HAL open science

Une méthode de tir adaptée pour l'estimation des vibrations auto-entretenues à l'origine du crissement d'un frein à disque ferroviaire

Olivier Chiello, Lucien Charroyer, Jean-Jacques Sinou

To cite this version:

Olivier Chiello, Lucien Charroyer, Jean-Jacques Sinou. Une méthode de tir adaptée pour l'estimation des vibrations auto-entretenues à l'origine du crissement d'un frein à disque ferroviaire. 14ème Congrès Français d'Acoustique (CFA'18), Apr 2018, LE HAVRE, France. hal-02007425

HAL Id: hal-02007425

https://hal.science/hal-02007425v1

Submitted on 5 Feb 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

CFA '18 LE HAVRE ▪ 23-27 avril 2018
14ème Congrès Français d'Acoustique

Une méthode de tir adaptée pour l'estimation des vibrations auto-entretenues à l'origine du crissement d'un frein à disque ferroviaire

O. Chiello[a], L. Charroyer[b,a,c] et J.-J. Sinou[c,d]
[a]Univ Lyon, IFSTTAR, CEREMA, UMRAE, F-69675 Lyon, France
[b]Univ Lyon, Centre Lyonnais d'Acoustique, F-69000 Lyon, France
[c]LTDS UMR CNRS 551, Ecole Centrale de Lyon, 69134 Ecully, France
[d]Institut Universitaire de France, 75005 Paris, France
olivier.chiello@ifsttar.fr

Grâce aux nombreux travaux de recherche réalisés ces dernières années, les principaux phénomènes vibratoires à l'origine du crissement des freins à disque en moyenne et haute fréquence sont aujourd'hui bien identifiés. Dans la plupart des cas, des instabilités par couplage modal de l'équilibre quasi-statique glissant semblent être responsables des vibrations auto-entretenues du système. Ces instabilités peuvent être caractérisées en première approche à l'aide d'une analyse fréquentielle linéarisée. Toutefois, l'estimation des amplitudes et du contenu spectral complet des oscillations en régime stationnaire nécessite une analyse non linéaire plus délicate à mettre en œuvre d'un point de vue calculatoire. Les deux techniques les plus utilisées sont l'intégration numérique dans le domaine temporel à partir de conditions initiales données et l'équilibrage harmonique permettant la recherche directe de régimes périodiques ou quasi-périodiques. Dans le cas de modèles éléments finis comportant de nombreux degrés de libertés les deux méthodes conduisent souvent à des coûts de calcul (charge et mémoire) trop importants pour être utilisés en pratique. Dans ce papier, une alternative est proposée pour l'estimation de régimes périodiques dans les cas mono-instables. Il s'agit d'une méthode de tir réduite permettant une approximation des vibrations auto-entretenues en quelques itérations. La méthode est testée sur un modèle simplifié de frein à disque ferroviaire.

1 Introduction

La compréhension et la modélisation des mécanismes à l'origine des bruits de crissement constituent un enjeu important pour les ingénieurs et la communauté scientifique vibro-acoustique. De nombreuses recherches ont été consacrées au problème des vibrations induites par frottement. Des résumés de ces travaux peuvent par exemple être trouvés dans [1, 2]. En considérant que le bruit de crissement est lié à des instabilités de couplages de modes, deux types d'études sont classiquement réalisées : la première est basée sur l'analyse de stabilité du système. Elle permet de déterminer l'occurrence et les caractéristiques des instabilités vibratoires conduisant à des vibrations auto-entretenues c'est-à-dire d'événements potentiellement crissants. La seconde correspond à l'analyse non-linéaire de l'évolution temporelle du système et permet de calculer les vibrations auto-entretenues elles-mêmes, en particulier les niveaux vibratoires auxquels elles se stabilisent. En effet, partant d'un état proche de l'équilibre, un système soumis à des instabilités voit généralement l'amplitude des vibrations augmenter jusqu'à apparition de non-linéarités et saturation. L'évolution temporelle de ce type de système est donc composée d'un régime transitoire et d'un régime stationnaire lorsque les amplitudes se sont stabilisées (cycle limite).

Les techniques numériques actuelles ne permettent pas de déterminer avec efficacité et en conservant des temps de calcul raisonnables le régime stationnaire des vibrations auto-entretenues, quantité généralement recherchée d'un point de vue industriel. En effet, d'un côté l'intégration numérique directe permet de déterminer le régime stationnaire (cf. par exemple [3, 4]), mais nécessite également le calcul du régime transitoire. D'un autre côté, la méthode de balance harmonique sous contraintes permet de déterminer directement le régime stationnaire (cf. par exemple [5]). Néanmoins cette dernière peut s'avérer délicate d'utilisation pour des modèles éléments finis de grandes tailles.

Cette étude propose de tester une méthode de tir pour déterminer le régime stationnaire de systèmes déstabilisés par frottement, sous la forme d'une solution périodique. La méthode de tir permet en effet de calculer directement une telle solution par une série de courtes intégrations temporelles en itérant sur les conditions initiales et la période [6]. Son principal inconvénient est l'estimation des conditions initiales correspondant à la première itération et le calcul exact de la jacobienne de l'algorithme. Pour pallier à ces problèmes, une méthode d'estimation énergétique simplifiée ainsi qu'une réduction de l'espace des phases des conditions initiales sont proposées. Dans ce papier, la méthode est appliquée à un modèle éléments finis simplifié (FEM) de frein de TGV.

2 Formulation du problème

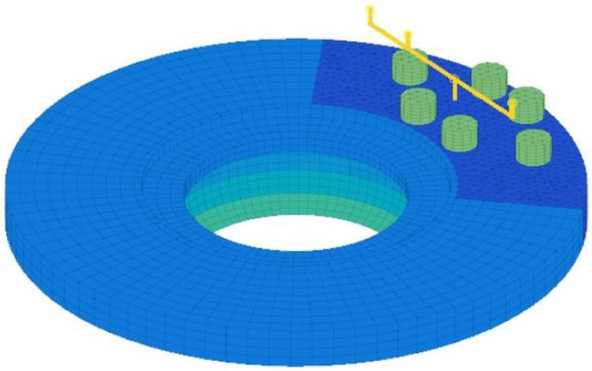

Figure 1 – Modèle éléments finis simplifié de frein à disque ferroviaire

Le système étudié est représenté par la Fig. 1. Le moyeu est représenté par des éléments de coques et le disque et les plots des garnitures par des éléments volumiques. Les faces externes des plots sont solidaires et fixées à deux solides rigides modélisant de manière très simplifiée les armatures des garnitures et les porte-garnitures. Les porte-garnitures sont ici directement fixés au bâti par de simples raideurs au niveau des liaisons avec les étriers et les bielles de reprise d'effort. Les raideurs choisies dans cette étude permettent uniquement le déplacement normal des porte-garnitures. Une force extérieure de serrage de 500 N est imposée à chaque liaison porte-garnitures/étrier soit 1000 N de part et d'autre du disque. L'évolution du système discrétisé par éléments finis est régie par l'équation du mouvement :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F} + \mathbf{P}_n^T\mathbf{R}_n + \mathbf{P}_t^T\mathbf{R}_t \qquad (1)$$

où $\ddot{\mathbf{U}}$, $\dot{\mathbf{U}}$ et $\mathbf{U}$ sont les vecteurs de coordonnées nodales en déplacement, vitesse et accélération. Le vecteur $\mathbf{F}$ représente les forces extérieures de serrage. Les réactions appliquées sur le disque et les plots au niveau des noeuds à l'interface repérées par les matrices $\mathbf{P}_n$ et $\mathbf{P}_t$ regroupent les réactions équivalentes de contact normal $\mathbf{R}_n$ et les forces équivalentes

de frottement $\mathbf{R}_t$. $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$ et $\mathbf{K}$ sont respectivement les matrices de masse, d'amortissement et de raideur de la structure sans contact. Un amortissement de type Rayleigh est utilisé.

Le contact entre le disque et les plots est supposé unilatéral (sans interpénétration). Le frottement est gouverné par une loi de Coulomb à coefficient de frottement μ constant. Ces lois sont exprimées nœud à nœud sous forme de projections augmentées comme indiqué par les équations (2). Les projections s'effectuent sur l'espace des réels négatifs pour les réactions normales et sur le cône de Coulomb C pour les forces de frottement. Le vecteur $\mathbf{G}_0$ est le jeu initial normal et la vitesse de glissement imposée est notée $\mathbf{V}$.

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_n &= \mathrm{proj}_{\mathbb{R}^-}(\mathbf{R}_n - \rho_n \mathbf{P}_n(\mathbf{U} - \mathbf{G}_0)) \quad \forall \rho_n > 0 \\ \mathbf{R}_t &= \mathrm{proj}_C(\mathbf{R}_t - \rho_t(\mathbf{P}_t \dot{\mathbf{U}} - \mathbf{V})) \quad \forall \rho_t > 0 \end{aligned} \tag{2}$$

3 Étude de stabilité

La stabilité du système est d'abord étudiée. Le comportement de petites perturbations autour de l'équilibre glissant quasi-statique est analysé afin de déterminer l'occurrence des instabilités. L'équilibre est calculé avec un algorithme des statuts permettant de déterminer la présence de contact pour chaque couple de nœud à l'interface. Les nœuds en contact à l'équilibre repérés par les matrices $\tilde{\mathbf{P}}_n$ et $\tilde{\mathbf{P}}_t$ sont supposés en contact pour l'étude de stabilité (contact bilatéral imposé par des contraintes). Les forces de frottement sont ensuite linéarisées en glissement autour de la position d'équilibre statique et les valeurs propres complexes du problème sont calculées à partir du système aux valeurs propres non symétrique contraint :

$$\begin{aligned} (\lambda^2 \mathbf{M} + \lambda(\mathbf{C} + \mathbf{C_b}) + \mathbf{K})\tilde{\mathbf{U}} &= (\tilde{\mathbf{P}}_\mathbf{n}^T + \mu \tilde{\mathbf{P}}_\mathbf{t}^T)\tilde{\mathbf{R}}_\mathbf{n} \\ \tilde{\mathbf{P}}_\mathbf{n}\tilde{\mathbf{U}} &= 0 \end{aligned} \tag{3}$$

où $\mathbf{C_b}$ est la matrice d'amortissement résultant de la linéarisation de la direction des forces de frottement. Ce calcul est effectué par itération sur le résidu à partir de la base des 100 premiers modes propres réels du système, calculés sans prise en compte du frottement ni de l'amortissement. Si les parties réelles de toutes les valeurs propres sont négatives, le système est stable. À contrario, si l'une d'entre elles a une partie réelle positive alors le système est instable et des vibrations auto-entretenues ainsi que du bruit de crissement peuvent alors survenir. Tous les détails d'une telle analyse peuvent être retrouvés par exemple dans [7]. Pour un coefficient de frottement égal à 0.2, un seul mode instable induit par couplage de mode apparaît à la fréquence de 3382 Hz comme le montre la Fig. 2. La déformée du mode instable à $\mu = 0.2$ est illustrée Fig. 3.

4 Méthode de tir adaptée

Le calcul des vibrations auto-entretenues non linéaire résultant de cette instabilité peut être effectuée à l'aide d'une intégration numérique temporelle à partir de conditions initiales données. Des méthodes de projection non linéaires telles que la balance harmonique sous contraintes peuvent également être utilisées pour déterminer directement un

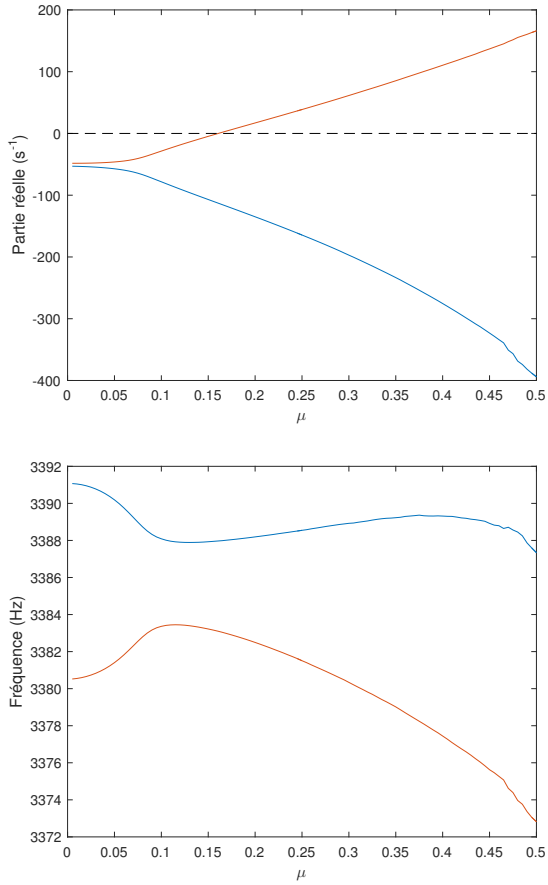

FIGURE 2 – Évolution des valeurs propres des modes couplés en fonction du coefficient de frottement

régime stationnaire solution. Dans ce papier, une alternative à ces méthodes est proposée. Il s'agit d'une méthode de tir adaptée capable de déterminer un régime stationnaire périodique à partir d'intégrations numériques temporelles successives.

4.1 Principe de la méthode de tir

La méthode de tir est une technique numérique très populaire [6] qui permet de déterminer itérativement les conditions initiales ainsi que la période correspondant au mouvement périodique recherché. Le processus de tir redéfinit les équations du mouvement comme un problème aux frontières devant satisfaire la condition de périodicité temporelle. Pour des conditions initiales et une période données, la condition de périodicité peut être calculé à partir d'une intégration numérique sur la période. A chaque itération les conditions initiales et la période sont corrigées de manière à faire converger la condition de périodicité. Les corrections sont effectuées à l'aide d'un algorithme de Newton-Raphson sous réserve de pouvoir calculer la jacobienne à chaque itération. Cette jacobienne dépend principalement de la matrice de monodromie qui représente la variation de l'état final de la solution sur un période en fonction de petites perturbations des conditions initiales. Il existe deux façons de calculer cette matrice. Elle peut être évaluée numériquement par différences finies : chaque condition initiale est successivement perturbée et l'équation du mouvement est alors intégrée en temps. Une solution alternative est obtenue avec une analyse de sensibilité

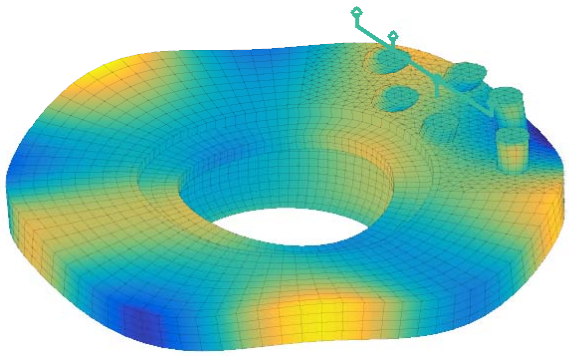

FIGURE 3 – Déformée du mode instable à $\mu = 0.2$

appelée méthode de Newton-Fox [6].

L'avantage de la méthode de tir est qu'elle permet d'utiliser un schéma d'intégration temporelle adapté au système. Ainsi l'évolution du système est conservée, et contrairement aux autres méthodes les forces non-linéaires ne sont pas simplifiées. Cependant l'utilisation de la méthode de tir engendre deux problèmes. Le premier provient de l'utilisation d'un algorithme de Newton-Raphson qui est un algorithme local. Par conséquent lorsque la méthode de tir est initialisée trop loin de la solution recherchée, il se peut qu'elle diverge. La seconde difficulté concerne le calcul de la matrice de monodromie. Quelque soit la technique choisie, le calcul exact revient à effectuer $2N$ simulations temporelles à chaque itération où N est le nombre de degrés de liberté du système, ce qui est rapidement prohibitif. Pour palier au premier inconvénient, nous proposons une initialisation appropriée de l'algorithme. Pour la deuxième difficulté, une réduction de l'espace des phases des conditions initiales est présentée ci-dessous.

4.2 Initialisation énergétique

Une méthode énergétique simplifiée est proposée pour estimer la solution initiale du processus du tir. Elle est basée sur l'observation du comportement des systèmes soumis à des instabilités, pour lesquels l'amplitude des vibrations augmente jusqu'à saturation. Cette saturation implique une diminution de la puissance injectée par le contact alors que la puissance dissipée par amortissement reste approximativement constante. On recherche un cycle périodique $\mathbf{U}(q,t)$ basé sur la déformée Φ et la pulsation $\omega = \Im(\lambda)$ du mode complexe instable issu de l'étude de stabilité :

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(q,t) &= q\Re(q\Phi\exp(i\omega t)) \\ \dot{\mathbf{U}}(q,t) &= \Re(i\omega q\Phi\exp(i\omega t)) \end{aligned} \tag{4}$$

Pour estimer l'amplitude q du mode, le principe est d'équilibrer le bilan de puissance moyen sur le cycle lorsque le système est stationnaire. Le bilan de puissance instantané s'écrit :

$$\frac{\partial E}{\partial t}(q,t) + P_C(q,t) = P_R(q,t) + P_F(q,t) \tag{5}$$

où $\frac{\partial E}{\partial t}$ est la variation d'énergie mécanique, P_C la puissance dissipée par amortissement, P_R la puissance injectée par les réactions de contact et P_F la puissance injectée par les efforts imposés. En régime stationnaire, sur un cycle de période $T = 2\pi/\omega$, la variation d'énergie mécanique et la puissance injectée par les efforts statiques sont nulles en moyenne sur la période. Le bilan de puissance moyen sur le cycle, ramené à l'énergie mécanique moyenne $\bar{E}$, devient :

$$\bar{\tau}_C = \bar{\tau}_R(q) \tag{6}$$

où $\bar{\tau}_C$ est le taux de puissance dissipée par amortissement, indépendant de q, et donné linéairement par :

$$\bar{\tau}_C = \frac{\bar{P}_C}{\bar{E}} = \frac{2\Phi^{*T}\mathbf{C}\Phi}{\omega^2\Phi^{*T}\mathbf{M}\Phi + \Phi^{*T}\mathbf{K}\Phi} \tag{7}$$

et $\bar{\tau}_R(q)$ est le taux de puissance injectée par les réactions de contact qui est calculé numériquement sur une période T selon :

$$\bar{\tau}_R(q) = \frac{\bar{P}_R}{\bar{E}} = \frac{\frac{1}{T}\int_T \dot{\mathbf{U}}(q,t)^T\left(\mathbf{P}_n^T\mathbf{R}_n(q,t) + \mathbf{P}_t^T\mathbf{R}_t(q,t)\right)dt}{\frac{1}{4}|q|^2(\omega^2\Phi^{*T}\mathbf{M}\Phi + \Phi^{*T}\mathbf{K}\Phi)} \tag{8}$$

où $\mathbf{R}_n(q,t)$ et $\mathbf{R}_t(q,t)$ sont les réactions non linéaires induites par les champs de déplacement et de vitesse $\mathbf{U}(q,t)$ et $\dot{\mathbf{U}}(q,t)$.

Par une technique simple de balayage on recherche alors l'amplitude q_0 permettant de vérifier le bilan moyen (6).

4.3 Réduction de l'espace des phases

On présente ici une démarche permettant de réduire le nombre de degrés de liberté sur lesquels la méthode de tir itère. On recherche en effet les conditions initiales menant vers une solution périodique dans un espace de phase réduit de la forme :

$$\mathbf{Z} = \left\{\begin{array}{c}\mathbf{U}\\ \dot{\mathbf{U}}\end{array}\right\} = \left[\begin{array}{cc}\mathbf{T} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{T}\end{array}\right]\mathbf{Q} \tag{9}$$

où $\mathbf{T} = \left[\mathbf{T_1} \quad \dots \quad \mathbf{T_m}\right]$ est une base réduite réelle de taille m du champs de déplacements supposée orthonormalisée par rapport à la matrice de masse de sorte que $\mathbf{T}^T\mathbf{M}\mathbf{T} = \mathbf{I}$ tandis que $\mathbf{Q} = \{p_1 \dots p_n \quad q_1 \dots q_n\}^T$ est le vecteur des amplitudes en déplacement et vitesse associé.

A chaque itération i du processus de tir, l'équation du mouvement (1) est intégrée sur une période T^i à partir du vecteur de conditions initiales $\mathbf{Z}(\mathbf{Q}^i)$. Les corrections $\Delta\mathbf{Q}^i$ et ΔT^i apportées au vecteur $\mathbf{Q}^i$ ainsi qu'à la période T^i sont calculées en résolvant le système :

$$\mathbf{H}(\mathbf{Q}^i, T^i) + \left.\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial\mathbf{Q}}\right|_{\mathbf{Q}^i,T^i}\Delta\mathbf{Q}^i + \left.\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial T}\right|_{\mathbf{Q}^i,T^i}\Delta T^i = \mathbf{0} \tag{10}$$

où $\mathbf{H}(\mathbf{Q},T)$ est la condition de périodicité réduite de composantes :

$$\left.\begin{array}{r} H_j = \mathbf{T_j}^T\mathbf{M}\mathbf{U}(\mathbf{Q},T) - q_j \\ H_{j+m} = \mathbf{T_j}^T\mathbf{M}\dot{\mathbf{U}}(\mathbf{Q},T) - p_j \end{array}\right\}\forall j \ : 1 \le j \le m \tag{11}$$

Cette procédure requiert le calcul des deux dérivées partielles de $\mathbf{H}(\mathbf{Q},T)$. Le vecteur $\mathbf{G}(\mathbf{Q},T) = \partial\mathbf{H}/\partial T$, de taille $2m \times 1$, représente la dérivée du vecteur de phase réduit et a pour composantes :

$$\left.\begin{array}{r} G_j = \mathbf{T_j}^T\mathbf{M}\dot{\mathbf{U}}(\mathbf{Q},T) \\ G_{j+m} = \mathbf{T_j}^T\left(\mathbf{E} - \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}(\mathbf{Q},T) - \mathbf{K}(\mathbf{U}(\mathbf{Q},T)\right) \end{array}\right\}\forall j \ : 1 \le j \le m \tag{12}$$

avec $\mathbf{E} = \mathbf{F} + \mathbf{P}_n^T\mathbf{R}_n(\mathbf{Q},T) + \mathbf{P}_t^T\mathbf{R}_t(\mathbf{Q},T)$. Par ailleurs, la deuxième matrice est donnée par $\partial\mathbf{H}/\partial\mathbf{Q} = \mathbf{J_q}(\mathbf{Q},T) - \mathbf{I}$ où

la matrice de monodromie $\mathbf{J_q}$, de taille $2m \times 2m$, représente la variation des amplitudes réduites au temps T vis-à-vis des amplitudes réduites initiales $\mathbf{Q}$. Chaque colonne de cette matrice est calculée par différence finie à partir d'une perturbation d'une composante du vecteur $\mathbf{Q}$. Pour $1 \leq k \leq 2m$ le vecteur perturbé à l'amplitude k est défini par :

$$\mathbf{Q} + \delta Q_k \mathbf{e_k} \quad \forall k \ : \ 1 \leq k \leq 2m \tag{13}$$

où $\mathbf{e_k}$ représente la $k^{\text{ième}}$ colonne de la matrice identité, Q_k la $k^{\text{ième}}$ composante de $\mathbf{Q}$ et δ le taux de perturbation numérique. La k^{ieme} colonne de la matrice de monodromie projetée est alors donnée par :

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{J_q}\Big|_j^k &= \frac{\mathbf{T_j}^T \mathbf{M}(\mathbf{U}(\mathbf{Q}+\delta Q_k \mathbf{e_k}, T) - \mathbf{U}(\mathbf{Q}, T))}{\delta Q_k} \\ \mathbf{J_q}\Big|_{j+m}^k &= \frac{\mathbf{T_j}^T \mathbf{M}(\dot{\mathbf{U}}(\mathbf{Q}+\delta Q_k \mathbf{e_k}, T) - \dot{\mathbf{U}}(\mathbf{Q}, T))}{\delta Q_k} \end{aligned}\right\} \forall j \ : 1 \leq j \leq m \tag{14}$$

Cette méthode permet de calculer alors la matrice de monodromie en utilisant $2m$ intégrations temporelles sur une période T qui peuvent être menées en parallèle pour une optimisation du temps de calcul.

La résolution du système (10) permet alors de corriger les amplitudes réduites et la période :

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}^{i+1} &= \mathbf{Q}^i + \Delta \mathbf{Q}^i \\ T^{i+1} &= T^i + \Delta T^i \end{aligned} \tag{15}$$

On itère ainsi jusqu'à satisfaction de critères de convergence sur les amplitudes réduites en déplacement et vitesse ainsi que sur la période.

On insiste sur le fait que la méthode de tir réduite proposée n'est absolument pas équivalente à une simple réduction de la dynamique du système. Seules les conditions initiales sont projetés sur la base $\mathbf{T}$. Toutes les intégrations numériques temporelles sont effectuées sans réduction.

5 Résultats

Pour valider la méthode de tir présentée, les vibrations auto-entretenues du modèle de frein sont calculées à $\mu = 0.2$ à l'aide d'une intégration temporelle directe à partir de conditions initiales proches de l'équilibre. La θ-méthode modifiée, un schéma d'intégration conservatif et stable lorsque $\theta = 0.5$ et permettant de vérifier une loi de choc inélastique, est utilisée pour l'intégration temporelle numérique (voir [4, 8, 9] pour plus de détails). A chaque itération, un algorithme itératif de point fixe combiné à une condensation de l'équation d'équilibre dynamique (1) sur les degrés de liberté de contact permet de résoudre les équations de contact frottant (2). La Figure 4 représente la variation d'énergie mécanique et le spectrogramme énergétique du calcul direct. L'apparition des harmoniques dans le spectrogramme correspond à l'apparition de décollements transitoires au niveau de la zone de contact qui saturent non linéairement la solution linéaire instable et induisent un régime stationnaire périodique. La fréquence fondamentale du cycle est légèrement plus basse (3376 Hz) que celle du mode instable (3382 Hz).

La méthode de tir réduite est testée avec une base très simple composée des parties réelles et imaginaires du mode complexe instable ainsi que de l'équilibre quasi-statique $\mathbf{U}_{\text{stat}}$ soit $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \Re(\Phi) & \Im(\Phi) & \mathbf{U}_{\text{stat}} \end{bmatrix}$. Le vecteur des amplitudes réduites est initialisé à l'aide de la solution q_0 du critère

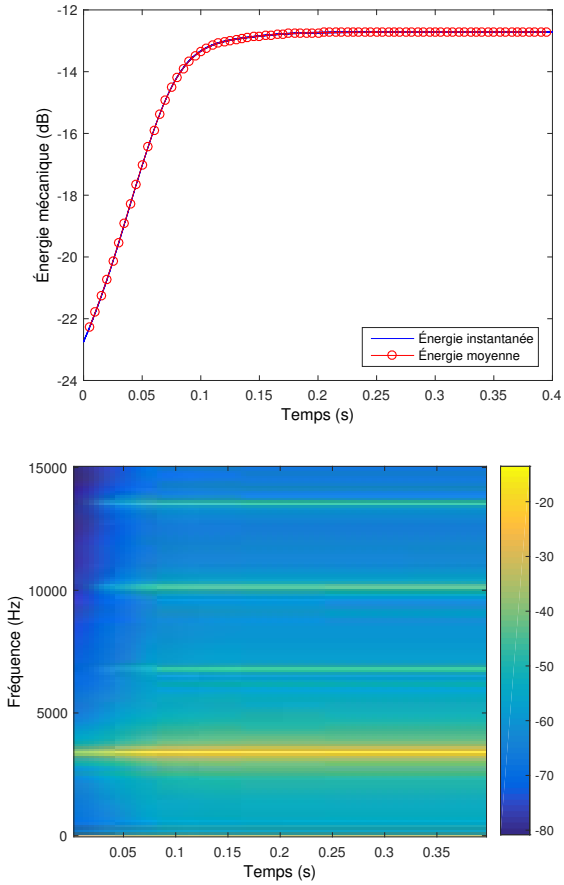

FIGURE 4 – Evolution de l'énergie mécanique et spectrogramme énergétique de la solution transitoire obtenue par intégration numérique directe

énergétique (6) soit $\mathbf{Q}^0 = \begin{Bmatrix} q0 & 0 & 1 & 0 & -\omega q_0 & 0 \end{Bmatrix}$ et la période initiale est choisie égale à celle du mode instable $T^0 = 2\pi/\omega$. Avec des critères de convergence en 10^{-3} et un taux de perturbation $\delta = 10^{-5}$, la méthode de tir converge en seulement 3 itérations vers un cycle de période 3375 Hz, soit une erreur de moins de 0.04% par rapport à la fréquence fondamentale de référence.

Le cycle approché obtenu avec la méthode de tir est comparé avec la solution de référence sur une période du régime stationnaire (à $t = 0.35$). L'erreur sur les composantes fréquentielles de l'énergie mécanique dans le cycle est donnée Fig. 5. On note une très bonne approximation aux composantes statique et fondamentale. Les écarts sont plus grands sur les énergies des harmoniques 2 à 5, de l'ordre de 3 dB. Les portraits de phase des amplitudes réduites sont comparés Fig. 7. Les cycles correspondant aux deux premières amplitudes sont bien approchées. Le troisième cycle correspond à la variation du mode statique. Il est moins bien reproduit du fait de sa contribution très faible en vitesse à l'énergie globale. Les portraits de phase correspondant à un noeud sur la zone de contact sont comparés Fig. 6. Mêmes si les tendances sont bien respectées, on constate que les non linéarités locales au contact ne sont pas très bien reproduites. Le décollement du noeud observé sur la composante normale du déplacement relatif obtenu avec la méthode de tir est beaucoup plus faible que celui obtenu obtenu avec l'intégration directe.

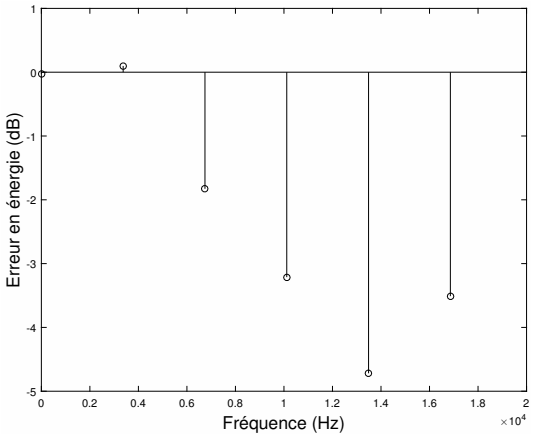

FIGURE 5 – Erreur sur les composantes fréquentielles de l'énergie mécanique obtenue avec la méthode de tir

6 Conclusion

Dans ce papier, une alternative aux méthodes de balance harmonique et d'intégration numérique transitoire est proposée pour l'estimation de régimes périodiques de systèmes frottants discrétisés par éléments finis et mono-instables. Il s'agit d'une méthode de tir adaptée permettant une approximation des vibrations auto-entretenues en quelques itérations. Deux contributions sont proposées pour l'application de la méthode de tir à ce type de problème. D'une part, une initialisation appropriée du processus de tir permet d'augmenter les chances de convergence de l'algorithme de Newton-Raphson. D'autre part, une réduction de l'espace des phases des conditions initiales permet de diminuer le nombre de degrés de liberté sur lesquels l'algorithme itère.

La méthode est testée sur un modèle simplifié de frein à disque ferroviaire mono-instable. Avec seulement trois modes dans la base réduite, correspondant aux parties réelles et imaginaires du mode instable et à la solution statique, la méthode converge rapidement vers un cycle limite approché dont la période est très proche de la période du cycle obtenu par intégration directe. La comparaison des énergies aux différentes composantes fréquentielles du cycle et des portraits de phase réduits montre également un bon accord, validant le bon comportement de la méthode d'un point de vue global. En revanche, les écarts sur les portraits de phase physiques au contact sont plus grands, attestant de la difficulté de la méthode à reproduire les comportement non linéaires locaux.

D'un point de vue pratique, la méthode proposée fournit ainsi une approximation globale très correcte des vibrations auto-entretenues permettant notamment le calcul rapide d'un spectre de bruit de crissement dans le cas traité ici.

Remerciements

Ce travail a été réalisé dans le cadre d'un thèse financée par le Centre Lyonnais d'Acoustique (CeLyA), Laboratoire d'Excellence (LabEx) de l'Université de Lyon (UdL). Les auteurs remercient le LabEx pour son soutien financier.

Références

[1] N. M. KINKAID, O. M. O'REILLY et P. PAPADOPOULOS : Automotive disc brake squeal. *Journal of Sound and Vibration*, 267(1):105–166, octobre 2003. ISSN 0022-460X. URL http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022460X02015730.

[2] H. OUYANG, W. NACK, Y. YUAN et F. CHEN : Numerical analysis of automotive disc brake squeal : a review. *International Journal of Vehicle Noise and Vibration*, 1(3-4):207–231, janvier 2005. ISSN 1479-1471. URL https://www.inderscienceonline.com/doi/abs/10.1504/IJVNV.2005.007524.

[3] F. MASSI, L. BAILLET et A. GIANNINI, O.and Sestieri : Brake squeal : Linear and nonlinear numerical approaches. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 21(6):2374–2393, août 2007. ISSN 0888-3270. URL http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0888327007000039.

[4] J. J. SINOU, A. LOYER, O. CHIELLO, G. MOGENIER, X. LORANG, F. COCHETEUX et S. BELLAJ : A global strategy based on experiments and simulations for squeal prediction on industrial railway brakes. *Journal of Sound and Vibration*, 332(20):5068–5085, septembre 2013. ISSN 0022-460X. URL http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022460X1300326X.

[5] N. COUDEYRAS, S. NACIVET et J. J. SINOU : Periodic and quasi-periodic solutions for multi-instabilities involved in brake squeal. *Journal of Sound and Vibration*, 328(4):520–540, décembre 2009. ISSN 0022-460X. URL http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022460X09006609.

[6] A. H. NAYFEH et B. BALACHANDRAN, éditeurs. *Applied Nonlinear Dynamics*. Wiley-VCH Verlag GmbH, Weinheim, Germany, mars 1995. ISBN 978-3-527-61754-8 978-0-471-59348-5. URL http://doi.wiley.com/10.1002/9783527617548.

[7] D. BRIZARD, O. CHIELLO, J. J. SINOU et X. LORANG : Performances of some reduced bases for the stability analysis of a disc/pads system in sliding contact. *Journal of Sound and Vibration*, 330 (4):703–720, février 2011. ISSN 0022-460X. URL http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022460X10005882.

[8] D. VOLA, E. PRATT, M. JEAN et M. RAOUS : Consistent time discretization for a dynamical frictional contact problem and complementarity techniques. *Revue Européenne des Éléments Finis*, 7(1-3):149–162, janvier 1998. ISSN 1250-6559. URL https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/12506559.1998.11690471.

[9] A. LOYER, J. J. SINOU, O. CHIELLO et X. LORANG : Study of nonlinear behaviors and modal reductions for friction destabilized systems. Application to an elastic layer. *Journal of Sound and Vibration*, 331 (5):1011–1041, février 2012. ISSN 0022-460X. URL http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022460X11008224.

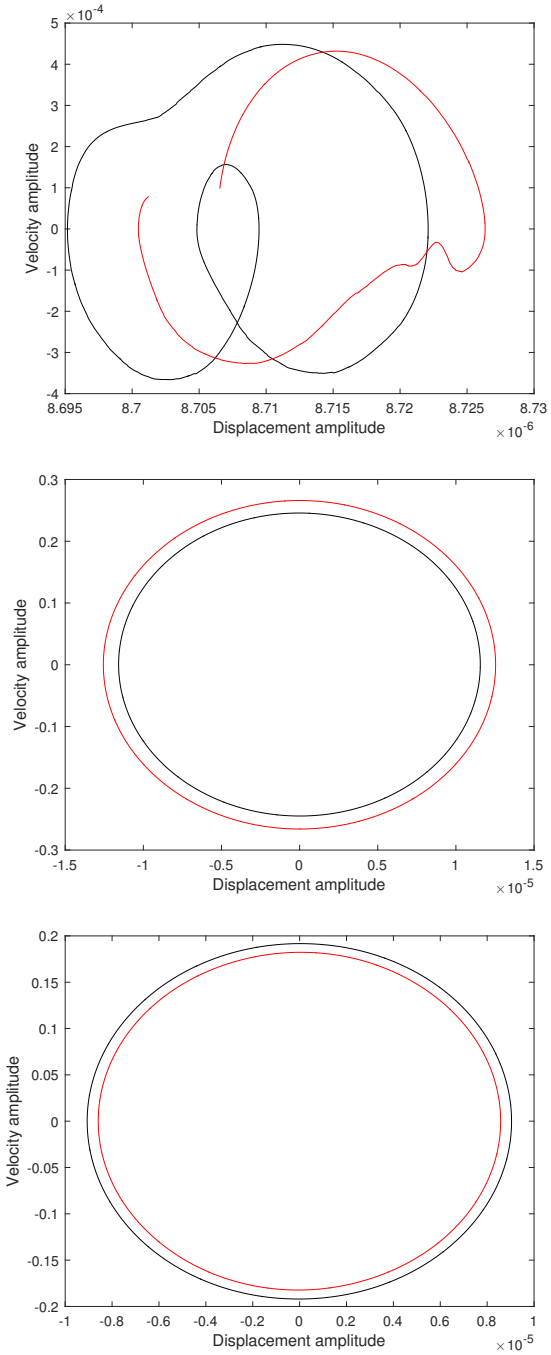

FIGURE 6 – Comparaison des portraits de phase réduits obtenus avec la méthode de tir (en rouge) et l'intégration directe (en noir)

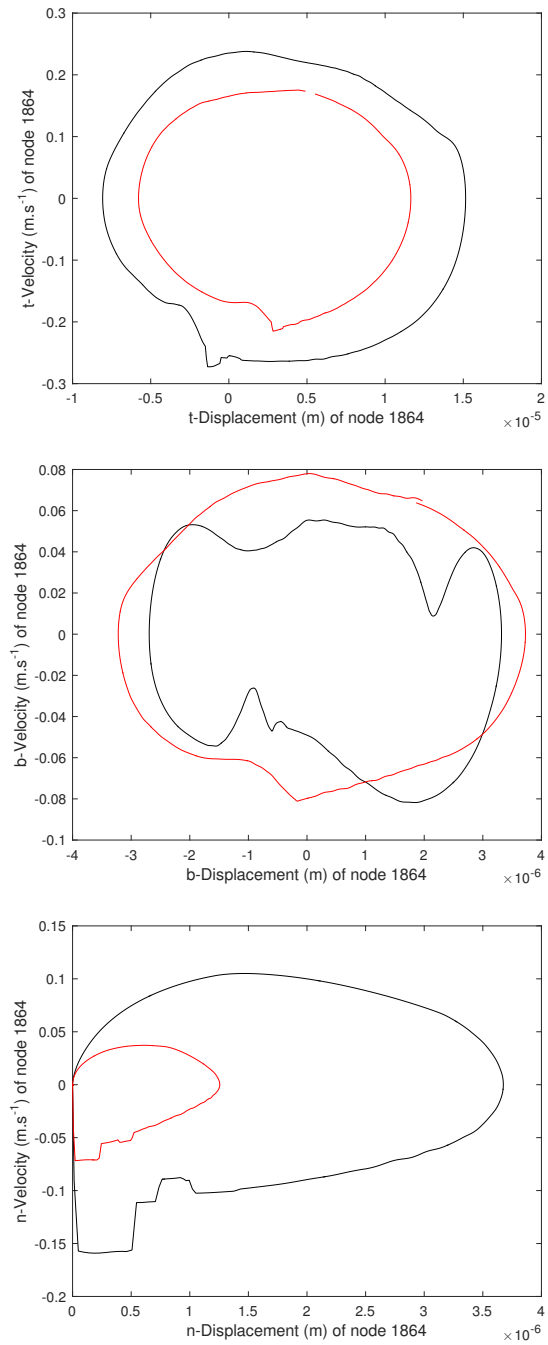

FIGURE 7 – Comparaison des portraits de phase dans le repère local d'un noeud de contact obtenus avec la méthode de tir (en rouge) et l'intégration directe (en noir)