



**HAL**  
open science

## Sur l'équation de dispersion des mélanges gazeux réactifs

Roger Prud'Homme

► **To cite this version:**

Roger Prud'Homme. Sur l'équation de dispersion des mélanges gazeux réactifs. Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences. Série A, Sciences mathématiques, 1968. hal-02005067

**HAL Id: hal-02005067**

**<https://hal.science/hal-02005067v1>**

Submitted on 3 Feb 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

MÉCANIQUE DES FLUIDES. — *Sur l'équation de dispersion des mélanges gazeux multiréactifs.* Note (\*) de M. ROGER PRUD'HOMME, transmise par M. Paul Germain.

L'introduction de différents temps chimiques permet d'exprimer, sous une forme simple, l'équation de dispersion des mélanges gazeux réactifs. Cette équation permet un traitement global des différents problèmes de petites perturbations linéarisées.

1. Envisageons l'écoulement d'un mélange gazeux réactif, voisin d'un écoulement uniforme en équilibre chimique. Les phénomènes de transport (viscosité, diffusion, transfert de chaleur, etc.) sont supposés négligeables, de même que les forces extérieures et tous les phénomènes irréversibles, excepté ceux dus aux réactions chimiques.

Un développement, limité au premier ordre, des différentes grandeurs, conduit aux équations linéaires aux petites perturbations. Ces équations montrent que la perturbation d'entropie est nulle, ce qui permet d'envisager les cas où la vitesse dérive d'un potentiel  $\Phi$ .

2. On obtient un traitement global des équations aux petites perturbations linéaires en appliquant la transformation de Fourier à tout écart  $f$  de la fonction  $f$  par rapport à l'écoulement de référence :  $\hat{f}$  désigne la transformée de Fourier de  $f$  et  $\mathcal{O}$  occupe tout l'espace,  $z$  est un nombre complexe,  $\xi$  est un vecteur complexe :

$$(1) \quad \hat{f}(\xi, z) = \int_{\mathcal{O}} \hat{f}(\mathbf{r}, t) \exp.(-zt + \xi \cdot \mathbf{r}) d\mathbf{r} dt.$$

L'élimination des différentes variables donne l'équation de dispersion qui lie  $\xi$  et  $z$  (1).

Introduisons les notations :  $Z_c = a_{j_i}/a_{i_0}$ ,  $z' = z - \bar{V}_0 \cdot \xi$ ,  $Z^2 = a_{j_i}(\xi \cdot \xi)/z'^2$ ,  $a_{j_i}$  et  $a_{i_0}$  étant les valeurs de référence des célérités du son de Laplace pour le mélange à degré d'avancement constant et à affinité constante respectivement.

Introduisons, d'autre part, les temps chimiques  $\tau_{j_i}^*$ , à volume et entropie constants et  $\tau_{j_i}$ , à pression et entropie constantes (2), et les polynômes  $P(z')$ ,

identique à  $\prod_1^R (1 - \tau_{j_i} z')$  et  $P^*(z') \equiv \prod_1^R (1 - \tau_{j_i}^* z')$ , ainsi que le polynôme  $Q(z')$  de degré  $R - 1$  égal à

$$\frac{P(z') - Z_c^2 P^*(z')}{1 - Z_c^2}$$

En posant  $Q(z')$  identique à  $\prod_1^{R-1} (1 - \tau_{j_i}' z')$ , on définit  $R - 1$  nouveaux temps caractéristiques  $\tau_{j_i}'$ , tous positifs.

L'équation de dispersion prend alors l'une des formes

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} (Z^2 - 1) P(z') - (Z_0^2 - 1) Q(z') = 0, \\ (Z^2 - 1) Z_0^2 P^*(z') - (Z_0^2 - 1) Z^2 Q(z') = 0, \\ Z^2 P(z') - Z_0^2 P^*(z') = 0, \\ Z^2 - 1 = \sum_1^R \frac{Z_r^2 - 1}{1 - \tau_r z'} \end{array} \right.$$

Les nombres  $Z_r$  étant réels et tels que  $\sum_1^R (Z_r^2 - 1)$  soit égal à  $Z_0^2 - 1$ .

3. Le choix de l'une ou l'autre forme de l'équation de dispersion dépend du problème à résoudre.

— Les trois premières équations du système (2) s'adaptent au traitement dans l'espace physique, chaque premier membre étant considéré comme un opérateur portant sur le potentiel de vitesses.

Il suffit de remplacer  $\zeta$  par  $\nabla$  et  $(-z')$  par  $d_0/dt$  pour obtenir l'équation la plus générale; l'équation de la propagation des ondes sonores dans un milieu au repos s'obtient en remplaçant encore  $\zeta$  par  $\nabla$ , mais  $(-z')$  par  $\partial/\partial t$  et l'équation du mouvement stationnaire, en remplaçant  $\zeta$  par  $\nabla$  et  $(-z')$  par la dérivée de Stokes,  $D_0/Dt$ .  $D_0/Dt$  est égal à  $\tilde{\nabla}_0 \cdot \nabla d_0/dt$  à  $\tilde{\nabla}_0 \cdot \nabla + \partial/\partial t$ .

— Si l'on remplace  $Z$  par le rapport  $a_{z'}/V_0$  et  $z'$  par  $1/\tau^*$ , on obtient les  $R$  temps chimiques d'une évolution à entropie et à débit massique  $V/v$  unitaire constants (écoulement unidimensionnel stationnaire). Lorsque  $V_0$  tend vers zéro, on retrouve les  $\tau_r$ , et les  $\tau_r^*$  en faisant tendre  $V_0$  vers l'infini.

— L'équation de dispersion des ondes sonores dans un milieu au repos s'obtient en remplaçant  $z'$  par  $i\omega$ ,  $\omega$  est alors la pulsation de l'onde considérée, et  $\zeta$  par  $i\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{K}$  étant un vecteur complexe dont la partie réelle  $\mathbf{k}$  (vecteur nombre d'onde) et la partie imaginaire  $\gamma$  sont colinéaires. La résolution de l'équation de dispersion permet alors d'exprimer la célérité du son,  $c$ , égale au rapport  $\omega/k$  (ou vitesse de phase) et le coefficient d'absorption par unité de longueur d'onde  $\mu$ , égal à  $2\pi\gamma/k$ , en fonction de la fréquence  $\omega$ . Il est possible d'utiliser l'une quelconque des équations du système (2). La dernière de ces équations donne des résultats intéressants lorsque  $Z_0$  est voisin de l'unité, c'est-à-dire lorsque les célérités du son  $a_f$  et  $a_c$  sont voisines, on peut alors appliquer le principe de superposition, chaque onde multiréactive étant la somme d'ondes monoréactives (\*).

(\*) Séance du 22 janvier 1968.

(1) J. MEIXNER et H. G. REIK, *Handbuch der Physik*, III/2, Springer-Verlag, 1959, p. 470-494.

(2) H. J. BAUER, *Physical Acoustics*, II, Part A, Academic Press, 1965, p. 83-102.

(3) L. G. NAPOLITANO, XV<sup>e</sup> Congrès international d'Astronautique, Varsovie, III, 1964, p. 71-84.

(O. N. E. R. A.,  
25, avenue de la Division-Leclerc,  
Châtillon-sous-Bagneux, Hauts-de-Seine.)