (2008).

Royer P., Cherblanc F. : Homogenisation of advective-diffusive transport in poroelastic media, *Mechanics Research Communication*, **37**, 133–136, (2010).

Royer P., Boutin C. : Time analysis of the three characteristic behaviors of dual-porosity media. I : Fluid Flow and Solute Transport, *Transport in Porous Media*, **95**, 603-62, (2012).

Royer P., Cherblanc F. : Corrigendum to "Homogenisation of advective-diffusive transport in poroelastic media", *Mechanics Research Communication*, **73**, 145-147, (2016).

Royer P. : Higher-order homogenisation of convection-diffusion in porous media, *Transport in Porous Media*, à soumettre, (2016).

Royer P., Ambard D., Cherblanc F. : Dispersion in poroelastic media (en préparation).

Sanchez-Palencia E. : Comportement local et macroscopique d'un type de milieux physiques hétérogènes, *International Journal of Engineering Science*, **12**, 331-351, (1974).

Sanchez-Palencia, E. : *Non-Homogeneous Media and Vibration Theory*, Lecture Notes in Physics 127, Springer-Verlag, Berlin, (1980).

Schraad, M. et Triantafyllidis, N. : Effects of scale size on media with periodic and nearly periodic microstructures - I macroscopic properties, *Journal of Applied Mechanics*, **64**, 751–762, (1997).

Skjetne E., Auriault J.-L. : Homogenization of wall-slip gas flow through porous media, *Transport in Porous Media*, **36**, 293-306, (1999).

Slattery J.C. : Flow of viscoelastic fluids through porous media, *American Institute of Chemical Engineers Journal*, **13**, 1066-1071, (1967).

Smith D.S : One-dimensional contaminant transport through a deforming porous medium : theory and a solution for a quasi-steady-state problem, *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, **24**, 693-722, (2000).

Swider P., Accadbled F., Laffosse J.M., Sales de Gauzy J. : Influence of fluid-flow direction on effective permeability of the vertebral end plate : an analytical model, *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering*, **15** (2), 151-156.

Smyshlyaev, V. et Cherednichenko, K. : On rigorous derivation of strain gradient effects in the overall behaviour of periodic heterogeneous media, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **48**, 1325–1357, (2000).

Tate M.L.K. : Mixing Mechanisms and Net Solute Transport in Bone, *Annals of Biomedical Engineering*, 810-811, (2001).

Tollenaere H., Caillerie D. : Continuous modeling of lattice structures by homogenization *Adv. Eng. Software (special issue)*, **29**, (7), 699–705, (1998).

Tejchman M. : *Solute transport through Single and Dual Porosity Media. Mathematical Modelling via Homogenization and Column Experimental Investigations*, Thèse de Doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble.

Triantafyllidis, N., Bardenhagen, S. : The influence of scale size on the stability of periodic solids and the role of associated higher order gradient continuum models, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **44**, 1891–1928, (1996).

Urciuolo F., Imparato G., Netti P.A : Effect of Dynamic Loading on Solute Transport in Soft Gels Implication for Drug Delivery, *AIChE Journal*, **54**, 824-834, (2008).

Valdés-Parada F.J., Lasseux D., Bellet F. : A new formulation of the dispersion tensor in homogeneous porous media, *Advances in Water Resources*, **90**, 70-82, (2016).

Wang L., Cowin S.C., Weinbaum S., Fritton S.P. : Modeling Tracer Transport in an Osteon under Cyclic Loading, *Annals of Biomedical Engineering*, **28**, 1200-1209, (2000).

Warren J.E, Root P.J. : The behavior of naturally fractured reservoirs, *J. Soc. Petroleum Engineers*, **3**, 245-255 (1963).

Whitaker S. : Diffusion and dispersion in porous media, *AIChe J.*, **13**,420-427, (1967).

Whitaker S. : Flow in porous media I : A theoretical derivation of Darcy's law, *Transport in Porous Media*, **1**, 3-25, (1986).

Whitaker S. : *The Method of Volume Averaging*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, (1999).

Wilson R.K., Aifantis E.C. : On the theory of consolidation with double porosity, *Int. J. Engng. Sci*, **20**(9), 1009-1035, (1982).

Wood B., Quintard M., Whitaker S. :Methods for predicting diffusion coefficients in biofilms and cellular systems, *Methods in Enzymology*, **337**, 319-338, (2001).

Zaoui A. : Approximate statistical modelling and applications, *Lecture Notes in Physics, Homogenization Techniques for composite Media*, **272**, 338-397, (1987).