



**HAL**  
open science

**Vitesse de glissement d'un film sur la surface d'un  
liquide avec onde de gravité. C.R. Acad Sc., Paris, t.  
282, B, 1976, p. 523-526.**

Michel Dudeck, Roger Prud'Homme

► **To cite this version:**

Michel Dudeck, Roger Prud'Homme. Vitesse de glissement d'un film sur la surface d'un liquide avec onde de gravité. C.R. Acad Sc., Paris, t. 282, B, 1976, p. 523-526.. Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences. Série B, Sciences physiques, 1976. hal-02005167

**HAL Id: hal-02005167**

**<https://hal.science/hal-02005167>**

Submitted on 4 Apr 2020

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

MÉCANIQUE DES FLUIDES. — *Vitesse de glissement d'un film sur la surface d'un liquide avec onde de gravité.* Note (\*) de MM. Michel Dudeck et Roger Prud'homme, transmise par M. Edmond-A. Brun.

On étudie la vitesse de glissement d'un film élastique superficiel, par rapport au liquide qu'il recouvre, en présence d'une onde de gravité de faible amplitude. Suivant la valeur du module d'élasticité du film, apparaissent un ou deux modes de propagation. Dans le premier de ces modes, la vitesse superficielle du liquide et celle du film sont de même sens; dans le second, elles sont de sens contraires.

L'équation de dispersion d'une onde de gravité qui se propage dans un liquide est modifiée par la présence d'un film superficiel. Ce film est supposé d'épaisseur négligeable mais doté de propriétés internes : masse surfacique, tension et vitesse. Ce milieu interfacial

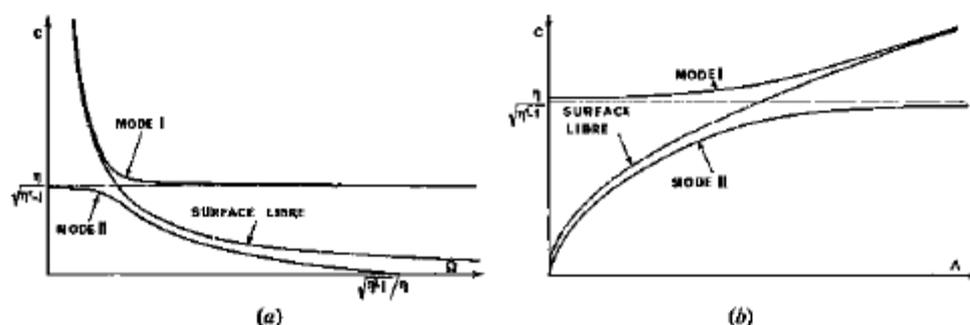


Fig. 1. — Courbes de dispersion avec  $\Omega = C/\Lambda$ .

est élastique et imperméable, il peut glisser sur la surface du liquide. L'ensemble est soumis à des perturbations de faible amplitude n'entraînant pas de variations de pression dans le gaz situé au-dessus du film.

Les équations de bilan [(1), (2), (3)] sont développées suivant les puissances croissantes d'un paramètre  $\varepsilon$  caractérisant l'amplitude de la déformation de la surface du liquide. Les termes d'ordre zéro (indice 0) correspondent à la solution de repos avec surface plane horizontale; les termes d'ordre un (indice 1) représentent les perturbations du premier ordre. La résolution des équations est limitée au premier ordre.

L'ensemble des équations ainsi obtenues permet d'établir l'équation de dispersion de l'onde.

Dans le liquide, fluide isotherme et non visqueux, l'équation de Bernoulli devient, au voisinage du film :

$$\Phi_{1,t} + g \left( f + \frac{\sigma_0}{\rho_0 g} f_{,tt} + \frac{\sigma_1}{\rho_0} \right)_t = 0,$$

avec  $y = \varepsilon f(x, t)$ , équation de la surface du liquide ( $y = 0$  représente la surface du liquide au repos);  $\Phi = \varepsilon \Phi_1 + O(\varepsilon^2)$ , potentiel des vitesses dans le liquide;  $\sigma = \sigma_0 + \varepsilon \sigma_1 + O(\varepsilon^2)$ , masse surfacique du film;  $\rho_0$ , masse volumique constante du liquide.

Les équations de bilan de masse et de quantité de mouvement du film développées au premier ordre s'écrivent :

$$- \text{Bilan de masse : } \sigma_{1,t} + \sigma_0 \hat{u}_{1,x} + [\rho_0 (v_1 - f_{,t})]_{-}^{+} = 0, \text{ avec}$$

$$\left. \begin{aligned} u &= \varepsilon \bar{u}_1 + O(\varepsilon^2) \\ v &= \varepsilon \bar{v}_1 + O(\varepsilon^2) \end{aligned} \right\} \text{composantes suivant les axes des } x \text{ et des } y \text{ de la vitesse interfaciale;} \\ v &= \varepsilon v_1 + O(\varepsilon^2) \text{ composante suivant l'axe des } y \text{ de la vitesse du liquide.}$$

$$- \text{Bilan de la quantité de mouvement :}$$

suitant l'axe des  $x$  :  $\sigma_0 \hat{u}_{1,t} - \gamma_{1,x} + \sigma_0 g f_{,x} = 0$ , avec  $\gamma = \gamma_0 + \varepsilon \gamma_1 + O(\varepsilon^2)$ , tension du film;

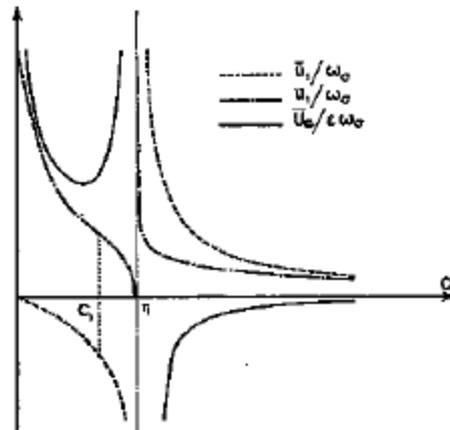


Fig. 2. — Facteur d'amplitude de vitesse horizontale de glissement du film sur le liquide.

Suivant l'axe des  $y$  :  $\sigma_0 \hat{v}_{1,t} - \gamma_0 f_{,xx} + [p_1]_{-}^{+} = -\sigma_1 g + \rho g f$ , avec  $p = p_0 + \varepsilon p_1 + O(\varepsilon^2)$ , champ de pression.

Le couplage entre le film et le liquide s'effectue par la condition de non-décollement du film :  $\hat{v}_1 = f_{,t}$ , et par l'action sur le liquide de la masse surfacique variable.

La condition d'imperméabilité du film s'écrit :  $v_1 = f_{,t}$ .

La tension du film est reliée à sa masse surfacique par la loi d'élasticité :

$$\gamma_1 = -\frac{E}{\sigma_0} \sigma_{1,x}$$

où  $E$  est le coefficient d'élasticité du film.

La recherche de solutions monochromatiques de la forme  $\varphi = \bar{\varphi} e^{i(kx - \omega t)}$  pour un bassin de profondeur infinie conduit à l'équation de dispersion suivante :

$$(\Lambda + 1)C^4 - [\Lambda^2 + \eta^2(\Lambda + 1)]C^2 + \Lambda^2(\eta^2 - 1) = 0,$$

avec  $C = c_0/c_\sigma$ , vitesse de phase réduite,  $c_0 = \omega/k$ ,  $c_\sigma^2 = \sigma_0 g/\rho_0$ ;  $\Lambda = \lambda/\lambda_\sigma$ , longueur d'onde réduite,  $\lambda = 2\pi(c_0/\omega)$ ,  $\lambda_\sigma = 2\pi(c_\sigma/\omega_\sigma)$ ;  $\eta = c_\sigma/c_\sigma$ , coefficient sans dimension, avec  $c_\sigma^2 = E/\sigma_0$  carré de la vitesse caractéristique du film.

Deux modes de propagation apparaissent (fig. 1). Pour les grandes longueurs d'onde, le premier mode ( $C > \eta$ ) tend vers la solution associée à une onde de gravité se propageant dans le liquide avec surface libre [(4), (5)], ( $\Omega = C^{-1}$ ).

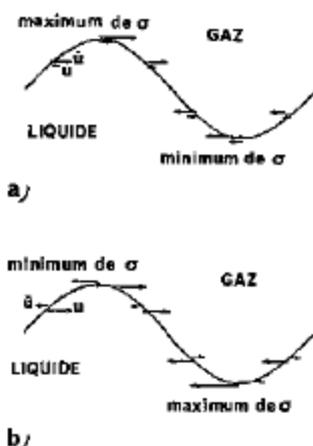


Fig. 3. — Dispositions respectives des vitesses horizontales du film et du liquide ainsi que des extrêmes de masse surfacique. (a) mode I; (b) mode II.

La vitesse de glissement du film sur le liquide a pour expression :

$$U_G = \varepsilon(u_1 - \hat{u}_1) = \varepsilon \omega_0 \left( \Omega - \frac{C^2}{C^2 - \eta^2} \right) \cos(kx - \omega t) + O(\varepsilon^2)$$

et la masse surfacique du film est égale à

$$\sigma = \sigma_0 + \varepsilon \frac{\rho_0}{C^2 - \eta^2} \cos(kx - \omega t) + O(\varepsilon^2).$$

L'amplitude de la vitesse de glissement est caractérisée par la quantité

$$\frac{\overline{U_G}}{\omega_0} = \varepsilon \left( \Omega - \frac{C^2}{C^2 - \eta^2} \right),$$

c'est une fonction de la vitesse de phase réduite  $C$  seule (fig. 2). Elle est négative pour le mode I et positive pour le mode II. Les sens respectifs des vitesses du film et du liquide dépendent également du mode considéré.

Pour le premier mode, la vitesse du film est supérieure à celle du liquide pour  $y \rightarrow (-0)$  et ces deux vitesses ont le même sens. La valeur maximale de la masse surfacique est atteinte au sommet de la houle et la valeur minimale dans le creux de la houle (fig. 3 a).

Pour le deuxième mode, les vitesses sont de sens opposés, la vitesse du film est supérieure ou inférieure à celle du liquide si la vitesse de phase est supérieure ou inférieure à une valeur particulière  $C_1$  (on obtient par exemple pour  $\eta = 5$ ,  $C_1 = 3,40$ ). Pour la masse surfacique, l'effet est inversé par rapport au premier mode (fig. 3 b).

Pour les valeurs de  $\eta$  plus petites ou égales à l'unité, seul le mode I subsiste.

(\*) Séance du 26 avril 1976.

- 
- (<sup>1</sup>) P. GERMAIN, *Mécanique des milieux continus*, Masson, Paris, 1962.  
(<sup>2</sup>) M. BARRÈRE et R. PRUD'HOMME, *Equations fondamentales de l'aérothermochimie*, Masson, Paris, 1973.  
(<sup>3</sup>) M. DUDECK, Rapport du laboratoire d'Aérothermique du C.N.R.S., n° 76-3.  
(<sup>4</sup>) L. M. MILNE-THOMSON, *Theoretical Hydrodynamics*, McMillan & Co Ltd, 1960.  
(<sup>5</sup>) H. BOUASSE, *Houles, rides, seiches et marées*, Delagrave, Paris, 1924.

*Laboratoire d'Aérothermique du C.N.R.S.,  
4 ter, route des Gardes,  
92190 Meudon.*