



HAL
open science

Modélisation interfaciale des flammes minces

Roger Prud'Homme, Françoise Baillot, Daniel Durox

► **To cite this version:**

Roger Prud'Homme, Françoise Baillot, Daniel Durox. Modélisation interfaciale des flammes minces. Journal de Mécanique Théorique et Appliquée, 1986, n°spécial, pp.193-223. hal-02004751

HAL Id: hal-02004751

<https://hal.science/hal-02004751v1>

Submitted on 11 May 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

MODELISATION INTERFACIALE DES FLAMMES MINCES

par

Roger. Prud'homme, Françoise. Baillot et Daniel Durox

Laboratoire d'Aérodynamique du CNR.S., 4 ter, route des Gardes, 92190 Meudon

Résumé

Les équations du bilan d'interface sont établies sous une forme permettant de traiter certains problèmes de flammes minces. Leur validité est vérifiée sur quelques exemples. Le problème de leur résolution est ensuite abordé.

Abstract

Interface balance equations are established in a form which permits the solution of some thin flame problems. Their validity is controlled on a few examples; the resolution is then tackled.

Liste des symboles

A	réactant
B	produit de réaction, coefficient de la formule d'Arrhenius
(C)	courbe tracée sur la surface (Σ)
C_p	chaleur spécifique massique
C_{pf}	chaleur spécifique figée
\mathcal{D}	coefficient de diffusion des espèces
d	$\sqrt{\alpha/2} y^*$
e	énergie interne massique
\vec{e}_i	vecteur unitaire de base des coordonnées curvilignes orthogonales
F	grandeur
f	grandeur massique
\mathcal{F}	fonction définissant la surface (Σ)
h	enthalpie massique
h_j	enthalpie massique de l'espèce j
h_i	coefficient métrique
ΔH	enthalpie de la réaction
j	indice d'une espèce chimique
\vec{J}_F	vecteur densité de flux de la grandeur F par unité d'aire
\vec{J}_F	vecteur densité de flux d'interface par unité de longueur
k	courbure normale moyenne en un point de (Σ)
K_F	coefficient phénoménologique
ℓ_2	longueur de référence de la zone de diffusion
ℓ	rapport $(\mathcal{L}e - 1)/\varepsilon \mathcal{L}e$
$\mathcal{L}e$	nombre de Lewis
K_F	coefficient phénoménologique d'interface
\dot{m}	débit unitaire
\mathcal{M}_j	masse molaire de l'espèce j
n	coordonnée normale à l'échelle de diffusion
N	coordonnée normale à l'échelle hydrodynamique
N	normale unitaire à la surface (Σ)
p	pression statique
(S)	surface

s	abscisse curviligne le long de (C), exposant intervenant dans la formule d'Arrhénius
t	temps à l'échelle de diffusion
T	température adimensionnée
T' _a	température d'activation
T' _b	température de fin de combustion adiabatique
T' ₀	température des gaz frais
u	vitesse relative
u _⊥ , u ₃	vitesse normale relative
\vec{v}	vecteur vitesse de l'écoulement
v _∥ , v _⊥	composantes de \vec{v} respectivement parallèle et perpendiculaire à la surface (Σ)
v _i	composante de \vec{v} en coordonnées curvilignes
(V)	volume
\vec{V}	vecteur $\vec{v}_{∥} + w\vec{N}$
w	vitesse normale de déplacement de l'onde (Σ)
\dot{w}	taux de production de la réaction
W	taux de production adimensionné
\hat{W}	taux de production surfacique adimensionné
\dot{W}_F	taux de production de la grandeur F
\hat{W}_F	taux de production surfacique de F
\vec{x}	vecteur position
x	abscisse
X _i	coordonnée curviligne orthogonale à l'échelle hydrodynamique
y	ordonnée
Y _A	fraction massique du réactant A
Y _j	fraction massique de l'espèce j
y*	ordonnée du front de flamme en écoulement à point d'arrêt
α	taux d'étirement
β _j , β _T	variables de concentration, d'énergie
δ	$\sqrt{\alpha/2}$
ε	rapport T' _b /T' _a
η	normale unitaire à la courbe (C), contenue dans le plan tangent à la surface (Σ)
λ	conductivité thermique
Λ	constante intervenant dans l'expression de W
ν	coefficient stoechiométrique
ξ	coordonnée normale à (Σ) à l'échelle de la zone réactive
ρ	masse volumique du mélange
$\hat{\rho}_F$	densité surfacique d'excès de la propriété F
(Σ)	surface, portion de surface
Σ	aire de (Σ)
(σ)	surface latérale
τ	temps hydrodynamique
φ	paramètre thermique égal à (T ₊ —T)/ε, position de la surface (Σ) en coordonnées curvilignes orthogonales
Ψ	chaleur échangée
$[[\phi]]$	désigne le saut φ ₊ -φ ₋ de la quantité φ à l'interface
- , +	côté amont, aval de l'interface

- //, \perp parallèlement, perpendiculairement à la surface
- \hat{f} grandeur f de surface
- ' (prime) désigne certaines grandeurs dimensionnelles
- 0 (indice) désigne les gaz frais
- i (exposant) désigne l'ordre du terme d'un développement asymptotique
- * indique le front de flamme dans un écoulement à point d'arrêt,

Les flammes de prémélange ont fait l'objet de nombreuses études, en particulier lorsque l'énergie d'activation est grande [1 à 10]. Dans ce cas, la flamme est constituée d'une zone de réaction qui suit une zone de diffusion (en amont). Lorsque le nombre de Lewis n'est ni nul, ni infini, l'ordre de grandeur de l'épaisseur de la zone de diffusion de masse est le même que celui de la zone de diffusion d'énergie. L'épaisseur de la zone de réaction est très petite devant celle de la zone de diffusion amont.

Le cas le plus étudié est celui où la zone de réaction résulte d'une compétition entre terme de diffusion et terme de cinétique chimique. Dans ce cas où ni la convection, ni les termes instationnaires n'interviennent directement dans la zone de réaction, on parvient toujours à remplacer la traversée de celle-ci par une condition de saut, donnant le saut du gradient de température normal à la flamme (au front de flamme) en fonction du taux de production chimique intégré normalement dans l'épaisseur de la zone réactive. Ce taux de production est généralement une expression assez simple et est fonction en particulier de l'écart entre la température aval de combustion et la température de fin de combustion adiabatique, toujours supposée faible devant la température d'activation de la réaction. Il résulte de ce traitement que la zone réactive est considérée comme une interface, à laquelle on associe les relations de saut dépendant des conditions locales.

Il n'en est pas de même de la zone de diffusion, celle-ci est le siège de processus de convection et diffusion, et la production chimique y est négligeable. On suppose que les termes instationnaires sont faibles ce qui justifie l'hypothèse quasi stationnaire. Mais ni la zone de diffusion, ni l'ensemble des deux zones - réactive et diffusives - ne sont généralement considérées comme des interfaces, bien que des quantités telles que l'étirement soient mises en évidence (voir [11] pour les premiers travaux sur cette question). La flamme n'est pas exactement considérée comme un milieu bidimensionnel courbe obéissant à des équations d'interface dont la résolution résulterait d'un couplage avec les zones amont (gaz frais) et aval (gaz brûlés).

Cela tient en particulier à la difficulté qu'il y a à décrire correctement la zone de diffusion en l'assimilant à une interface. L'influence de la convection fait que les grandeurs d'interface (concentration, température ou énergie) dépendent de la vitesse. Nous avons fait intervenir dans cette étude les excès (ou défauts) de ces grandeurs par rapport à leurs valeurs amont.

Dans la première partie de cet article, est présenté un modèle d'interface adéquat, selon nous, pour représenter la flamme. Il ne s'agit pas de simples équations de saut, mais des équations complètes d'un milieu bidimensionnel courbe, déformable et souple, caractérisable par des grandeurs superficielles et présentant un étirement, des flux tangentiels et des productions en plus des termes de saut. Les expressions des termes interfaciaux sont calculables en fonction des grandeurs de volume par intégration suivant la normale interfaciale. Ce calcul implique la connaissance de l'évolution de ces grandeurs dans l'épaisseur de l'interface.

La seconde partie est consacrée à un rappel de résultats classiques obtenus par la méthode des développements asymptotiques raccordés. Les exemples choisis vérifient l'hypothèse dite "de la densité constante" et la combustion est supposée complète. Il s'agit du cas le plus simple sur le plan de l'analyse, c'est aussi, historiquement, le premier à avoir été étudié. D'autre part, l'hypothèse classique "de l'énergie d'activation infinie", c'est-à-dire d'une température d'activation grande devant la température des gaz brûlés, et également adoptée. Les développements sont effectués à l'aide d'un seul petit paramètre et la présence de la flamme n'a aucune influence sur le champ des vitesses de l'écoulement. Dans ces conditions, l'expression du taux de production chimique surfacique est établie ainsi que les équations de saut à la traversée de la zone de réaction. Ces équations bien connues sont des cas particuliers de l'équation locale d'interface établie précédemment.

Le point de vue interfacial est systématiquement adopté dans la troisième partie. Les grandeurs interfaciales apparaissent naturellement, en intégrant les résultats obtenus précédemment dans chaque cas particulier, suivant la coordonnée normale à l'interface. Dans un deuxième temps, on part des équations du bilan à l'interface. Le système obtenu ne peut être résolu que moyennant des relations de fermeture. Ces relations concernent, d'une part, le taux de production chimique à la surface, d'autre part, les expressions des flux d'excès en fonction des sauts de concentration et de température. Taux de production et coefficients phénoménologiques dépendent de l'analyse fine de l'interface. Leurs expressions ne peuvent être déterminées que grâce à l'analyse classique développée en seconde partie. Ou alors, leurs valeurs peuvent résulter de mesures expérimentales, mais cette question n'est pas examinée dans le cadre de cet article. Deux exemples de résolution complète sont présentés et correspondent à deux des cas étudiés précédemment. Les autres cas peuvent se résoudre aussi facilement. La méthode des développements asymptotiques est encore utilisée mais son application est cette fois bien plus simple. Les résultats obtenus sont en parfait accord avec les précédents.

L'ambition de ce travail était de montrer qu'il était possible et qu'il pouvait être fécond de remplacer la description d'une flamme en volume par une description interfaciale. Les conséquences de cette démarche ne sont pas encore toutes examinées car il s'agit du début d'une recherche qui, nous l'espérons, sera prometteuse.

1. MODELE D'INTERFACE

1.1 Equation générale de bilan d'un mélange

Soit F une propriété du mélange, telle que la masse d'une espèce j ou la quantité de mouvement, et f la grandeur massique correspondante. L'équation du bilan de la grandeur F s'écrit communément sous forme intégrale :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \rho f d\mathcal{V} + \int_S \bar{\mathcal{J}}_F \cdot \bar{n} dS = \int_{\mathcal{V}} \dot{W}_F d\mathcal{V} \quad (1)$$

Dans cette équation (\mathcal{V}), est un volume, de frontière (S), qui suit en tout point le mouvement barycentrique du mélange, $\bar{\mathcal{J}}_F$ est la densité de flux de la grandeur F et \dot{W}_F est le taux de production de cette grandeur.

Si maintenant le volume (\mathcal{V}) et sa frontière (S) suivent un mouvement arbitraire de milieu continu, de vitesse \bar{V} , le bilan devient (Fig. 1) :

$$\frac{d_v}{dt} \int_{\mathcal{V}} \rho f d\mathcal{V} + \int_S [\vec{j}_F + \rho f (\vec{v} - \vec{V})] \cdot \vec{n} dS = \int_{\mathcal{V}} \dot{W}_F d\mathcal{V} \quad (2)$$

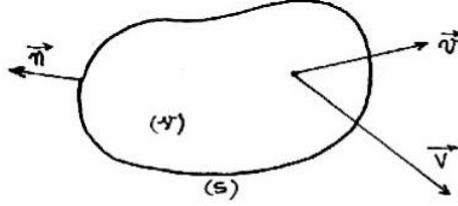


Fig. 1 - Représentation du domaine (\mathcal{V}) en mouvement

L'équation (1) apparaît comme un cas particulier de la relation (2).
Sous forme locale, l'équation (2) devient :

$$\frac{d_v(\rho f)}{dt} + \rho f \vec{\nabla} \cdot \vec{v} + \nabla \cdot [\vec{j}_F + \rho f (\vec{v} - \vec{V})] = \dot{W}_F \quad (3)$$

avec :

$$\frac{d_v}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} \quad (4)$$

Appliquée à la masse globale, la relation (2) devient :

$$\frac{d_v}{dt} \int_{\mathcal{V}} \rho d\mathcal{V} + \int_S \rho (\vec{v} - \vec{V}) \cdot \vec{n} dS = 0 \quad (5)$$

Il s'ensuit que si f_0 est une valeur donnée de la grandeur massique f constante et uniforme, on peut écrire le bilan (2) sous la forme :

$$\frac{d_v}{dt} \int_{\mathcal{V}} \rho (f - f_0) d\mathcal{V} + \int_S [\vec{j}_F + \rho (f - f_0) (\vec{v} - \vec{V})] \cdot \vec{n} dS = \int_{\mathcal{V}} \dot{W}_F d\mathcal{V} \quad (6)$$

C'est cette forme de l'équation générale du bilan de la propriété F qui sera utilisée pour établir les équations d'interface.

1.2. Application au domaine interfacial

A une échelle d'analyse suffisamment fine, on peut considérer le domaine interfacial comme un milieu continu tridimensionnel. Ce domaine est aplati dans la direction normale \vec{N} et certaines propriétés F y présentent des gradients normaux $\vec{\nabla}_\perp$, nettement plus importants que les gradients parallèles $V_{//}$. Le domaine (\mathcal{V}) considéré ici est limité par une surface fermée (S) constituée de deux surfaces parallèles (Σ^-) et (Σ^+), limitant matériellement l'interface, et d'une surface (σ), parallèle à la normale à (Σ) en tout point et s'appuyant sur un contour (C) tracé sur (Σ^+) (Fig. 2).

Le mouvement du domaine (\mathcal{V}) ainsi constitué est défini par la vitesse locale \vec{V} (Fig. 3) :

$$\vec{v}_{//} + w \vec{N} \quad (7)$$

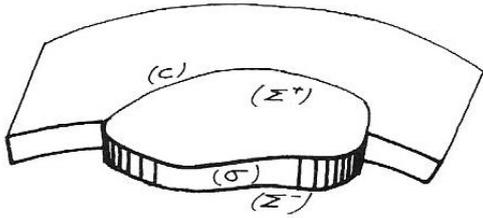


Fig. 2 - Représentation du domaine interfacial (V)

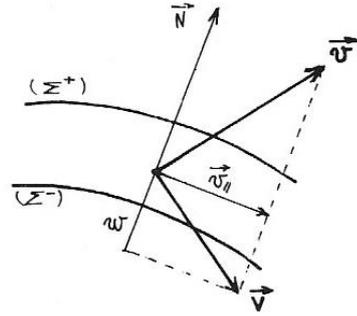


Fig. 3 - Construction du vecteur vitesse au point courant

où $\vec{v}_{//}$ est la composante de la vitesse matérielle du milieu continu, parallèle à la surface et où w est la vitesse normale d'avancement de (Σ^+) , qui sera supposée égale à celle de (Σ^-) . L'équation du bilan (6) s'applique au domaine ainsi défini.

Soit n la coordonnée normale à (Σ^+) avec $n = 0$ en tout point de cette surface. L'élément de volume dV peut s'écrire :

$$dV = dn d\Sigma$$

Soit f la valeur de la quantité massique f en un point de (Σ^-) . Nous admettons, suivant notre hypothèse de forts gradients normaux, et de faibles gradients tangentiels, que f varie lentement sur (Σ^-) et peut être considéré comme approximativement constant.

Posons alors :

$$\int_{-}^{+} \rho (f - f_-) dn = \hat{\rho}_F \quad (8)$$

$$\int_{-}^{+} \vec{j}_F dn = \vec{j}_F \quad (9)$$

$$\int_{-}^{+} \dot{W}_F dn = \hat{W}_F \quad (10)$$

La quantité $\hat{\rho}_F$ est une densité surfacique, de même que \hat{W}_F alors que le flux \vec{j}_F est une quantité linéique. L'introduction de la valeur f dans l'intégrale de la formule (8) se justifie par des questions de convergence. En effet, l'analyse fine de l'interface fait souvent apparaître des expressions de ρf du type :

$$\rho f = a + b e^{kn}$$

où a et b sont deux constantes. La surface (Σ^+) correspondant à $n=0$ et la surface (Σ^-) étant rejetée en $n = \infty$ à l'échelle de longueur considérée. L'intégrale :

$$\int_{-}^{+} \rho f dn = \int_{-}^{0} \rho f dn$$

est alors infinie, alors que l'intégrale du premier membre de (8) est tout à fait définie et fait apparaître ainsi une densité surfacique d'excès de la grandeur F (Fig. 4).

L'équation du bilan (6) devient donc, compte tenu de (3), (9) et (10) :

$$\begin{aligned} \frac{d_V}{dt} \int_{\Sigma^+} \hat{\rho}_F d\Sigma + \int_{\Sigma^+} [\vec{j}_F + \rho(f - f_-)(\vec{v} - \vec{V})] \cdot \vec{N} d\Sigma \\ - \int_{\Sigma^-} [\vec{j}_F + \rho(f - f_-)(\vec{v} - \vec{V})] \cdot \vec{N} d\Sigma + \int_{\sigma} \vec{j}_F \cdot \vec{\eta} d\sigma = \int_{\Sigma^+} \hat{W}_F d\mathcal{V} \end{aligned} \quad (11)$$

Pour obtenir l'équation locale du bilan d'interface, il est nécessaire de transformer l'équation (11) en faisant apparaître uniquement des intégrales de surface sur (Σ) .

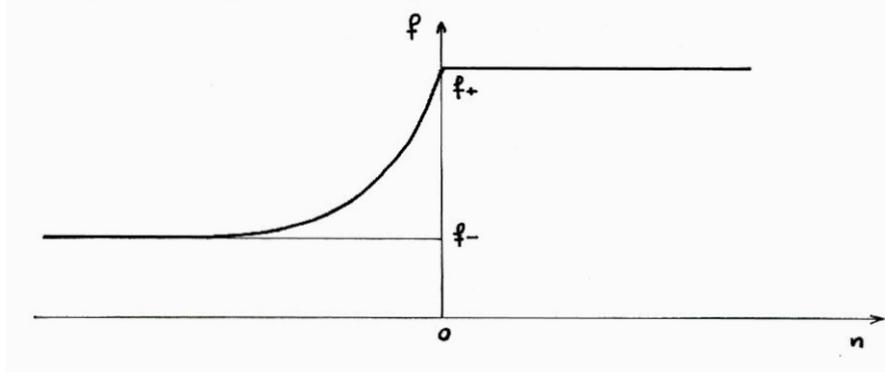


Fig. 4 - Evolution typique de la grandeur f dans une flamme, à l'échelle de diffusion

Les surfaces (Σ^-) et (Σ^+) sont parallèles et peuvent être considérées comme confondues à une échelle grande devant l'épaisseur de l'interface qui se trouve alors comme écrasée et que l'on peut représenter par une simple surface (Σ) . Cela permet de regrouper les second et troisième termes de (11) sous la forme :

$$\int_{\Sigma} [\vec{j}_F + \rho(f - f_-)(\vec{v} - \vec{V})] \cdot \vec{N} d\Sigma \quad (12)$$

Le quatrième terme de (11), c'est-à-dire l'intégrale sur la surface latérale (σ) s'écrit aussi sous la forme (Fig. 5) :

$$\int_C \vec{j}_F \cdot \vec{\eta} ds \quad (13)$$

en tenant compte du fait que $d\sigma = ds dn$.

Cette intégrale curviligne se transforme aisément en intégrale sur (Σ) et devient [12] :

$$\int_{\Sigma} \vec{\nabla}_{//} \cdot \vec{j}_{F//} d\Sigma \quad (14)$$

Pour exprimer le premier terme de (11) sous une forme adéquate, il sera indispensable de définir une vitesse interfaciale \vec{V} . Celle-ci pourrait être une moyenne de \vec{V} défini par (7). Cependant les cas que nous étudierons dans cet article sont tels que la vitesse \vec{V} se conserve à la traversée de la zone interfaciale. On sait déjà que $w\vec{N}$ se conserve, par hypothèse, mais nous verrons que $\vec{V}_{//}$ se conserve également.

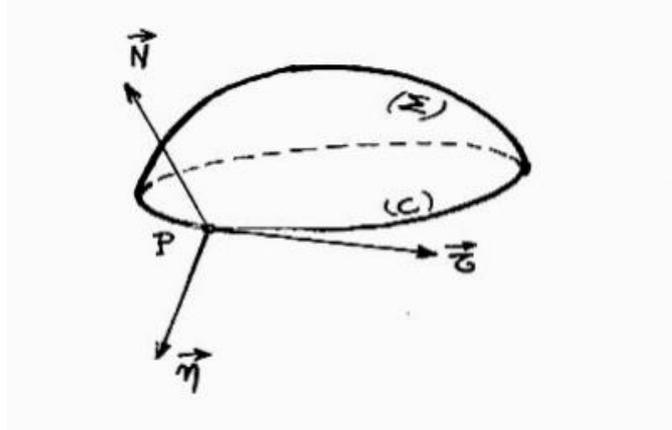


Fig. 5 - Les vecteurs unitaires $\vec{\eta}$, $\vec{\tau}$ et \vec{N} forment un trièdre trirectangle direct. $\vec{\tau}$ est tangent à (C), $\vec{\eta}$ et $\vec{\tau}$ sont contenus dans le plan tangent en P à (Σ).

Cette propriété de la composante parallèle de la vitesse du fluide est vérifiée en particulier lorsque l'on admet de simples équations de saut pour la masse et pour la quantité de mouvement. C'est ce que l'on fait dans le cadre de la théorie classique de Rankine-Hugoniot [13] dont les équations de base sont rappelées ci-dessous.

1.3. Rappel des équations aux discontinuités simples.

Les équations de Rankine-Hugoniot sont à la base de la théorie des ondes de combustion. Elles permettent, connaissant le débit de combustion, de déterminer les conditions dans les gaz brûlés connaissant celles du prémélange de gaz frais. Mais cette théorie ne fournit pas le débit de combustion sauf dans le cas particulier de la détonation de Chapman - Jouguet.

Les équations de base sont des relations de saut appliquées aux quantités conservatives masse, quantité de mouvement et énergie totale dans le cas de la combustion adiabatique et de la flamme plane stationnaire, On peut néanmoins les utiliser dans d'autres configurations de flamme.

Leur forme générale est identique à celle des relations de l'onde de choc. Pour la grandeur F conservative, on a donc :

$$\llbracket \mathcal{J}_{F\perp} + \rho f(v_{\perp} - w) \rrbracket = 0 \quad (15)$$

où l'indice (\perp) désigne la projection sur la normale \vec{N} à l'onde et où w est sa vitesse normale de déplacement.

Si les dissipations sont négligeables en amont et en aval de l'onde, le flux $\vec{\mathcal{J}}_F$, toujours nul pour la masse globale, se réduit à $p\vec{1}$ pour la quantité de mouvement et à $\vec{\sigma}$ pour l'énergie totale.

Les équations de bilan sont donc, à la traversée de l'onde :

$$\llbracket \rho(v_{\perp} - w) \rrbracket = 0 \quad (\text{masse}) \quad (16)$$

$$\llbracket p\vec{N} + \rho\vec{v}(v_{\perp} - w) \rrbracket = 0 \quad (\text{quantité de mouvement}) \quad (17)$$

$$\llbracket p v_{\perp} + \rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) (v_{\perp} - w) \rrbracket = 0 \quad (\text{énergie}) \quad (18)$$

L'équation (16) indique la conservation du débit relatif à la traversée de l'onde :

$$\dot{m}_{\perp} = \rho_{-} (v_{\perp-} - w) = \rho_{+} (v_{\perp+} - w) \quad (19)$$

L'équation (17) donne par projection sur la normale \vec{N} :

$$\llbracket p + \rho v_{\perp} (v_{\perp} - w) \rrbracket = 0$$

ou :

$$p_{-} + \dot{m}_{\perp} (v_{\perp-} - w) = p_{+} + \dot{m}_{\perp} (v_{\perp+} - w) \quad (20)$$

Sa composante tangentielle est :

$$\dot{m}_{\perp} \llbracket \vec{v}_{//} \rrbracket = 0$$

et indique la conservation de la vitesse $\vec{v}_{//}$ à la traversée de l'interface (Fig. 6) :

$$\vec{v}_{// -} = \vec{v}_{// +} \quad (21)$$

Compte tenu de ces premiers résultats, l'équation (18) peut être réécrite :

$$\llbracket p (v_{\perp} - w) + \rho \left(e + \frac{(\vec{v} - w \vec{N})^2}{2} \right) (v_{\perp} - w) \rrbracket = 0$$

ou encore :

$$\dot{m}_{\perp} \llbracket h + \frac{(v_{\perp} - w)^2}{2} \rrbracket = 0$$

où h est l'enthalpie massique du mélange.

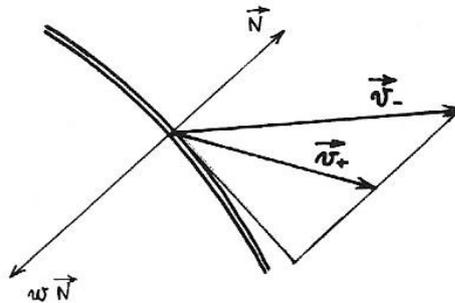


Fig. 6 - Position des vecteurs vitesse à la traversée d'une discontinuité

On obtient donc :

$$h_- + \frac{(v_{\perp-} - w)^2}{2} = h_+ + \frac{(v_{\perp+} - w)^2}{2} \quad (22)$$

Les équations (19) à (22) sont ensuite exploitées, compte tenu de la donnée des lois d'état du mélange. Remarquons que les équations aux discontinuités simples supposent non seulement l'absence de production de surface \hat{W}_F des quantités conservatives mais également l'absence du premier et du quatrième terme de l'équation (11). Il s'agit donc d'une approximation plus forte que l'hypothèse de conservativité de la grandeur F considérée.

En conclusion de ce rappel, nous constatons donc que, dans le cadre de la théorie des discontinuités simples, la vitesse :

$$\vec{V} = \vec{v}_{//} + w\vec{N}$$

se conserve bien à la traversée de l'interface, de même que le débit relatif \dot{m}_{\perp} .

Nous ne nous limiterons pas à ce cas dans ce qui suit, mais nous admettrons cependant la conservation de la vitesse \vec{V} à la traversée de l'interface.

1.4 Equation locale d'interface

La vitesse \vec{V} et la surface (Σ) étant cette fois bien définies, il ne reste plus, pour parvenir à l'équation locale du bilan de la propriété F, qu'à exprimer :

$$\frac{d_v}{dt} \int_{\Sigma} \hat{\rho}_F d\Sigma$$

sous forme d'une interface de surface.

On a :

$$\frac{d_v}{dt} \int_{\Sigma} \hat{\rho}_F d\Sigma = \int_{\Sigma} \frac{d_v \hat{\rho}_F}{dt} d\Sigma + \int_{\Sigma} \hat{\rho}_F \frac{d_v(d\Sigma)}{dt} \quad (23)$$

La quantité $\left(\frac{1}{d\Sigma} \frac{d_v(d\Sigma)}{dt}\right)$ représente le taux de dilatation en surface, ou taux d'étirement de la de la surface. On montre (Annexe) que :

$$\frac{1}{d\Sigma} \frac{d_v(d\Sigma)}{dt} = \vec{\nabla}_{//} \cdot \vec{V} \quad (24)$$

ou encore :

$$\frac{1}{d\Sigma} \frac{d_v(d\Sigma)}{dt} = \vec{\nabla}_{//} \cdot \vec{v}_{//} + w\vec{\nabla} \cdot \vec{N} \quad (25)$$

Remarques :

1 - L'écriture $\vec{\nabla} \cdot \vec{N}$ suppose que la surface (Σ) est décrite par une équation du type :

$$\mathcal{F}(\vec{x}, t) = 0 \quad (26)$$

Cela permet de définir la normale \vec{N} comme :

$$\vec{N} = \vec{\nabla} \mathcal{F} / |\vec{\nabla} \mathcal{F}| \quad (27)$$

en faisant ainsi le choix de son orientation,

On obtient aussi pour la vitesse normale de déplacement de (Σ) :

$$w = - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} / |\vec{\nabla} \mathcal{F}| \quad (28)$$

de sorte que $w \vec{N}$ est indépendant du choix fait pour l'orientation de \vec{N} .

La fonction $\mathcal{F}(\vec{x}, t)$ définit donc un champ de vecteurs $\vec{N}(\vec{x}, t)$ et on montre que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{N} = \vec{\nabla}_{//} \cdot \vec{N} \quad (29)$$

n'est autre que la courbure normale moyenne de la surface au point considéré, compte tenu de l'orientation de la normale.

Le vecteur $(\vec{\nabla} \cdot \vec{N}) \vec{N}$ ne dépend pas, quant à lui, de l'orientation de \vec{N} .

Par ailleurs, on définit les opérateurs de projection normale $\vec{N} \otimes \vec{N}$ et tangential $(\vec{1} - \vec{N} \otimes \vec{N})$, de sorte que :

$$\vec{\nabla}_{//} = (\vec{1} - \vec{N} \otimes \vec{N}) \cdot \vec{\nabla}, \quad \vec{\nabla}_{\perp} = (\vec{N} \otimes \vec{N}) \cdot \vec{\nabla}, \quad \nabla_{\perp} = \frac{\partial}{\partial n} = \vec{N} \cdot \vec{\nabla}$$

où $\vec{1}$ est le tenseur unité.

2 - Posons :

$$\vec{u} = \vec{v} - w \vec{N} \quad (30)$$

On a alors :

$$u_{\perp} = v_{\perp} - w \quad (31)$$

vitesse normale du fluide relative à l'onde.

Le taux d'étirement s'écrit alors :

$$\vec{\nabla}_{//} \cdot \vec{V} = \vec{\nabla}_{//} \cdot \vec{v} - u_{\perp} \vec{\nabla} \cdot \vec{N} \quad (32)$$

Si l'écoulement est uniforme ou au repos, le premier terme du second membre s'annule et le taux d'étirement se réduit à :

$$\vec{\nabla}_{//} \cdot \vec{V} = -u_{\perp} \vec{\nabla} \cdot \vec{N} \quad (33)$$

c'est-à-dire au produit de la vitesse de combustion par la courbure au point considéré.

Il n'en est plus ainsi lorsque l'écoulement n'est pas uniforme.

Finalement, l'équation (11) devient, sous sa forme locale et compte tenu de (14) :

$$\frac{d_v \hat{\rho}_F}{dt} + \hat{\rho}_F \vec{\nabla}_{//} \cdot \vec{V} + [\mathcal{J}_{F\perp} + \rho(f - f_-)(v_{\perp} - w)] + \vec{\nabla}_{//} \cdot \vec{j}_{F//} = \hat{W}_F \quad (34)$$

Des résultats du même type ont été obtenus antérieurement (voir par exemple [12], mais cette fois la signification de la vitesse \vec{V} et des grandeurs d'interface est mieux précisée

Nous nous efforcerons dans ce qui suit, d'établir un système formé d'équations du type (34), permettant de représenter la flamme comme une interface. Remarquons que les équations de base de la théorie de Rankine -Hugoniot sont des cas particuliers de (34) où seul le troisième terme est pris en compte. Notons enfin que l'on trouve fréquemment une présentation de la zone de réaction, interne à la flamme, qui tient compte d'un terme de source et s'écrit pour les quantités non conservatives (masses des espèces, enthalpie sensible $C_p(T-T')$)

$$\llbracket J_{F\perp} + \rho f (v_\perp - w) \rrbracket = \hat{W}_F \quad (35)$$

Il s'agit aussi d'un cas particulier de l'équation (34) que nous examinerons plus précisément dans la suite.

2 - THEORIE CLASSIQUE DES FLAMMES DANS L'HYPOTHESE DE LA DENSITE CONSTANTE

2.1. Equations du bilan

Les hypothèses adoptées sont celles de l'approximation de Schvab-Zeldovich [1] excepté le caractère stationnaire.

Les équations de base sont (l'exposant (')) indique que les paramètres considérés seront adimensionnalisés dans la suite) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho'}{\partial t'} + \vec{\nabla} \cdot (\rho' \vec{v}') = 0 \\ \frac{\partial \rho' y'_j}{\partial t'} + \vec{\nabla} \cdot (\rho' y'_j \vec{v}' - \rho' \mathcal{D} \vec{\nabla} y'_j) = \nu_j \mathcal{M}_j \dot{w}' \\ \frac{\partial \rho' (e' + w'^2/2)}{\partial t'} + \vec{\nabla} \cdot [\rho' (e' + w'^2/2) \vec{v}' - \lambda \vec{\nabla} T' - \rho' \mathcal{D} \sum_j h'_j \vec{\nabla} y'_j] = 0 \end{array} \right. \quad (36)$$

On démontre alors que ce système d'équations est équivalent au suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho'}{\partial t'} + \vec{\nabla} \cdot (\rho' \vec{v}') = 0 \\ \frac{\partial (\rho' \beta'_j)}{\partial t'} + \vec{\nabla} \cdot (\rho' \vec{v}' \beta'_j - \rho' \mathcal{D} \vec{\nabla} \beta'_j) = \dot{w}' \\ \frac{\partial (\rho' \beta'_T)}{\partial t'} + \vec{\nabla} \cdot (\rho' \vec{v}' \beta'_T - \frac{\lambda}{c_{pf}} \vec{\nabla} \beta'_T) = \dot{w}' \end{array} \right. \quad (37)$$

à condition de négliger, dans le premier membre de la dernière équation, le terme :

$$\frac{1}{\Delta H} \vec{\nabla} \cdot \left[\frac{\lambda}{c_{pf}} \left(1 - \frac{1}{\alpha_e} \right) \sum_j (\vec{\nabla} y'_j) \int_{T_0}^{T'} c_{pj} dT \right] \quad (38)$$

Le taux de production \dot{w}' de la réaction chimique a pour expression :

$$\dot{w}' = B T'^{\beta_T} e^{-\frac{T_a}{T'}} \prod_i \left(\rho' \frac{Y_i}{M_i} \right)^{\beta_i} \quad (39)$$

et les paramètres β_j et β_T sont égaux respectivement à :

$$\begin{aligned} \beta_i &= \gamma_i / \nu_i M_i \\ \beta_T &= \sum_i \gamma_i \int_{T_0}^{T'} c_{p,i} dT / \Delta H \end{aligned} \quad (40)$$

Ce rappel étant fait, plaçons-nous dans le cas particulier d'une réaction [2] :



où ν est un entier naturel.

Soit T'_b la température de fin de combustion adiabatique, u'_c la vitesse adiabatique de combustion de la flamme plane stationnaire et supposons que la masse volumique ρ' soit constante et égale à celle ρ'_0 des gaz frais, T_a étant la température d'activation de la réaction. Prenons comme grandeurs de référence la longueur de diffusion thermique et le temps correspondant :

$$l_2 = \lambda / \rho'_0 u'_c c_{pf} \quad , \quad t_2 = l_2 / u'_c \quad (42)$$

la vitesse u'_c , la masse volumique ρ'_0 et la température T'_b . Supposons constantes les diffusivités $\rho' D$, et λ/C_{pf} .

Les équations du bilan sans dimension sont alors les suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a)} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \\ \text{(b)} \quad \frac{\partial \gamma}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \gamma - \frac{1}{Le} \vec{\nabla}^2 \gamma = -W \\ \text{(c)} \quad \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} T - \vec{\nabla}^2 T = (1 - T_0) W \end{array} \right. \quad (43)$$

Le taux W peut s'écrire sous la forme :

$$W = \Lambda \varepsilon^{-(1+\nu)} \gamma^\nu T^{-\nu} e^{\varepsilon^{-1} \left(1 - \frac{1}{T} \right)} \quad (44)$$

avec :

$$\varepsilon = T'_b / T'_a \quad (45)$$

$$\Lambda = \frac{\nu \lambda \mathcal{M}_A^{1-\nu} \bar{\mathcal{M}} B T'_b e^{\frac{T'_a}{T'_b}}}{R^\nu C_{pf} T'_a^{1+\nu}} \frac{p'}{(\rho_0 u'_\ell)^2} \quad (46)$$

où $\bar{\mathcal{M}}$ est une masse molaire moyenne du mélange. La quantité Λ est supposée constante.

2.2 Hypothèse de la flamme mince à grande énergie d'activation

On suppose ici :

$$\varepsilon \ll 1 \quad (47)$$

L'écoulement est alors constitué de quatre zones (Fig. 7) :

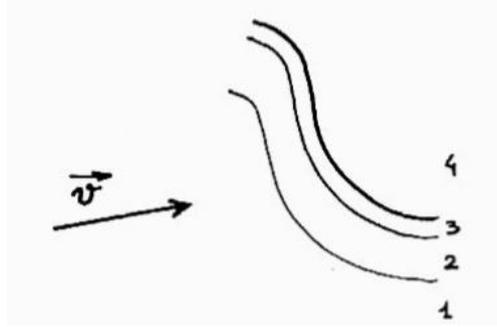


Fig. 7 — Les différentes régions de la flamme

La zone 1 des gaz frais, une région 2 où interviennent les phénomènes de diffusion mais où le taux de réaction W est négligeable, une zone 3 où le taux W est important et enfin la région 4 des gaz brûlés où W est à nouveau négligeable.

L'analyse asymptotique de la flamme sera faite à l'aide du seul petit paramètre ε . Cela est restrictif, mais suffisant dans l'hypothèse de la masse volumique constante où le phénomène de combustion n'agit pas sur le champ des vitesses.

Les échelles d'analyse seront donc ℓ_2 pour la zone 2, $\ell_1 = \ell_4 = \ell_2 / \varepsilon$ pour les régions 1 et 4 et $\ell_3 = \varepsilon \ell_2$ pour la zone de réaction.

Dans chaque zone seront effectués les développements :

$$\begin{cases} Y = Y^0 + \varepsilon Y^1 + \varepsilon^2 Y^2 + \dots \\ T = T^0 + \varepsilon T^1 + \varepsilon^2 T^2 + \dots \end{cases} \quad (48)$$

2.3 Flamme plane stationnaire adiabatique

Étudions d'abord le cas de la flamme plane adiabatique et stationnaire (Fig. 8). Si u la vitesse relative de l'écoulement par rapport à la flamme et x l'abscisse comptée positivement dans le sens de la vitesse à partir du front de flamme limitant les zones 3 et 4, les équations du bilan donnent ::

$$\left\{ \begin{array}{l} u = 1 \\ \frac{dY}{d\kappa} - \frac{1}{\mathcal{L}_e} \frac{d^2 Y}{d\kappa^2} = -W \\ \frac{dT}{d\kappa} - \frac{d^2 T}{d\kappa^2} = (1-T_0)W \end{array} \right. \quad (49)$$

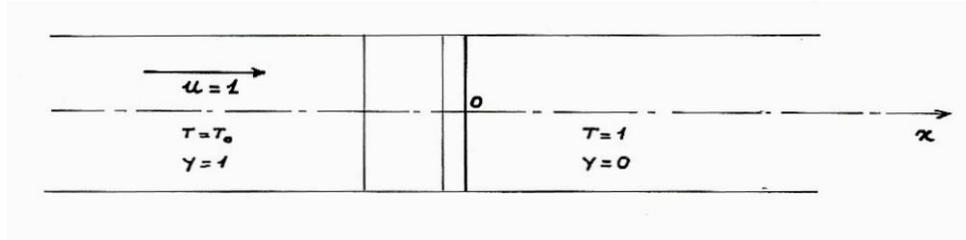


Fig. 8 - Flamme plane, adiabatique et stationnaire

On a successivement :

Zone 1 : $T = T_0$, $Y = 1$, soit $T^0 = T_0$, $T^1 = 0$, $Y^0 = 1$, $Y^1 = 0$.

Zone 2 : tant que T n'est pas très voisin de la température de fin de combustion $T = 1$, le taux de réaction W est tout à fait négligeable devant les autres termes comme on peut le constater à partir de son expression. Il s'ensuit qu'à l'ordre zéro des développements asymptotiques

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dY^0}{d\kappa} - \frac{1}{\mathcal{L}_e} \frac{d^2 Y^0}{d\kappa^2} = 0 \\ \frac{dT^0}{d\kappa} - \frac{d^2 T^0}{d\kappa^2} = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{donc : } Y^0 = A e^{\frac{\kappa}{\mathcal{L}_e}} + B \\ \text{soit : } T^0 = C e^{\kappa} + D \end{array} \quad (50)$$

les constantes devant être déterminées par raccordement avec les zones 1 et 3 sachant qu'il doit y avoir continuité de Y^0 et T^0 . Le raccordement avec la zone 1 ($x \rightarrow -\infty$) nous donne

$$B=1, D=T_0$$

Zone 3 : pour analyser la zone réactive, on pose : $x = \varepsilon \xi$

Les équations deviennent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon \frac{dY}{d\xi} - \frac{1}{\mathcal{L}_e} \frac{d^2 Y}{d\xi^2} = -W = -\Lambda e^{1-Y} Y^{\nu} T^{-\nu} e^{-\varepsilon(1-\frac{1}{T})} \\ \varepsilon \frac{dT}{d\xi} - \frac{d^2 T}{d\xi^2} = (1-T_0)W \end{array} \right. \quad (51)$$

En éliminant W on a, l'ordre zéro :

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \left(\frac{Y^0}{\mathcal{L}_e} + \frac{T^0}{1-T_0} \right) = 0 \quad \text{soit : } \frac{Y^0}{\mathcal{L}_e} + \frac{T^0}{1-T_0} = a\xi + b$$

On sait que pour $\xi > 0$ (en aval du front de flamme), $Y = 0$ et $T = 1$. Le raccordement avec la zone 4 fixe donc $a = 0$ et $b = 1/1-T_0$. Ainsi :

$$\frac{Y^0}{\mathcal{L}_e} + \frac{T^0}{1-T_0} = \frac{1}{1-T_0} \quad (52)$$

Développons l'équation en Y :

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{d}{d\xi} (Y^0 + \varepsilon Y^1 + \dots) - \frac{1}{\mathcal{L}_e} \frac{d^2}{d\xi^2} (Y^0 + \varepsilon Y^1 + \dots) \\ = -\Lambda \varepsilon^{1-\nu} (Y^0 + \varepsilon Y^1 + \dots)^\nu (T^0 + \varepsilon T^1 + \dots)^{-\nu} e^{\varepsilon^{-1}(1-\frac{1}{T_0})} e^{\frac{T^1}{T_0}} (1+O(\varepsilon)) \end{aligned} \quad (53)$$

Pour que le second membre soit d'un ordre de grandeur équivalent aux termes du premier membre, il faut admettre que :

$$T^0=1 \quad (54)$$

et d'après la relation (52) :

$$Y^0=0 \quad (55)$$

Les équations en Y et T deviennent donc, à l'ordre minimum :

$$\left| \begin{aligned} -\frac{1}{\mathcal{L}_e} \frac{d^2 Y^1}{d\xi^2} &= -\Lambda (Y^1)^\nu e^{T^1} \\ -\frac{d^2 T^1}{d\xi^2} &= (1-T_0) \Lambda (Y^1)^\nu e^{T^1} \end{aligned} \right. \quad (56)$$

L'élimination du second membre fournit :

$$\frac{Y^1}{\mathcal{L}_e} + \frac{T^1}{1-T_0} = 0 \quad (57)$$

par raccordement avec la zone 4.

Il reste à résoudre l'équation en T¹

$$\frac{d^2 T^1}{d\xi^2} = - (1-T_0) \Lambda \left(-\frac{\mathcal{L}_e}{1-T_0} T^1 \right)^\nu e^{T^1} \quad (58)$$

en multipliant à gauche par $\frac{dT^1}{d\xi} d\xi$ et à droite par dT^1 et en posant $T^1 = -\Phi$, on obtient après intégration :

$$\int_{-\infty}^0 \frac{d^2 T^1}{d\xi^2} \frac{dT^1}{d\xi} d\xi = \Lambda \mathcal{L} e^\nu (1-T_0)^{1-\nu} \int_{\phi(-\infty)}^0 \phi^\nu e^{-\phi} d\phi \quad (59)$$

La borne inférieure de l'intégrale du second membre est égale à l'infini. En effet, pour $\xi \rightarrow -\infty$ on entre dans la zone 2 de diffusion où le taux de réaction devient négligeable, de sorte que T ne peut être représenté par :

$$T = 1 - \varepsilon \Phi \quad (60)$$

avec une valeur finie de Φ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. Comme $T < 1$, il s'en suit que :

$$\Phi(-\infty) = \infty \quad (61)$$

L'intégrale devient :

$$\int_{-\infty}^0 \phi^\nu e^{-\phi} d\phi = \nu! \left[1 + \phi + \frac{\phi^2}{2} + \dots + \frac{\phi^\nu}{\nu!} \right] e^{-\phi} \Big|_0^\infty \quad (62)$$

Soit la valeur $(-\nu !)$.

Enfin $\frac{dT^1}{d\xi}$ est nul pour $\xi > 0$ et on obtient finalement :

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dT^1}{d\xi} \right)^2 \Big|_{\xi=-\infty} = \Lambda \mathcal{L} e^\nu (1-T_0)^{1-\nu} \nu! \quad (63)$$

Les valeurs de $\frac{dT}{d\xi}$ doivent se raccorder à l'ordre minimum entre les zones 2 et 3.

On a :

$$\frac{dT}{d\xi} \Big|_{\xi \rightarrow 0} \text{ (zone 2)} \simeq \frac{dT}{d\xi} \Big|_{\xi \rightarrow -\infty} \text{ (zone 3)} \quad (64)$$

Le raccordement entre les deux zones donne d'autre part les valeurs des constantes C et A :

$$C = 1 - T_0, \quad A = -1$$

En conséquence, on a en zone 2 :

$$\begin{aligned} \gamma^0 &= 1 - e^{-\alpha \xi} \\ T^0 &= T_0 + (1 - T_0) e^{-\alpha \xi} \end{aligned} \quad (65)$$

de sorte que :

Le raccordement des dérivées conduit donc à :

$$\left. \left(\frac{dT^1}{d\xi} \right)^2 \right|_{\xi=-\infty} \cong \left. \left(\frac{dT}{dx} \right)^2 \right|_{x=0} \quad (1-T_0)^2 = 2\Lambda \mathcal{L} e^\nu (1-T_0)^{1-\nu} \nu! \quad (66)$$

La valeur du paramètre Λ est donc fixée

$$\Lambda = \mathcal{L} e^{-\nu} (1-T_0)^{\nu+1} / 2\nu! \quad (67)$$

et on peut en déduire la valeur de u_i^1 , vitesse de combustion.

2.4 Equations de la flamme en coordonnées curvilignes orthogonales

Le passage aux coordonnées curvilignes orthogonales [12] permet d'obtenir un système d'équations adéquat moyennant certaines hypothèses. Exprimons d'abord les équations de base dans ces coordonnées $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3, \bar{\tau}$ (Fig. 9).

Si l'on utilise l'échelle hydrodynamique ℓ_1 pour les coordonnées et le temps hydrodynamique, les équations de base font intervenir le gradient et le temps. Les équations 43b et c deviennent :

$$\begin{cases} \frac{\partial \gamma}{\partial \bar{\tau}} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}_x \gamma - \frac{\varepsilon}{\mathcal{L}e} \vec{\nabla}_x^2 \gamma = -\varepsilon^{-1} W \\ \frac{\partial T}{\partial \bar{\tau}} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}_x T - \varepsilon \vec{\nabla}_x^2 T = \varepsilon^{-1} (1-T_0) W \end{cases} \quad (68)$$

L'équation de l'interface est donnée, en coordonnées curvilignes par :

$$\bar{X}_3 = \phi(\bar{\tau}) \quad (69)$$

D'autre part :

$$\vec{e}_3 = \vec{N} \quad , \quad \omega = h_3 d\phi/d\bar{\tau} \quad , \quad \vec{\nabla}_x \cdot \vec{N} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial h_1 h_2}{\partial \bar{X}_3} \quad (70)$$

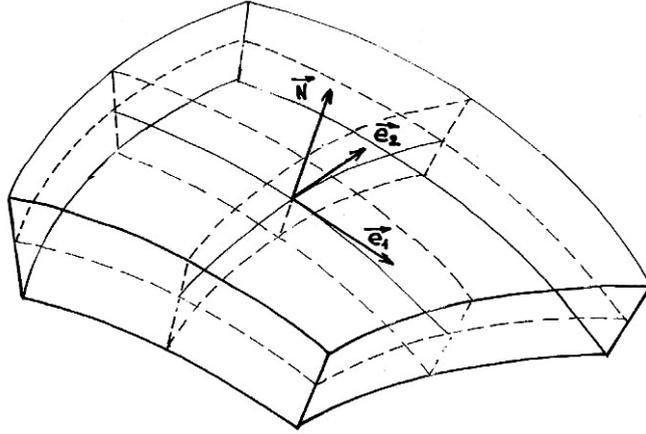


Fig. 9 — Trièdre de référence des coordonnées curvilignes orthogonales, au point courant.

L'équation du bilan de l'espèce A s'écrit, en coordonnées curvilignes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y}{\partial \bar{t}} + \frac{v_1}{h_1} \frac{\partial Y}{\partial \bar{x}_1} + \frac{v_2}{h_2} \frac{\partial Y}{\partial \bar{x}_2} + \frac{v_3}{h_3} \frac{\partial Y}{\partial \bar{x}_3} - \frac{\varepsilon}{\mathcal{L}_e} \left\{ \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial \bar{x}_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial Y}{\partial \bar{x}_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{x}_2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial Y}{\partial \bar{x}_2} \right) \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial h_1 h_2}{\partial \bar{x}_3} \frac{1}{h_3} \frac{\partial Y}{\partial \bar{x}_3} + \frac{1}{h_3} \frac{\partial}{\partial \bar{x}_3} \left(\frac{1}{h_3} \frac{\partial Y}{\partial \bar{x}_3} \right) \right\} = -\varepsilon^{-1} W \end{aligned} \quad (71)$$

L'équation en T a une forme analogue.

Posons

$$X_1 = \bar{X}_1, \quad X_2 = \bar{X}_2, \quad X_3 = \bar{X}_3 - \Phi(\bar{\tau}), \quad \tau = \bar{\tau},$$

la vitesse normale relative est alors $u_{\perp} = u_3 = v_3 - \frac{d\Phi}{d\bar{\tau}}$. L'équation du bilan des espèces devient, à l'échelle hydrodynamique :

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y}{\partial \bar{t}} + \frac{v_1}{h_1} \frac{\partial Y}{\partial \bar{x}_1} + \frac{v_2}{h_2} \frac{\partial Y}{\partial \bar{x}_2} + u_3 \frac{\partial Y}{\partial N} - \frac{\varepsilon}{\mathcal{L}_e} \left\{ \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial \bar{x}_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial Y}{\partial \bar{x}_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{x}_2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial Y}{\partial \bar{x}_2} \right) \right] \right. \\ \left. + \vec{\nabla}_x \cdot \vec{N} \frac{\partial Y}{\partial N} + \frac{\partial^2 Y}{\partial N^2} \right\} = -\varepsilon^{-1} W \end{aligned} \quad (72)$$

où nous avons posé :

$$dN = h_3 dX_3 \quad (73)$$

N étant la coordonnée normale à l'interface, c'est-à-dire au front de flamme.

Faisons alors les hypothèses suivantes au voisinage du front de flamme :

- les variations instationnaires se font à l'échelle du temps hydrodynamique,
- la courbure normale moyenne du front de flamme est d'ordre 1 à l'échelle hydrodynamique et on pose :

$$\vec{\nabla}_x \cdot \vec{N} = -k = O(1) \quad (74)$$

- les dérivées $\frac{\partial}{\partial X_1}$ et $\frac{\partial}{\partial X_{21}}$ sont $O(\varepsilon)$, c'est-à-dire que les gradients $\bar{\nabla}_{//}$ de température et de concentration sont $O(\varepsilon)$.

Les équations de la flamme deviennent donc, en posant :

$$dN = \varepsilon dn \quad (75)$$

c'est-à-dire en repassant à l'échelle de diffusion ℓ_2 et en se limitant à l'ordre 1 :

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{\partial Y}{\partial \xi} + u_3 \frac{\partial Y}{\partial n} - \frac{1}{\mathcal{L}_e} \frac{\partial^2 Y}{\partial n^2} + \frac{\varepsilon}{\mathcal{L}_e} k \frac{\partial Y}{\partial n} = -W \\ \varepsilon \frac{\partial T}{\partial \xi} + u_3 \frac{\partial T}{\partial n} - \frac{\partial^2 T}{\partial n^2} + \varepsilon k \frac{\partial T}{\partial n} = (1 - T_0) W \end{cases} \quad (76)$$

2.5 Equations de saut de la zone réactive

Il s'agit ici de la première application de l'équation du bilan d'interface (34) sous sa forme (35) et nous allons déterminer le terme de production surfacique \hat{W} .

Pour analyser la zone 3 de réaction, nous procédons comme pour la flamme plane adiabatique et stationnaire en posant :

$$dn = \varepsilon d\xi \quad (77)$$

Mais cette fois, la température des gaz brûlés en $n = 0$ n'est plus égale à 1 mais à

$$T_+ = 1 + \varepsilon T_+^1, \quad (78)$$

avec $T_+^1 = O(1)$.

Le système (76) devient alors à l'ordre minimum :

$$\begin{cases} \text{(a)} & -\frac{1}{\mathcal{L}_e} \frac{\partial^2 Y^1}{\partial \xi^2} = -\Lambda (Y^1)^\nu e^{\tau^1} \\ \text{(b)} & -\frac{\partial^2 T^1}{\partial \xi^2} = (1 - T_0) \Lambda (Y^1)^\nu e^{\tau^1} \end{cases} \quad (79)$$

et est analogue au système (56). On a également

$$T^0 = 1 \text{ et } Y^0 = 0$$

La résolution se fait en posant

$$\phi = T_+^4 - T^4 \quad (80)$$

En admettant qu'en zone 4 et en $n=0$:

$$\frac{\partial T^4}{\partial \xi} \approx 0 \quad (81)$$

On obtient alors :

$$\left(\frac{\partial T^4}{\partial \xi} \right)^2 \Big|_{\xi=-\infty} = 2\Lambda \alpha e^{\nu} (1-T_0)^{4-\nu} \nu! e^{T_+^4} \quad (82)$$

Compte tenu de la relation (67), on obtient donc pour la condition de saut (Fig. 10) :

$$\left[\frac{\partial T}{\partial n} \right] \approx e^{\frac{T_+^4}{2}} (1-T_0) \quad (83)$$

ce qui fournit le tenue de source de l'interface :

$$\hat{W} = e^{\frac{\epsilon^{-1} T_+^4}{2}} + O(\epsilon) \quad (84)$$

Notons que cette expression de reste valable, comme nous le verrons, pour toute la flamme, zone de diffusion comprise, puisque aucune production chimique n'a lieu dans cette région.

Enfin, la justification de la relation (81) sera effectuée dans chaque cas.

Les relations (79) et (83) montrent, s'il en était besoin, que les phénomènes convectifs sont négligeables dans la région réactive devant les diffusions et la production chimique.

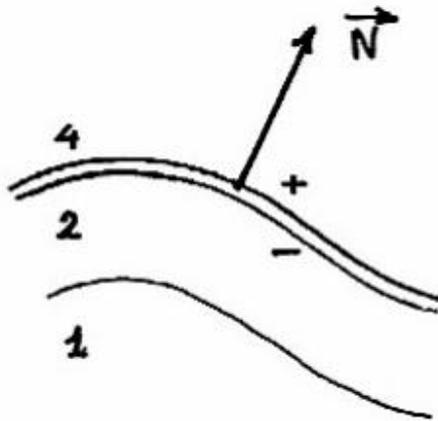


Fig. 10 - La zone réactive considérée comme une discontinuité

2.6 Exemples de résultats du traitement classique

Les quelques exemples qui suivent [2] seront utilisés au chapitre 3 pour calculer les grandeurs d'interface. Ils permettront de mettre en évidence les différents termes de l'équation (34) sauf le terme $\vec{V}_{//} \cdot \vec{j}_F$ qui est inexistant.

2.6.1 Flamme plane instationnaire avec échange thermique [2], [3]

La seconde équation du système (76) est légèrement modifiée pour tenir compte de l'échange thermique, dû à une perte de chaleur par rayonnement ou par conduction, avec un thermostat de température T_0 , égale à la température des gaz frais. Cet échange est supposé d'ordre ε . Le mi lieu étant au repos :

$$v = 0, \quad u_{\perp} = u = -w \quad (85)$$

Le processus est unidimensionnel, Si x désigne l'abscisse à partir du front de flamme, on a donc :

$$\left| \begin{array}{l} \varepsilon \frac{\partial Y}{\partial \xi} + u \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{1}{\mathcal{L}_e} \frac{\partial^2 Y}{\partial \kappa^2} = -w \\ \varepsilon \frac{\partial T}{\partial \xi} + u \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial^2 T}{\partial \kappa^2} + \varepsilon \Psi = (1 - T_0) w \end{array} \right. \quad (86)$$

où la perte de chaleur est $(-\varepsilon \Psi)$.

On obtient successivement :

Zone 1 : $T=T_0, Y=1$ ou $T^0=T_0, T^1=0, Y^0=0, Y^1=0$.

Zone 2 :

$$\left| \begin{array}{ll} u \frac{\partial Y^0}{\partial \kappa} - \frac{1}{\mathcal{L}_e} \frac{\partial^2 Y^0}{\partial \kappa^2} = 0 & \text{ou} \quad Y^0 = A e^{-\frac{\mathcal{L}_e u \kappa}{\mathcal{L}_e}} + B \\ u \frac{\partial T^0}{\partial \kappa} - \frac{\partial^2 T^0}{\partial \kappa^2} = 0 & \text{ou} \quad T^0 = C e^{u \kappa} + D \end{array} \right. \quad (87)$$

Zone 3 : $Y^0 = 0, T^0=1$, ce qui permet de raccorder la zone 2 aux zones 1 et 3 et de déterminer les coefficients inconnus. Les expressions de Y^0 et de T^0 en zone 2 sont donc (fig. 11) :

$$\left| \begin{array}{l} Y^0 = 1 - e^{-\frac{\mathcal{L}_e u \kappa}{\mathcal{L}_e}} \\ T^0 = T_0 + (1 - T_0) e^{u \kappa} \end{array} \right. \quad (88)$$

on a d'autre part, en zone 3 :

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{\xi \rightarrow \infty} \cong (1 - T_0) e^{\frac{T_+^1}{2}} \quad (89)$$

(la présence du terme $\varepsilon \Psi$ et de $\varepsilon \frac{\partial T}{\partial \tau}$ ne change rien), ce qui donne la relation obtenue par raccordement avec la zone 2 :

$$u = e^{\frac{T_+^1}{2}} \quad (90)$$

Zone 4 : on a d'abord $Y = 0$, soit $Y^0 = Y^1 = 0$. A l'échelle ℓ_2 , T vérifie l'équation :

$$\varepsilon \frac{\partial T}{\partial \xi} + u \frac{\partial T}{\partial \kappa} - \frac{\partial^2 T}{\partial \kappa^2} + \varepsilon \psi = 0 \quad (91)$$

soit :

$$u \frac{\partial T^0}{\partial x} - \frac{\partial^2 T^0}{\partial x^2} = 0 \quad (92)$$

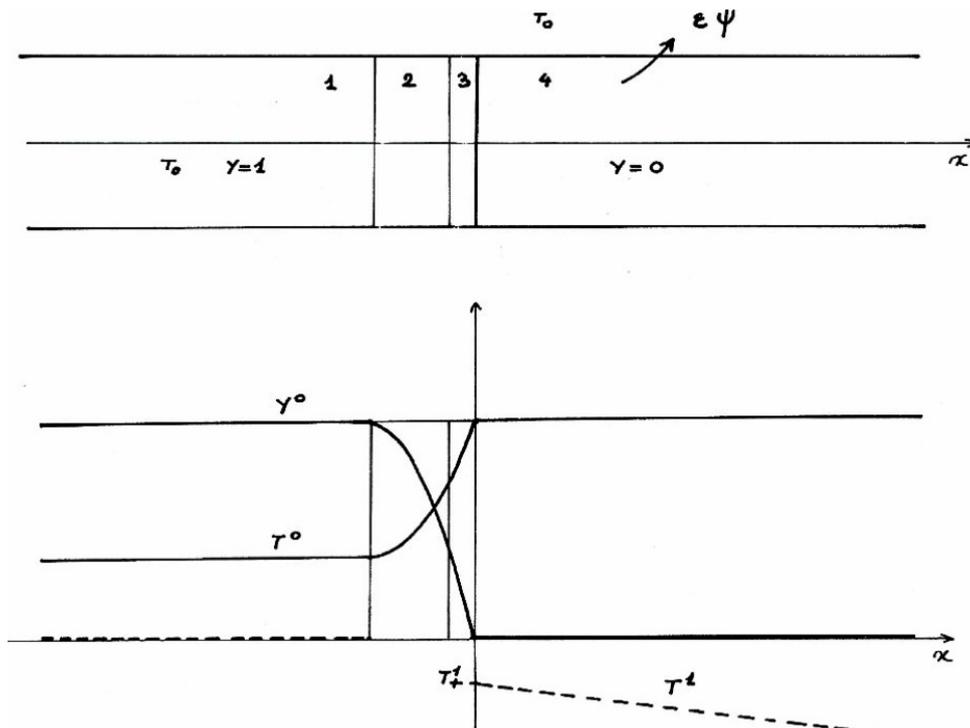


Fig. 11 - Profils de concentration et de température, à l'ordre zéro du développement asymptotique, de la zone de diffusion 2. Profil de température à l'ordre 1 en zones 1 et 4.

qui admet la seule solution bornée

$$T^0 = 1$$

et

$$u \frac{\partial T^1}{\partial x} - \frac{\partial^2 T^1}{\partial x^2} + \Psi^0 = 0$$

avec $T^1(0) = T^1_+$ ainsi (Fig. 11) :

$$T^1 = T^1_+ - \frac{\Psi_0}{u} x \quad (93)$$

En éliminant W entre les équations de base on a :

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial \tau_0} \left(\gamma + \frac{\tau}{1-\tau_0} \right) + u \frac{\partial}{\partial x} \left(\gamma + \frac{\tau}{1-\tau_0} \right) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\gamma}{\alpha_e} + \frac{\tau}{1-\tau_0} \right) + \varepsilon \frac{\psi}{1-\tau_0} = 0 \quad (94)$$

soit, à l'ordre 0 :

$$u \frac{\partial}{\partial x} \left(Y^0 + \frac{T^0}{1-T_0} \right) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{Y^0}{Le} + \frac{T^0}{1-T_0} \right) = 0 \quad (95)$$

cette équation est vérifiée avec les résultats obtenus précédemment. A l'ordre 1, on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial \tau_0} \left(\gamma^0 + \frac{\tau^0}{1-\tau_0} \right) + u \frac{\partial}{\partial x} \left(\gamma^1 + \frac{\tau^1}{1-\tau_0} \right) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\gamma^1}{\alpha_e} + \frac{\tau^1}{1-\tau_0} \right) + \frac{\psi^0}{1-\tau_0} = 0 \quad (96)$$

Les quantités γ_0 et T_0 sont constantes sauf en zone 2. Ψ est nul en zone 1, égal $\Psi^0(1)$ en zones 3 et 4 et à $\Psi(T^0)$ en zone 2. L'équation précédente s'intègre donc aisément entre les zones 1 et 4 :

$$\int_{(1)}^{(4)} \frac{\partial}{\partial \tau_0} \left(\gamma^0 + \frac{\tau^0}{1-\tau_0} \right) dx + u \left[\gamma^1 + \frac{\tau^1}{1-\tau_0} \right]_{(1)}^{(4)} - \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\gamma^1}{\alpha_e} + \frac{\tau^1}{1-\tau_0} \right) \right]_{(1)}^{(4)} + \frac{1}{1-\tau_0} \int_{(1)}^{(4)} \psi^0 dx = 0 \quad (97)$$

on obtient :

$$\left(1 - \frac{1}{\alpha_e} \right) \frac{d(1/u)}{d\tau_0} + u \frac{\tau^1_+}{1-\tau_0} + \frac{\psi_{(1)}^0}{u} + \frac{1}{1-\tau_0} \int_{(1)}^{(4)} \psi^0 dx = 0 \quad (98)$$

En posant :

$$\bar{\Psi} = (1-\tau_0) \psi_{(1)}^0 + \int_{\tau_0}^1 \frac{\psi(\tau^0)}{\tau^0 - \tau_0} d\tau^0 \quad (99)$$

on obtient :

$$(1-\tau_0) \left(1 - \frac{1}{\alpha_e} \right) \frac{d(1/u)}{d\tau_0} + u \tau^1_+ + \frac{\bar{\Psi}}{u} = 0 \quad (100)$$

comme : $\tau^1_+ = \text{Log } u$ ou a donc :

$$(1-\tau_0) \left(1 - \frac{1}{\alpha_e} \right) \frac{du}{d\tau_0} = u^3 \text{Log } u^2 + u \bar{\Psi} \quad (101)$$

ce qui donne des indications sur la stabilité de la flamme [3]

2.6.2. Flamme courbe dans un milieu au repos

Dans l'hypothèse quasi-stationnaire précédente, on peut écrire, en mettant en évidence la dérivée normale à la flamme $\partial/\partial n$ et en supposant les gradients tangentiels d'ordre ε :

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{\partial Y}{\partial \xi} + u \frac{\partial Y}{\partial n} - \frac{1}{\alpha_e} \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial n^2} - \varepsilon k \frac{\partial Y}{\partial n} \right) = -W \\ \varepsilon \frac{\partial T}{\partial \xi} + u \frac{\partial T}{\partial n} - \left(\frac{\partial^2 T}{\partial n^2} - \varepsilon k \frac{\partial T}{\partial n} \right) = (1-T_0) W \end{cases} \quad (102)$$

avec $u = u_{\perp} = -w$.

On a successivement (Fig. 12) :

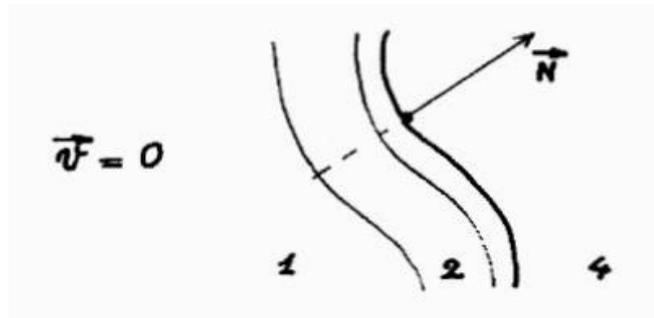


Fig. 12 - Flamme courbe dans un milieu au repos

Zone 1 : $Y=1, T=T_0$

Zone 2 : $Y^0 = 1 - \frac{\alpha_e u n}{4}, T^0 = T_0 + (1-T_0)e^{\alpha_e u n}$ (103)

Zone 3 : $u = e^{T^1/2}$ (104)

Zone 4 : $Y^0=0, T^0=1$

L'élimination de W nous donne, dans toutes les zones :

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial}{\partial \xi} \left(Y + \frac{T}{1-T_0} \right) + u \frac{\partial}{\partial n} \left(Y + \frac{T}{1-T_0} \right) - \frac{\partial^2}{\partial n^2} \left(\frac{Y}{\alpha_e} + \frac{T}{1-T_0} \right) \\ + \varepsilon k \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{Y}{\alpha_e} + \frac{T}{1-T_0} \right) + 0(\varepsilon^2) = 0 \end{aligned} \quad (105)$$

soit :

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(Y^0 + \frac{T^0}{1-T_0} \right) + u \frac{\partial}{\partial n} \left(Y^1 + \frac{T^1}{1-T_0} \right) - \frac{\partial^2}{\partial n^2} \left(\frac{Y^1}{\alpha_e} + \frac{T^1}{1-T_0} \right) + \varepsilon k \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{Y^0}{\alpha_e} + \frac{T^0}{1-T_0} \right) = 0 \quad (106)$$

Par intégration entre les zones 1 et 4, on obtient :

$$\left(1 - \frac{1}{\alpha_e} \right) \frac{d(1/u)}{d\xi} + u \frac{T^1}{1-T_0} + k \left(1 - \frac{1}{\alpha_e} \right) = 0 \quad (107)$$

et, en utilisant la relation :

$$T_+^1 = \text{Log } u^2$$

On a :

$$(1-T_0) \left(1 - \frac{1}{\mathcal{L}_e}\right) \frac{du}{dy} = u^3 \text{Log } u^2 + (1-T_0) \left(1 - \frac{1}{\mathcal{L}_e}\right) u^2 k \quad (108)$$

2.6.3 Flamme plane dans un écoulement à point d'arrêt.

Reprenant un exemple classique, nous envisageons un écoulement bidimensionnel plan en $y > 0$ en présence d'une paroi adiabatique en $y=0$. Le champ des vitesses est donné par :

$$u = \alpha x, \quad v = -\alpha y \quad (109)$$

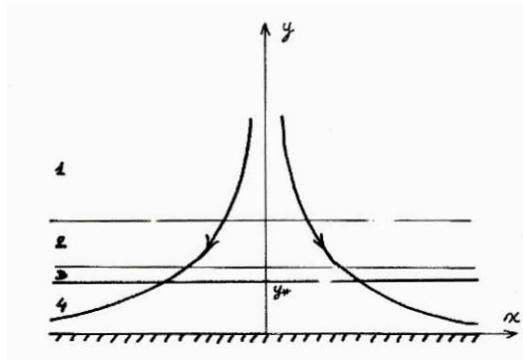


Fig. 13 — Flamme plane à point d'arrêt.

On recherche une solution de flamme plane, parallèle à l'axe $x'x$, dans laquelle Y et T ne sont fonctions que de y .

Les équations sont les suivantes :

$$\begin{cases} \alpha y \frac{dY}{dy} + \frac{1}{\mathcal{L}_e} \frac{d^2 Y}{dy^2} = w \\ \alpha y \frac{dT}{dy} + \frac{d^2 T}{dy^2} = -(1-T_0) w \end{cases} \quad (110)$$

On trouve successivement :

Zone 1 : $T = T_0, Y=1$

Zone 2 :

$$Y^0 = 1 - \frac{\text{erf}(\delta \sqrt{\mathcal{L}_e} y) - 1}{\text{erf}(d \sqrt{\mathcal{L}_e}) - 1}, \quad T^0 = T_0 + (1-T_0) \frac{\text{erf}(\delta y) - 1}{\text{erf } d - 1} \quad (111)$$

avec : $\delta = \sqrt{\frac{\alpha}{2}}, d = \sqrt{\frac{\alpha}{2}} y_*$ où y_* est l'ordonnée du front de flamme, $\text{erf } u = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u e^{-s^2} ds$

$$\text{Zone 3 : } -\frac{dT}{dy}\Big|_{\xi \rightarrow -\infty} \cong (1-T_0)e^{\frac{T_+^1}{2}} \text{ avec } \varepsilon \xi = y^* - y \quad (112)$$

donne $e^{\frac{T_+^1}{2}} = -\frac{2\delta}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-d^2}}{(\operatorname{erf}d - 1)}$, de plus : $T^0=1, Y^0=0$

$$\text{Zone 4 : } Y^0=0, Y^1=0, T^0=1, T^1=T_+^1$$

Par élimination de W, on a :

$$\alpha y \frac{d}{dy} \left(y + \frac{T}{1-T_0} \right) + \frac{d^2}{dy^2} \left(\frac{y}{\mathcal{L}e} + \frac{T}{1-T_0} \right) = 0 \quad (113)$$

Cette équation est vérifiée identiquement à l'ordre zéro dans toutes les zones. En zone 3, à l'échelle ℓ_3 seuls subsistent les termes diffusifs et l'on obtient à l'ordre 1 :

$$\frac{y^1}{\mathcal{L}e} + \frac{T^1}{1-T_0} = \frac{T_+^1}{1-T_0} = c^{te} \quad (114)$$

soit :

$$\frac{d}{dy} \left(\frac{y}{\mathcal{L}e} + \frac{T}{1-T_0} \right) = O(\varepsilon^2)$$

En zone 2 :

$$\frac{d}{dy} \left(\frac{y}{\mathcal{L}e} + \frac{T}{1-T_0} \right) \simeq \frac{2\delta}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{e^{-\delta^2 y^2}}{\operatorname{erf}d - 1} - \frac{1}{\sqrt{\mathcal{L}e}} \frac{e^{-\mathcal{L}e \delta^2 y^2}}{\operatorname{erf}(d\sqrt{\mathcal{L}e}) - 1} \right) \quad (115)$$

Le raccordement entre les zones 2 et 3 nous donne donc :

$$e^{-d^2}/(\operatorname{erf}d - 1) - e^{-\mathcal{L}e d^2}/\sqrt{\mathcal{L}e}(\operatorname{erf}d\sqrt{\mathcal{L}e} - 1) = 0 \quad (116)$$

On en déduit d et, connaissant α , la position y^* de la flamme.

- Cas de la flamme "presque équidiffusive" ($\frac{1}{\mathcal{L}e} = 1 - \varepsilon \ell$).

Le comportement de la flamme n'est pas régulier lorsque $\mathcal{L}e \rightarrow 1$. Aussi, une analyse particulière est-elle nécessaire. Les équations de base sont les mêmes que précédemment, toutefois, la répartition des termes d'ordre zéro et un est différente.

On a :

$$\begin{cases} \alpha y \frac{dV}{dy} + (1 - \varepsilon \ell) \frac{d^2 y}{dy^2} = W \\ \alpha y \frac{dT}{dy} + \frac{d^2 T}{dy^2} = -(1 - \tau_0) W \end{cases} \quad (117)$$

On trouve successivement :

Zone 1 : $T=T_0, Y=1$

Zone 2 :

$$\begin{cases} y^0 = 1 - \frac{\text{erf}(\delta y) - 1}{\text{erf} d - 1} \\ T^0 = T_0 + (1 - \tau_0) \frac{\text{erf}(\delta y) - 1}{\text{erf} d - 1} \end{cases} \quad (118)$$

Zone 3 :

$$e^{\frac{T^1}{2}} = - \frac{2\delta e^{-d^2}}{\sqrt{\pi} (\text{erf} d - 1)} \quad (119)$$

Zone 4 : $Y^0 = 0, Y^1=0, T^0 = I, T^1 = T^1+$

Mais la position de la flamme ne se trouve pas aussi facilement.

L'élimination de W nous donne en effet :

$$\alpha y \frac{d}{dy} \left(y + \frac{T}{1 - \tau_0} \right) + \frac{d^2}{dy^2} \left(y + \frac{T}{1 - \tau_0} \right) - \varepsilon \ell \frac{d^2 y}{dy^2} = 0 \quad (120)$$

À l'ordre zéro, on a :

$$\alpha y \frac{d}{dy} \left(y^0 + \frac{T^0}{1 - \tau_0} \right) + \frac{d^2}{dy^2} \left(y^0 + \frac{T^0}{1 - \tau_0} \right) = 0 \quad (121)$$

La solution est, dans toutes les zones :

$$y^0 + \frac{T^0}{1 - \tau_0} = \frac{1}{1 - \tau_0} \quad (122)$$

A l'ordre 1, on a :

$$\alpha y \frac{d}{dy} \left(y^1 + \frac{T^1}{1 - \tau_0} \right) + \frac{d^2}{dy^2} \left(y^1 + \frac{T^1}{1 - \tau_0} \right) - \ell \frac{d^2 y^0}{dy^2} = 0 \quad (123)$$

La solution est évidente en zones 1 et 4. En zone 2, on obtient :

$$\gamma^1 + \frac{\tau^1}{1-\tau_0} = - \frac{\ell \delta y e^{-\delta^2 y^2}}{\sqrt{\pi} (\operatorname{erfd}-1)} + \left(\frac{\ell d e^{-d^2}}{\sqrt{\pi} (\operatorname{erfd}-1)} + \frac{\tau^1}{1-\tau_0} \right) \frac{\operatorname{erf}(\delta y) - 1}{\operatorname{erf} d - 1} \quad (124)$$

par raccordement sur les valeurs de T avec les zones 1 et 3 compte tenu que l'on a, en zone 3 :

$$\gamma^1 + \frac{\tau^1}{1-\tau_0} = \frac{\tau^1}{1-\tau_0} \quad (125)$$

On obtient donc, pour la zone 2 :

$$\frac{d}{dy} \left(\gamma^1 + \frac{\tau^1}{1-\tau_0} \right) \Big|_{y=y^*} = - \frac{\ell \delta (1-2d^2) e^{-d^2}}{\sqrt{\pi} (\operatorname{erfd}-1)} + \left(\frac{\ell d e^{-d^2}}{\sqrt{\pi} (\operatorname{erfd}-1)} + \frac{\tau^1}{1-\tau_0} \right) \frac{2\delta}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-d^2}}{\operatorname{erfd}-1} \quad (126)$$

En zone 3, le développement doit être poussé l'ordre 2, pour trouver une valeur non nulle de la dérivée, on a :

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \left(\gamma^2 + \frac{\tau^2}{1-\tau_0} \right) - \ell \frac{d^2 \gamma^1}{d\xi^2} = 0 \quad (127)$$

On trouve donc :

$$\frac{d}{d\xi} \left(\gamma^2 + \frac{\tau^2}{1-\tau_0} \right) \Big|_{\xi \rightarrow -\infty} = \ell e^{\frac{\tau^1}{2}} \quad (128)$$

Le raccordement des dérivées entre les zones 2 et 3 nous fournit la condition cherchée :

$$\delta = \frac{\sqrt{\pi}}{2} (1-\operatorname{erfd}) e^{d^2 + \frac{\ell}{2}(1-\tau_0) \left(\frac{d e^{-d^2}}{\sqrt{\pi} (1-\operatorname{erfd})} - \frac{1}{2} - d^2 \right)} \quad (129)$$

d'où l'on déduit la position de la flamme et la vitesse de combustion au front de flamme.

3 - REPRESENTATION INTERFACIALE DE LA FLAMME

Nous n'allons pas ici partir de l'équation (34) et en calculer les différents termes d'inter face à l'aide des formules (8) (9) (10).

Nous utiliserons plutôt, dans un premier temps, la démarche inverse dans chacun des exemples du chapitre précédent, c'est-à-dire que nous intégrerons les deux membres des équations obtenues, compte tenu des résultats acquis par la méthode classique des développements asymptotiques. Cette intégration sera opérée suivant la normale \vec{N} au front de flamme dans un domaine comprenant la zone de diffusion et la zone de réaction. Seront

mis en évidence les différents termes intervenant dans l'équation (34) dont nous démontrerons ainsi la validité.

Dans un second temps, admettant la validité de (34) et l'appliquant aux paramètres Y et T , nous nous posons la question de la fermeture du système ainsi obtenu. Nous montrerons qu'avec à des relations de fermeture convenables, l'analyse de ce système conduit des résultats identiques à ceux du traitement classique, mais apparaît bien plus simple (Fig.14).

3.1 Equations interfaciales des exemples traités précédemment

Notons tout d'abord que l'intégrale suivant la normale à la flamme des seconds membres des équations du bilan fait intervenir dans chaque cas :

$$\int_{-\infty}^0 w dn$$

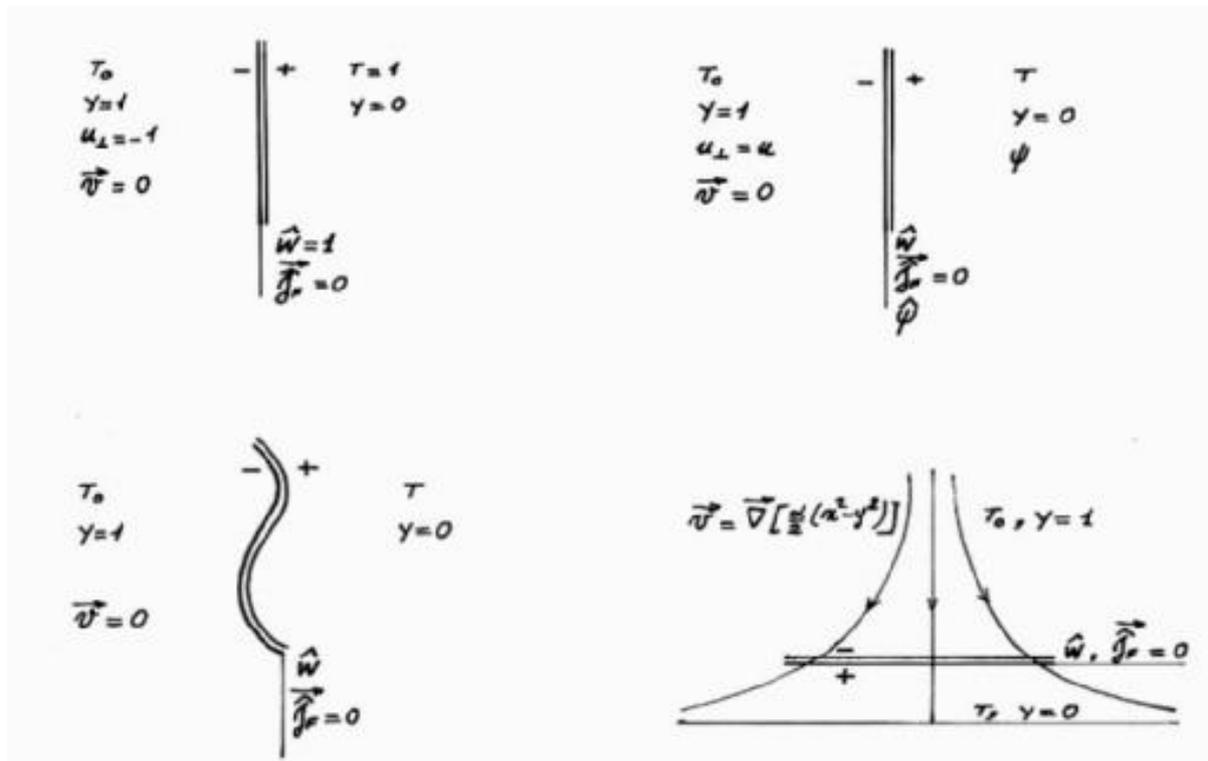


Fig. 14 - Représentation des flammes étudiées, dans le cadre de la théorie interfaciale.

L'équation (79b) s'écrit, compte tenu de (80) :

$$-\frac{\partial^2 T^1}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} = (1-T_0)^{1-\nu} \wedge \omega_e^{\nu} \phi^{\nu} e^{T^1} e^{-\phi} \simeq \varepsilon (1-T_0) W \quad (130)$$

On a donc :

$$-\int_{-\infty}^0 \frac{\partial^2 T^1}{\partial \xi^2} d\xi \simeq \varepsilon (1-T_0) \int_{-\infty}^0 W d\xi \quad (131)$$

Soit encore :

$$\left. \frac{\partial T^1}{\partial \xi} \right|_{\xi=-\infty} \simeq \varepsilon (1-T_0) \int_{-\infty}^0 W d\xi \quad (132)$$

ou, d'après (67) et (82) :

$$\varepsilon \int_{-\infty}^0 W d\xi \simeq e^{\frac{T_+^1}{2}} \quad (133)$$

L'intégrale de W sur les zones 2 et 3 à l'échelle ℓ_2 de diffusion devient, compte tenu que W est nul en zone 2 :

$$\int_{-\infty}^0 W dn \simeq e^{\frac{T_+^1}{2}} \simeq \hat{W} \quad (134)$$

3.1.1. Flamme plane adiabatique stationnaire

Intégrons les premiers membres des deux dernières équations du système (49). On obtient :

$$\begin{cases} \left[Y - \frac{1}{\alpha_e} \frac{dY}{dx} \right] = -\hat{W} \\ \left[T - \frac{dT}{dx} \right] = (1-T_0) \hat{W} \end{cases} \quad (135)$$

Ces équations ont bien la forme de l'équation (34) lorsque les deux premiers termes et le troisième sont nuls. Cela se vérifie puisque la flamme est stationnaire donc $dv/dt = 0$, qu'elle est unidimensionnelle, donc $\vec{j}_F = 0$.

Les équations précédentes se réduisent encore puisque dY/dx et dT/dx sont nuls de part et d'autre de l'interface, on retrouve évidemment une identité puisque :

$$W = 1 \quad \text{car } T_+^1 = 0, \quad [Y] = -1 \quad \text{et} \quad [T] = 1-T_0. \quad (136)$$

3.1.2. Flamme plane instationnaire avec échange de chaleur

Intégrons les premiers membres du système (86). On a, à l'échelle de temps de la zone de diffusion :

$$d\tau = \varepsilon dt \quad (137)$$

$$\left| \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^0 \gamma d\alpha &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^0 (\gamma-1) d\alpha = \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{1}{\alpha_\varepsilon u} \right) + O(\varepsilon) \\ \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^0 \tau d\alpha &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^0 (\tau-T_0) d\alpha = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1-T_0}{u} \right) + O(\varepsilon) \end{aligned} \right. \quad (138)$$

Ainsi, en posant suivant (8) :

$$\left| \begin{aligned} \hat{\gamma} &= \int_{-\infty}^0 (\gamma-\gamma_-) dn \simeq -\frac{1}{\alpha_\varepsilon u} \\ \hat{\tau} &= \int_{-\infty}^0 (\tau-\tau_-) dn \simeq \frac{1-T_0}{u} \end{aligned} \right. \quad (139)$$

et en définissant la perte de chaleur à l'interface grâce à la relation (99), on obtient, puisque $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{d_v}{dt}$:

$$\left| \begin{aligned} \frac{d_v \hat{\gamma}}{dt} + \llbracket u \gamma \rrbracket &\simeq -\hat{w} \\ \frac{d_v \hat{\tau}}{dt} + \llbracket u \tau \rrbracket + \varepsilon \hat{\psi} &\simeq (1-T_0) \hat{w} \end{aligned} \right. \quad (140)$$

avec :

$$\hat{\psi} = \frac{\bar{\Psi}}{u} \simeq \frac{1}{u} \left[(1-T_0) \Psi_{(1)}^0 + \int_0^1 \frac{\Psi(\tau)}{\tau^0 - T_0} d\tau^0 \right] \quad (141)$$

On retrouve donc la forme de l'équation (34), avec un terme supplémentaire imposé par la perte de chaleur, qui n'était pas envisagée dans cette équation.

3.1.3. Flamme courbe dans un milieu au repos

Intégrons le système: (102). On doit calculer \hat{Y} et \hat{T} qui donnent :

$$\left| \begin{aligned} \hat{Y} &= \int_{-\infty}^0 (\gamma-1) dn \simeq -\frac{1}{\alpha_\varepsilon u_\perp} \\ \hat{T} &= \int_{-\infty}^0 (\tau-T_0) dn \simeq \frac{1-T_0}{u_\perp} \end{aligned} \right. \quad (142)$$

On vérifie aisément le résultat suivant, compte tenu qu'à l'échelle ℓ_2 :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{N} = -\epsilon k = -\epsilon \vec{\nabla}_x \cdot \vec{N} \quad (143)$$

$$\left| \begin{array}{l} \frac{dv \hat{y}}{dt} + \hat{y} \vec{\nabla}_{//} \cdot \vec{V} + \left[(v_{\perp} - w) \gamma \right] \simeq -\hat{w} \\ \frac{dv \hat{\tau}}{dt} + \hat{\tau} \vec{\nabla}_{//} \cdot \vec{V} + \left[(v_{\perp} - w) \tau \right] \simeq (1 - \tau_0) \hat{w} \end{array} \right. \quad (144)$$

Le taux d'étirement $\vec{\nabla}_{//} \cdot \vec{V}$ se réduit ici à :

$$\vec{\nabla}_{//} \cdot \vec{V} = -u_{\perp} \vec{\nabla} \cdot \vec{N} \quad (145)$$

suivant la formule (32) puisque le fluide est au repos.

3.1.4. Flamme plane dans un écoulement à point d'arrêt

Il s'agit d'un cas où les équations de Rankine- Hugoniot ne sont pas toutes valables puisqu'il n'y a pas conservation du débit normal. Mais la vitesse tangentielle se conserve de sorte que \vec{V} se conserve aussi.

Cette fois, le terme de courbure n'intervient plus et les équations d'interface deviennent, pour la flamme plane stationnaire :

$$\left| \begin{array}{l} \hat{y} \vec{\nabla}_{//} \cdot \vec{n}_{//} + \left[(\gamma - \gamma_-) (v_{\perp} - w) \right] \simeq -\hat{w} \\ \hat{\tau} \vec{\nabla}_{//} \cdot \vec{n}_{//} + \left[(\tau - \tau_-) (v_{\perp} - w) \right] \simeq (1 - \tau_0) \hat{w} \end{array} \right. \quad (146)$$

Puisque

$$\vec{\nabla}_{//} \cdot \vec{v}_{//} = \alpha = Cte \quad (147)$$

on a également

$$\left[(\gamma - \gamma_-) (v_{\perp} - w) \right] = (v_{\perp+} - w) \left[\gamma \right] = u_{\perp} \left[\gamma \right] \quad (148)$$

Comme $w=0$, $v_{\perp+} - w = v_{\perp+}$, $v_{\perp+} = -v_* = \alpha y_*$.

Les grandeurs de surface ont ici une expression plus complexe :

$$\left| \begin{array}{l} \hat{y} \simeq \int_{y_*}^{\infty} (\gamma^2 - 1) dy = - \int_{y_*}^{\infty} \frac{\text{erf}(\delta \sqrt{\epsilon} y) - 1}{\text{erf}(\delta \sqrt{\epsilon}) - 1} dy = \frac{1}{\delta \sqrt{\epsilon}} \left(\frac{e^{-\epsilon d^2}}{\sqrt{\pi} (\text{erf}(\delta \sqrt{\epsilon}) - 1)} + d \sqrt{\epsilon} \right) \\ \hat{\tau} \simeq \int_{y_*}^{\infty} (\tau^2 - \tau_0) dy = (1 - \tau_0) \int_{y_*}^{\infty} \frac{\text{erf}(\delta y) - 1}{\text{erf} d - 1} dy = - \frac{1 - \tau_0}{\delta} \left(\frac{e^{-d^2}}{\sqrt{\pi} (\text{erf} d - 1)} + d \right) \end{array} \right. \quad (149)$$

Les équations deviennent

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \hat{\gamma} + v_* \llbracket \gamma \rrbracket \simeq -\hat{w} \\ \alpha \hat{\tau} + v_* \llbracket \tau \rrbracket \simeq (1 - \tau_0) \hat{w} \end{array} \right. \quad (150)$$

avec : $\hat{W}^0 = e^{\frac{T_+}{2}}$.

3.2 Relations de fermeture de la théorie interfaciale

Pour résoudre un problème de propagation de flamme, il est nécessaire d'intégrer les équations du bilan dans les gaz frais et dans les gaz brûlés, ce qui est très simple dans les exemples traités ici. Les équations d'interface apparaissent comme des conditions aux limites. Cependant, les équations du bilan (34) font intervenir des grandeurs de surface qui apparaissent comme autant d'inconnues supplémentaires : des flux \vec{j}_F et des taux de production \hat{W}_F . Nous n'examinerons pas ici en détail le cas de ces flux, Signalons seulement que si les flux \vec{j}_F obéissent à des lois du type :

$$\vec{j}_F = - \kappa_F \vec{\nabla} f \quad (151)$$

si f varie peu parallèlement à (Σ) et que κ_F est constant, alors :

$$\vec{j}_{F||} \simeq - \kappa_F \vec{\nabla}_\parallel \hat{f} \quad (152)$$

Le problème est moins évident pour les grandeurs d'interface. Celles-ci n'obéissent pas a priori à la relation de Gibbs et on peut difficilement espérer les relier entre elles par des lois d'état simples et autonomes,

En revanche, les résultats obtenus avec les exemples précédents font apparaître des relations liant les flux d'excès $\rho u_\perp \hat{f}$ aux sauts d'interface $\llbracket \hat{f} \rrbracket$. On obtient des relations du type

$$\rho u_\perp \hat{f} = L_F \llbracket \hat{f} \rrbracket \quad (153)$$

Les coefficients L_F sont des coefficients phénoménologiques qui dépendent de la structure fine de l'interface. L'analyse par développements asymptotiques a permis de les déterminer.

Avec les exemples traités, on obtient :

$$u_\perp \hat{\gamma} \simeq L_\gamma \llbracket \gamma \rrbracket, \quad u_\perp \hat{\tau} \simeq L_\tau \llbracket \tau \rrbracket \quad (154)$$

On a montré que L_Y et L_T ne dépendaient que de la structure de la couche de diffusion. Lorsque l'écoulement est uniforme ou au repos, on trouve en variables adimensionnelles :

$$\begin{aligned} L_Y &= 1/\mathcal{L}e \\ L_T &= 1 \end{aligned} \quad (155)$$

Dans le cas de la flamme à point d'arrêt on a

$$\left| \begin{aligned} L_Y &= \frac{-u_\perp}{\sqrt{\frac{\alpha}{2} \mathcal{L}e}} \left(\frac{e^{-\frac{\mathcal{L}e u_\perp^2}{2\alpha}}}{\sqrt{\pi} (\operatorname{erf} \sqrt{\frac{\mathcal{L}e}{2\alpha}} u_\perp - 1)} + \sqrt{\frac{\mathcal{L}e}{2\alpha}} u_\perp \right) \\ L_T &= \frac{-u_\perp}{\sqrt{\alpha/2}} \left(\frac{e^{-\frac{u_\perp^2}{2\alpha}}}{\sqrt{\pi} (\operatorname{erf} \frac{u_\perp}{\sqrt{2\alpha}} - 1)} + \frac{u_\perp}{\sqrt{2\alpha}} \right) \end{aligned} \right. \quad (156)$$

Ces expressions sont plus compliquées, et une étape prochaine de cette recherche sera de trouver des expressions simplifiées et satisfaisantes. Une analyse des bilans d'excès d'entropie reste à faire pour déterminer la forme générale des flux d'excès, ce qui n'évitera pas l'étude de la structure fine d'interface si l'on veut calculer les coefficients mis en évidence. On ne procède pas d'une autre manière dans le calcul des coefficients de transfert à l'aide des intégrales de collision de la théorie cinétique des gaz

Quant aux taux de production \hat{W}_F nous en avons donné une expression générale déduite de l'étude de la zone de réaction avec nos hypothèses.

3.3 Application des équations d'interface au traitement de cas concrets

Nous partirons ici des équations d'interface munies de leurs relations de fermeture et nous envisagerons un traitement par développements asymptotiques qui, comme nous le verrons, est plus simple que dans la théorie classique. Traitons seulement deux exemples.

3.3.1 Flamme plane instationnaire avec échange de chaleur

Dans le référentiel lié à la flamme on a :

$$\left| \begin{aligned} \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial t} + u \llbracket \gamma \rrbracket &= -\hat{W} \\ \frac{\partial \hat{T}}{\partial t} + u \llbracket T \rrbracket &= (1-T_0) \hat{W} - \varepsilon \hat{\psi} \end{aligned} \right. \quad (157)$$

Les relations de fermeture sont

$$\left\{ \begin{array}{l} u \hat{Y} = \frac{1}{\alpha \varepsilon} [Y] \\ u T = [T] \\ u \Psi = \bar{\Psi} \\ \hat{W} = e^{\frac{T-1}{2}} + O(\varepsilon) = \hat{W}^0 + \varepsilon \hat{W}^1 + \dots \end{array} \right. \quad (158)$$

Les conditions amont sont

$$Y_+=1, T_+=T_0$$

Les conditions aval sont

$$Y_+=1, T_+=1+\varepsilon T_+^1+O(\varepsilon^2)$$

et

$$\hat{W}^0 = e^{\frac{T_+^1}{2}}$$

En admettant des fluctuations lentes, on peut poser $d\tau = \varepsilon dt$.

Effectuons les développements asymptotiques. A l'ordre zéro, on a

$$u = \hat{W}^0 = e^{\frac{T_+^1}{2}} \quad (159)$$

à l'ordre 1

$$\frac{d}{d\tau} \left(-\frac{1}{\alpha \varepsilon u} \right) = -\hat{W}^1 \quad (160a)$$

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{u} \right) + \frac{u T_+^1}{1-T_0} + \frac{\bar{\Psi}}{u(1-T_0)} = \hat{W}^1 \quad (160b)$$

L'élimination de \hat{W}^1 entre (160a) et (160b) donne

$$(1-T_0) \left(1 - \frac{1}{\alpha \varepsilon} \right) \frac{d \frac{1}{u}}{d\tau} + u T_+^1 + \frac{\bar{\Psi}}{u} = 0 \quad (161)$$

L'élimination de T_+^1 fournit le résultat déjà établi précédemment..

3.3.2 Ecoulement à point d'arrêt

Les équations du bilan deviennent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{Y} \vec{\nabla}_Y \cdot \vec{v}_Y + [(Y-X)(v_L - v_S)] = -\hat{W} \\ \hat{T} \vec{\nabla}_T \cdot \vec{v}_T + [(T-T_-)(v_L - v_S)] = (1-T_0) \hat{W} \end{array} \right. \quad (162)$$

Ici $w=0$ et $v_{\perp+} = u_{\perp}$, $T_- = T_0$, $\vec{\nabla}_{//} \cdot \vec{v}_{//} = \alpha$, de sorte que, avec $Y_+=0$:

$$\alpha \hat{Y} + u_{\perp}(Y_+-1) = -\hat{W} \quad (163a)$$

$$\alpha \hat{T} + u_{\perp}(T_+-T_0) = (1-T_0) \hat{W} \quad (163b)$$

Les relations de fermeture :

$$\begin{cases} u_{\perp} \hat{Y} = \frac{u_{\perp}}{\sqrt{(\alpha/2)\alpha_e}} \left(\frac{e^{-\frac{\alpha_e u_{\perp}^2}{2\alpha}}}{\sqrt{\pi} (\operatorname{erf}(\frac{\alpha_e}{2\alpha} u_{\perp} - 1))} + \sqrt{\frac{\alpha_e}{2\alpha}} u_{\perp} \right) \\ u_{\perp} \hat{T} = \frac{-u_{\perp}}{\sqrt{\alpha/2}} \left(\frac{e^{-\frac{u_{\perp}^2}{2\alpha}}}{\sqrt{\pi} (\operatorname{erf}(\frac{u_{\perp}}{\sqrt{2\alpha}} - 1))} + \frac{u_{\perp}}{\sqrt{2\alpha}} \right) (1-T_0) \\ \hat{W} = e^{\frac{T_+-1}{2}} + O(\varepsilon) \end{cases} \quad (164)$$

complètent le système.

L'élimination de \hat{W} entre (163a) et (163b) fournit la position de la flamme :

$$\hat{Y} + \frac{\hat{T}}{1-T_0} \simeq 0$$

ou encore

$$\frac{e^{-d^2}}{\operatorname{erf}d-1} - \frac{1}{\sqrt{\alpha_e}} \frac{e^{-\alpha_e d^2}}{\operatorname{erf}(d\sqrt{\alpha_e})-1} = 0 \quad (165)$$

La première équation nous donne, à l'ordre zéro

$$-\frac{\alpha}{\delta} \left(\frac{e^{-d^2}}{\sqrt{\pi} (\operatorname{erf}d-1)} + d \right) + u_{\perp} = e^{\frac{T_+-1}{2}} \quad (166)$$

or :

$$u_{\perp} = \alpha y_*$$

et

$$\alpha d/\delta = \alpha y_*$$

Il s'ensuit que

$$e^{\frac{T_1}{2}} = -\frac{2\delta e^{-d^2}}{\sqrt{\pi}(\operatorname{erf}d-1)} \quad (167)$$

Les résultats obtenus avec ce modèle sont identiques à ceux de la théorie classique.

-Cas de la flamme “presque équidiffusive” : les équations d’interface ont la même forme que précédemment. Cependant, pour que l’analyse soit correcte et donne les mêmes résultats que la théorie classique, il faut pousser le calcul des grandeurs d’interface jusqu’à l’ordre 1 et écrire :

$$\hat{y} = \int_{y_*}^{\infty} (\gamma^0 + \varepsilon \gamma^1 - 1) dy, \quad \hat{T} = \int_{y_*}^{\infty} (T^0 + \varepsilon T^1 - T_0) dy \quad (168)$$

On obtient

$$\begin{aligned} \hat{y} &\approx \frac{1}{\delta} \left(\frac{e^{-d^2}}{\sqrt{\pi}(\operatorname{erf}d-1)} + d \right) - \varepsilon \frac{\ell e^{-d^2}}{\delta \sqrt{\pi}(\operatorname{erf}d-1)} \left(\frac{1}{2} + d^2 + \frac{d e^{-d^2}}{\sqrt{\pi}(\operatorname{erf}d-1)} \right) \\ \hat{T} &\approx -\frac{1 + \varepsilon T_1^1 - T_0}{\delta} \left(\frac{e^{-d^2}}{\sqrt{\pi}(\operatorname{erf}d-1)} + d \right) \end{aligned} \quad (169)$$

CONCLUSION

Ce premier essai de description d’une flamme de prémélange par des équations interfaciales, montre que les grandeurs d’interface proviennent uniquement de la zone de diffusion, alors que le terme de production a pour origine la zone de réaction. Les expressions des grandeurs d’interface résultent de l’intégration des grandeurs volumiques dont l’évolution provient des effets de diffusion et de convection. En l’absence de saut de concentration et de température, ces grandeurs, qui correspondent en fait à des excès accumulés à l’interface, seraient nulles, Les flux d’excès de ces grandeurs apparaissent, dans les cas examinés, comme proportionnels aux sauts d’interface correspondance qui sont des forces généralisées. Flux et forces généralisés obéissent à des relations phénoménologiques dont les coefficients dépendent de l’état local du mélange.

La mise en évidence directe de ces relations à partir de la thermodynamique irréversible des interfaces n’est pas faite pour l’instant. Ce travail devra être complété par l’examen de cas plus complexes, en levant en particulier l’hypothèse de la densité constante. Néanmoins, ces premiers résultats nous semblent suffisamment encourageants pour poursuivre la recherche avec cette démarche. Si celle-ci avait échoué jusqu’à présent, c’est que les modèles interfaciaux envisagés étaient trop simples et se réduisaient généralement à des équations de saut. Les progrès réalisés ces dernières années dans l’application à certains types de flammes, laminaires ou turbulentes, de la méthode des développements asymptotiques doivent permettre aujourd’hui de réexaminer la question. On peut penser que cette modélisation

interfaciale assez sophistiquée, contribuera à simplifier l'étude des flammes en écoulement complexe ainsi que les calculs numériques qui en découlent.

ANNEXE

Expression du taux d'étirement

Soient x, y, z , les coordonnées cartésiennes et x_1, x_2, x_3 les coordonnées curvilignes orthogonales correspondant aux vecteurs unitaires $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ [12]. On a :

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 \vec{e}_1 & h_2 \vec{e}_2 & h_3 \vec{e}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{bmatrix}$$

L'expression du tenseur gradient du vecteur vitesse \vec{V} est la suivante :

$$\vec{\nabla} \otimes \vec{V} = \begin{bmatrix} \frac{1}{h_1} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{v_2}{h_2} \frac{\partial h_1}{\partial x_2} + \frac{v_3}{h_3} \frac{\partial h_1}{\partial x_3} \right) & \frac{1}{h_2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} - \frac{v_2}{h_1} \frac{\partial h_2}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{h_3} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{v_3}{h_1} \frac{\partial h_3}{\partial x_1} \right) \\ \frac{1}{h_1} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{v_1}{h_2} \frac{\partial h_1}{\partial x_2} \right) & \frac{1}{h_2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{v_3}{h_3} \frac{\partial h_2}{\partial x_3} + \frac{v_1}{h_1} \frac{\partial h_2}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{h_3} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} - \frac{v_3}{h_2} \frac{\partial h_3}{\partial x_2} \right) \\ \frac{1}{h_1} \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_1} - \frac{v_1}{h_3} \frac{\partial h_1}{\partial x_3} \right) & \frac{1}{h_2} \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{v_2}{h_3} \frac{\partial h_2}{\partial x_3} \right) & \frac{1}{h_3} \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_3} + \frac{v_1}{h_1} \frac{\partial h_3}{\partial x_1} + \frac{v_2}{h_2} \frac{\partial h_3}{\partial x_2} \right) \end{bmatrix}$$

avec $\vec{V} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$ an coordonnées curvilignes, le vecteur $\vec{V}_{//}$ ayant pour coordonnées $(v_1, v_2, 0)$ de

sorte que : $\vec{V} = \vec{v}_{//} + w \vec{N}$, avec $\vec{N} = \vec{e}_3$.

La surface (Σ) correspond à $x_3 = \Phi(t)$. La quantité $d_v(d\Sigma)/dt$ s'obtient à partir de $d_v(d\mathcal{V}/dt)$.

En effet :

$$\frac{d_v(d\mathcal{V})}{dt} = \vec{\nabla} \cdot \vec{V} d\mathcal{V} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left(\frac{\partial (v_1 h_2 h_3)}{\partial x_1} + \frac{\partial (v_2 h_3 h_1)}{\partial x_2} + \frac{\partial (v_3 h_1 h_2)}{\partial x_3} \right) d\mathcal{V}$$

D'autre part : $d\mathcal{V} = d\Sigma dn$, avec : $dn = h_3 dx_3$ et $d\Sigma = h_1 h_2 dx_1 dx_2$.

Enfin, si \vec{M} un point du milieu continu :

$$\frac{d_v(d\vec{M})}{dt} = \vec{\nabla} \otimes \vec{V} \cdot d\vec{M}$$

On a :

$$\frac{d_v(d\mathcal{V})}{dt} = \frac{d_v(d\Sigma)}{dt} dn + \frac{d_v(dn)}{dt} d\Sigma$$

Soit : $d\vec{M} = \vec{N} dn$, on a :

$$\frac{d_v(\vec{N}dn)}{dt} = \frac{1}{h_3} \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{w}{h_1} \frac{\partial h_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_3} - \frac{w}{h_2} \frac{\partial h_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial w}{\partial x_3} + \frac{v_1}{h_1} \frac{\partial h_3}{\partial x_1} + \frac{v_2}{h_2} \frac{\partial h_3}{\partial x_2} \end{bmatrix} dn$$

Il s'ensuit que :

$$\vec{N} \cdot \frac{d_v(\vec{N}dn)}{dt} = \vec{N} \cdot \frac{d_v \vec{N}}{dt} dn + \frac{d_v(dn)}{dt} = \frac{d_v(dn)}{dt}$$

Finalement :

$$\vec{N} \cdot \frac{d_v(\vec{N}dn)}{dt} = \vec{N} \cdot \frac{d_v \vec{N}}{dt} dn + \frac{d_v(dn)}{dt} = \frac{d_v(dn)}{dt}$$

Reportons ce résultat dans l'expression de $\frac{d_v(dV)}{dt}$ et identifions à la formule directe :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial(v_1 h_2 h_3)}{\partial x_1} + \frac{\partial(v_2 h_3 h_1)}{\partial x_2} + \frac{\partial(w h_1 h_2)}{\partial x_3} \right) dx_1 dx_2 dx_3 \\ & = \frac{d_v(d\Sigma)}{dt} h_3 dx_3 + \left(\frac{\partial w}{\partial x_3} + \frac{v_1}{h_1} \frac{\partial h_3}{\partial x_1} + \frac{v_2}{h_2} \frac{\partial h_3}{\partial x_2} \right) \end{aligned}$$

On trouve donc, après regroupement des termes :

$$\frac{d_v(d\Sigma)}{dt} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[h_3 \left(\frac{\partial(v_1 h_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial(v_2 h_1)}{\partial x_2} \right) + w \frac{\partial(h_1 h_2)}{\partial x_3} \right] d\Sigma$$

Or, si l'on veut obtenir $\vec{\nabla}_{//} \cdot \vec{V}$, il suffit d'ajouter les deux premiers termes de la diagonale du tenseur gradient, ce qui donne :

$$\vec{\nabla}_{//} \cdot \vec{V} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[h_3 \left(\frac{\partial(v_1 h_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial(v_2 h_1)}{\partial x_2} \right) + w \frac{\partial(h_1 h_2)}{\partial x_3} \right]$$

Ainsi :

$$\frac{d_v(d\Sigma)}{dt} = \vec{\nabla}_{//} \cdot \vec{V} d\Sigma$$

De plus, $\vec{\nabla}_{//} \cdot \vec{v}_{//}$ s'obtient en faisant $w=0$ dans cette expression ce qui donne les deux premiers termes du second membre. D'autre part $\vec{\nabla}_{//} \cdot (w\vec{N})$ s'obtient en faisant $v_1=v_2=0$ ce qui donne le troisième terme et qui prouve que :

$$\vec{\nabla}_{//} \cdot \vec{V} = \vec{\nabla}_{//} \cdot \vec{v}_{//} + \vec{\nabla}_{//} \cdot (w\vec{N})$$

On montre que :

$$\vec{\nabla}_{//} \cdot (w\vec{N}) = w \vec{\nabla}_{//} \cdot \vec{N}$$

en posant $\vec{V} = w\vec{N}$ puis $\vec{V} = \vec{N}$ dans l'expression de $\vec{\nabla}_{//} \cdot \vec{V}$:

$$\vec{\nabla}_{//} \cdot (w\vec{N}) = \frac{w}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial(h_1 h_2)}{\partial x_3}, \quad \vec{\nabla}_{//} \cdot \vec{N} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial(h_1 h_2)}{\partial x_3}$$

Enfin, il est évident que $\vec{\nabla}_{//} \cdot \vec{N} = \vec{\nabla} \cdot \vec{N}$. Il suffit de faire $\vec{V} = \vec{N}$ dans l'expression de $\vec{\nabla} \cdot \vec{V}$ pour le prouver. On a montré ainsi que :

$$\frac{1}{d\Sigma} \frac{dv(d\Sigma)}{dt} = \vec{\nabla}_{//} \cdot \vec{V} = \vec{\nabla}_{//} \cdot \vec{v}_{//} + w \vec{\nabla} \cdot \vec{N}$$

et on a obtenu son expression en coordonnées curvilignes.

REFERENCES

- [1] F.A. Williams, Combustion theory. 2nd Ed. The Benjamin/Cumming Publishing Cy, Inc., 1985.
- [2] G.S.S. Ludford, S. Scheurer, Problèmes mathématiques er combustion. Ecoles CEA-INRIA-EDF. (7 au 13 décembre 1982). Edité par l'INRIA.
- [3] J.D. Buckmaster, G.S.S. Ludford, Lectures on Mathematical Combustion, S.I.A.M, 1983.
- [4] P. Clavin, C. Joulin, Premixed flames in large and high intensity turbulent flow. Le Journal de Physique, Lettres, **44**, n°1, janv. 1983.
- [5] G.I. Sivashinsky, Structure of Bunsen flames. J. Chemical Physics, **62**, n° 2, 1975.
- [6] B. Deshaies, G. Joulin, P. Clavin, Etude asymptotique des flammes sphériques non adiabatiques. Journal de Mécanique, **20**, n°4, 1981.
- [7] G.I. Sivashinsky, Diffusional thermal theory of cellular flames. Combustion Science and Technology, **5**, 1977.
- [8] J. D. Buckmaster, The quenching of two-dimensional premixed flames. Acta Astronautica, **6**, 1979.
- [9] C. Joulin, P. Clavin, Linear stability analysis of non adiabatic flames diffusional-thermal model. Combustion and Flame, **35**, 1979.
- [10] G.I. Sivashinsky, On a disturbed flame front as s hydrodynamic discontinuity. Acta Astronautica, **3**, 1976.
- [11] A.M. Klimov, Zhur. Prikl. Mekh. Tekhn. Fiz., n°3, **49**, 1963.
- [12] M. Barrère, R. Prud'homme, Equations fondamentales de l'Aérothermochimie, Masson, 1973.
- [13] A.L. Jaumotte, Chocs et ondes de choc. Masson, 1971.