



**HAL**  
open science

# Production d'entropie en interface avec polarisation électrique et magnétique

Roger Prud'Homme

► **To cite this version:**

Roger Prud'Homme. Production d'entropie en interface avec polarisation électrique et magnétique. Comptes Rendus de l'Academie des Sciences Serie II, 1978. hal-02004805

**HAL Id: hal-02004805**

**<https://hal.science/hal-02004805>**

Submitted on 4 Apr 2020

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**ÉLECTROTHERMODYNAMIQUE.** — *Production d'entropie en interface avec polarisation électrique et magnétique.* Note (\*) de Roger Prud'homme, présentée par M. Edmond A. Brun.

Les équations du bilan sont établies pour une interface considérée comme un milieu bidimensionnel en mouvement séparant deux milieux non polarisés. Le taux de production d'entropie calculé fait apparaître un terme supplémentaire dépendant des polarisations électrique et magnétique d'interface.

*Balance equations are given for an interface considered as a bidimensional moving medium, which separates two non-polarised phases. The calculated entropy production contains a supplementary term depending on electric and magnetic interfacial polarisation.*

Les équations du bilan de l'interface avec champ électromagnétique ont été établies par différents auteurs, avec cependant des hypothèses différentes. Si l'interface est une simple surface de séparation, il est possible de faire intervenir ou non la notion de charge et de courant de surface <sup>(1)</sup>. Dans les cas plus complexes d'interfaces avec propriétés internes, mais en l'absence de polarisation, on montre que les champs électrique et magnétique sont nuls à l'interface <sup>(2)</sup> mais que dans la production d'entropie due aux divers processus irréversibles habituels <sup>(3)</sup> s'introduit un terme supplémentaire dû aux champs

$$(1) \quad \hat{W}_s^{ch} = \hat{T}^{-1} \hat{i} \cdot (\mathcal{E} + c^{-1} \hat{v} \times \mathcal{B}),$$

où  $\hat{T}$  est la température d'interface,  $\hat{i}$ , l'intensité de diffusion d'interface,  $\hat{v}$ , la vitesse barycentrique de l'interface,  $\mathcal{E}$ , le champ électrique moyen de part et d'autre de l'interface, en un point de celle-ci :  $\mathcal{E} = (\mathbf{E}^+ + \mathbf{E}^-)/2$ ,  $\mathcal{B}$ , le champ magnétique moyen  $\mathcal{B} = (\mathbf{B}^+ + \mathbf{B}^-)/2$ .

Nous établissons ici le taux de production d'entropie d'une interface présentant en outre une polarisation électrique et magnétique.

Le formalisme utilisé est le même qu'à la référence <sup>(2)</sup>. Le principe consiste à écrire le bilan de grandeurs conservatives (champ électromagnétique, masse, quantité de mouvement, énergie), ou de production connue, en se servant de l'opérateur de surface.

$$\mathfrak{X} = (\mathbf{1} - \mathbf{X} \otimes \mathbf{X}) \cdot \nabla - (\nabla \cdot \mathbf{X}) \mathbf{X},$$

où  $\mathbf{X}$  représente la normale à l'interface et  $\nabla$  l'opérateur gradient quadridimensionnel, que l'on applique à des tenseurs définis à l'interface. Ces tenseurs, caractérisant des grandeurs interfaciales sont formellement identiques aux tenseurs habituellement utilisés dans le volume, mais doivent satisfaire des conditions de cohérence à l'interface.

L'équation du bilan de la quantité  $F$  sera donc, dans l'espace-temps de Minkovski :

$$(2) \quad \mathfrak{X} \cdot \mathcal{J}_F + [\mathcal{J}_F] \cdot \mathbf{X} = \hat{W}_F,$$

$\mathcal{J}_F$  désignant le flux de  $F$  dans le volume,  $\mathcal{J}_F$ , la densité de flux linéique de  $F$  à l'interface,  $\hat{W}_F$ , le taux de production de cette grandeur. Rappelons que les crochets  $[ ]$  désignent le saut de la quantité considérée à l'interface dans le sens de la normale quadridimensionnelle :  $\mathbf{X}$ .

La condition de cohérence pour une grandeur conservative s'écrit :

$$(3) \quad \mathcal{J}_F \cdot \mathbf{X} = 0.$$

Appliquées aux tenseurs électromagnétiques  $\mathcal{F}^*$  et  $\mathcal{H}$ , les relations (2) et (3) conduisent aux équations de Maxwell à l'interface polarisée déjà établies <sup>(2)</sup>.

Nous établirons, dans ce qui suit, l'expression de la production d'entropie  $\hat{W}$ , dans le cas simple de l'interface plane et immobile séparant deux milieux non polarisés.

Les équations de Maxwell d'interface s'écrivent alors :

$$(4) \quad \begin{cases} \hat{\nabla} \times \hat{H} - c^{-1} \hat{D}_{,t} + [\xi \times \mathbf{B}] = c^{-1} \hat{I}, & \begin{cases} \hat{\nabla} \cdot \hat{D} + [\mathbf{E} \cdot \xi] = \hat{\sigma}, \\ \hat{\nabla} \cdot \hat{B} + [\mathbf{B} \cdot \xi] = 0. \end{cases} \\ \hat{\nabla} \times \hat{E} + c^{-1} \hat{B}_{,t} + [\xi \times \mathbf{E}] = 0, \end{cases}$$

Les conditions de cohérence

$$(5) \quad \begin{cases} \xi \times \hat{H} = 0, & \begin{cases} \hat{D} \cdot \xi = 0, \\ \hat{B} \cdot \xi = 0. \end{cases} \\ \xi \times \hat{E} = 0, \end{cases}$$

montrent que le champ électrique  $\hat{E}$  et le déplacement  $\hat{H}$  sont normaux à l'interface ( $\xi$  est la normale tridimensionnelle), alors que le champ magnétique  $\hat{B}$  et le déplacement électrique  $\hat{D}$  lui sont parallèles.

Les bilans de masse n'étant pas modifiés, les bilans de la quantité de mouvement et de l'énergie se déduisent de l'équation (2) appliquée au tenseur d'impulsion énergie totale; seules les grandeurs liées au champ sont modifiées par rapport au cas où la polarisation est absente. Ces grandeurs sont <sup>(3)</sup> :

- l'énergie,

$$\hat{U}_{\text{ch}} = \frac{\hat{E}^2 + \hat{B}^2}{2} - \hat{M} \cdot \hat{B} - c^{-1} \hat{\nu} \cdot (\hat{P} \times \hat{B} - \hat{M} \times \hat{E});$$

- le flux d'énergie,

$$\hat{J}_V^{\text{ch}} = c \hat{E} \times \hat{H} - (\hat{P} \cdot \hat{E} + \hat{M} \cdot \hat{B}) \hat{\nu};$$

- la tenseur d'impulsion dû au champ électromagnétique,

$$(6) \quad \hat{P}^{\text{ch}} = \left[ \frac{\hat{E}^2 + \hat{B}^2}{2} - \hat{M} \cdot \hat{B} \right] \mathbf{1} - \hat{E} \otimes \hat{D} - \hat{H} \otimes \hat{B} - (\hat{P} \times \hat{B} - \hat{M} \otimes \hat{E}) \otimes (c^{-1} \hat{\nu}).$$

L'équation de la quantité de mouvement peut alors s'écrire :

$$(7) \quad \begin{cases} \sigma \frac{d\hat{\nu}}{dt} + \hat{\nabla} \cdot \hat{P} + [\mathbf{P} + \rho(\mathbf{v} - \hat{\nu}) \otimes \mathbf{v}] \cdot \xi = \hat{F}, \\ -\hat{F} = \hat{\nabla} \cdot \hat{P}^{\text{ch}} + [\mathbf{P}^{\text{ch}}] \cdot \xi. \end{cases}$$

Celle de l'énergie totale devient :

$$(8) \quad \begin{cases} \sigma \frac{d(\hat{u} + \hat{k})}{dt} + \hat{\nabla} \cdot (\hat{q} + \hat{\nu} \cdot \hat{P}) + [\mathbf{q} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{P} + \rho(u + k - \hat{u} - \hat{k}) \mathbf{v}] \cdot \xi = \hat{W}, \\ -\hat{W} = \frac{\partial \hat{U}_{\text{ch}}}{\partial t} + \hat{\nabla} \cdot \hat{J}_V^{\text{ch}} + [\mathbf{J}_V^{\text{ch}}] \cdot \xi. \end{cases}$$

On calcule aisément  $\hat{F}$  et  $\hat{W}$  à partir des équations de Maxwell (4) et (5) écrites dans le plan  $x_1 \circ x_2$  de l'interface.

L'équation de l'énergie cinétique se déduit de (7) après multiplication de ses deux membres par la vitesse du milieu interfacial; combinée à l'équation (8) elle permet de déduire le bilan d'énergie interne :

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} & \sigma \frac{d\hat{u}}{dt} + \hat{\nabla} \cdot \hat{\mathbf{q}} + |\mathbf{q} + \rho(u-\hat{u}) \mathbf{v}| \cdot \xi \\ & = -\hat{\mathbf{P}} : \hat{\nabla} \otimes \hat{\mathbf{v}} - [(\mathbf{v}-\hat{\mathbf{v}}) \cdot \mathbf{P} + \frac{1}{2} \rho(\mathbf{v}-\hat{\mathbf{v}})^2 \mathbf{v}] \cdot \xi \\ & + \sigma \left( \hat{\mathbf{E}} \cdot \frac{d\hat{\mathbf{p}}}{dt} + \hat{\mathbf{B}} \cdot \frac{d\hat{\mathbf{m}}}{dt} \right) + (\hat{\mathbf{E}}^2 - \hat{\mathbf{B}}^2) \left[ \frac{\rho v_3}{\sigma} \right] + c [\mathbf{E} \times \mathbf{B}] \cdot \xi, \end{aligned} \right.$$

avec  $\hat{\mathbf{p}} = (\hat{\mathbf{D}} - \hat{\mathbf{E}})/\sigma = \hat{\mathbf{P}}/\sigma$ ,  $\hat{\mathbf{m}} = (\hat{\mathbf{B}} - \hat{\mathbf{H}})/\sigma = \hat{\mathbf{M}}/\sigma$ , polarisations électrique et magnétique.

Le calcul du taux de production d'entropie utilise la relation de Gibbs à l'interface (\*) qui, dans le cas où les polarisations électrique et magnétique sont à l'équilibre, fait intervenir les grandeurs locales du fluide interfacial notées avec ' et s'écrit :

$$(10) \quad \hat{\mathbf{T}} d\hat{s} = d\hat{u} + \hat{p} d\frac{1}{\sigma} - \hat{\mathbf{E}}' \cdot d\hat{\mathbf{p}}' - \hat{\mathbf{B}}' \cdot d\hat{\mathbf{m}}' - \sum_j \hat{g}_j d\hat{Y}_j$$

Le bilan d'entropie s'écrit alors

$$(11) \quad \sigma \frac{d\hat{s}}{dt} + \hat{\nabla} \cdot \left( \frac{\hat{\mathbf{q}} - \sum_j \hat{g}_j \mathcal{J}_{D_j}}{\hat{\mathbf{T}}} \right) + \left[ \frac{q_3 - \sum_j g_j \mathcal{J}_{D_n}}{\hat{\mathbf{T}}} + \rho(s-\hat{s}) v_3 \right] = \hat{W}_s$$

avec

$$\begin{aligned} \hat{W}_s = & \hat{q} \cdot \hat{\nabla} \left( \frac{1}{\hat{\mathbf{T}}} \right) - \sum_j \mathcal{J}_{D_j} \cdot \hat{\nabla} \left( \frac{g_j}{\hat{\mathbf{T}}} \right) - \frac{1}{\hat{\mathbf{T}}} \hat{\Pi} : \hat{\nabla} \otimes \hat{\mathbf{v}} - \sum_j \frac{g_j}{\hat{\mathbf{T}}} \hat{W}_j \\ & + \left[ \left( \frac{1}{\hat{\mathbf{T}}} - \frac{1}{\hat{\mathbf{T}}} \right) q_3 - \left( \frac{g_j}{\hat{\mathbf{T}}} - \frac{g_j}{\hat{\mathbf{T}}} \right) \mathcal{J}_{D_n} - \frac{1}{\hat{\mathbf{T}}} (\mathbf{v}-\hat{\mathbf{v}}) \cdot \Pi_3 \right] \\ & + \left[ \frac{\rho}{\hat{\mathbf{T}}} v_3 [(\hat{\mathbf{T}} - \mathbf{T}) s] + \sum_j (\hat{g}_j - g_j) y_j - (\mathbf{v}-\hat{\mathbf{v}})^2 \right] + \hat{W}_s^{ch} \end{aligned}$$

et

$$\Pi_3 = (\mathbf{P} - p \mathbf{I}) \cdot \xi.$$

Le terme de production d'entropie dû au champ est ainsi

$$(12) \quad \hat{W}_s^{ch} = \hat{\mathbf{T}}^{-1} \{ c [\mathbf{E}' \times \mathbf{B}'] \cdot \xi + \hat{\varphi} \cdot [\mathbf{E}'_3 \mathbf{E}' + \mathbf{B}'_3 \mathbf{B}'] \},$$

qui peut s'écrire de manière équivalente avec  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$ .

En utilisant les équations de Maxwell (4) on établit encore l'expression

$$(13) \quad \hat{W}_s^{ch} = \hat{\mathbf{T}}^{-1} \hat{\mathbf{i}} \cdot (\mathcal{E} + c^{-1} \hat{\varphi} \times \mathcal{B}) + \hat{W}_s^*$$

où l'on retrouve le second membre de l'équation (1) obtenue en l'absence de polarisation, et le terme supplémentaire

$$(14) \quad \hat{W}_s^* = c \hat{\mathbf{T}}^{-1} \{ (\hat{\nabla} \times \hat{\mathbf{H}} - c^{-1} \hat{\mathbf{D}}_{,t} - c^{-1} \hat{\varphi} \hat{\nabla} \cdot \hat{\mathbf{D}}) \cdot (\mathcal{E} + c^{-1} \hat{\varphi} \times \mathcal{B}) \\ - (\hat{\nabla} \times \hat{\mathbf{E}} + c^{-1} \hat{\mathbf{B}}_{,t} + c^{-1} \hat{\varphi} \hat{\nabla} \cdot \hat{\mathbf{B}}) \cdot (\mathcal{B} - c^{-1} \hat{\varphi} \times \mathcal{E}) \}$$

qui n'existe pas en l'absence de polarisation d'interface.

Remarquons qu'en présence de relaxation diélectrique et magnétique il faut ajouter à  $\dot{W}_s$  les termes habituels relatifs aux déséquilibres des champs internes [(<sup>2</sup>), (<sup>4</sup>)].

\*) Séance du 19 juin 1978.

(<sup>1</sup>) F. FER, *Thermodynamique macroscopique*, 2, Gordon et Breach, 1971.

(<sup>2</sup>) R. PRUD'HOMME et M. DUDECK, *Équations de bilan d'un milieu conducteur avec champ électromagnétique*, Rapport du Laboratoire d'Aérothermique du C.N.R.S., 76-2, 1976.

(<sup>3</sup>) S. R. DE GROOT, *The Maxwell Equations*, North-Holland Pub. Co, 1969.

(<sup>4</sup>) G. A. KLUITENBERG, *Physica*, 68, 1973, p. 75-92.

*Laboratoire d'Aérothermique du C.N.R.S., 4, ter, route des Gardes, 92190 Meudon.*