



**HAL**  
open science

## Un carquois

Claire Amiot

► **To cite this version:**

| Claire Amiot. Un carquois. 2018. hal-02002244

**HAL Id: hal-02002244**

**<https://hal.science/hal-02002244v1>**

Submitted on 31 Jan 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# un carquois

• C. AMIOT

## 1. Introduction

Un *carquois* (quiver en anglais) est un graphe orienté, en général fini. Plus précisément, un carquois  $Q$  est la donnée de deux ensembles (finis) :  $Q_0$  l'ensemble des sommets,  $Q_1$  l'ensemble des flèches, et de deux applications  $Q_1 \rightarrow Q_0$  associant à une flèche sa source et son but. Cette dénomination a été introduite par le mathématicien Pierre Gabriel au début des années 70.<sup>1</sup>

La notion de carquois est devenue, à la suite des travaux de Gabriel, un outil fondamental en théorie des représentations d'algèbres de dimension finie. Une question centrale de cette théorie est la description des modules sur une algèbre donnée.

Rappelons qu'un module de dimension finie sur une  $\mathbb{C}$ -algèbre associative  $A$  est un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie, muni d'une action par endomorphismes de l'algèbre  $A$ .

L'observation cruciale de P. Gabriel dans [5] est la suivante : *Étant donnée une  $\mathbb{C}$ -algèbre  $A$  de dimension finie, on peut lui associer un carquois  $Q_A$  (souvent appelé le carquois de Gabriel de  $A$ ) tel que tout  $A$ -module de dimension finie peut être vu comme une représentation de  $Q_A$  sur  $\mathbb{C}$ .*

L'objet de ce texte est de définir la notion de représentation de carquois et d'expliquer différents outils permettant de mieux comprendre ces objets.

## 2. Représentations de carquois

Soit  $Q$  un carquois (qu'on supposera toujours connexe). Une *représentation*  $V$  de  $Q$  sur  $\mathbb{C}$  est la donnée de  $\mathbb{C}$ -espaces vectoriels de dimension finie  $V_i$  pour chaque sommet  $i \in Q_0$ , et d'applications linéaires  $V_\alpha : V_i \rightarrow V_j$  pour chaque flèche  $\alpha : i \rightarrow j$ . La dimension de  $V$  est donnée par  $\sum_{i \in Q_0} \dim V_i$ .

**Exemple 1.** Soit  $Q$  le carquois ci-dessous, qu'on appellera de type  $A_2$  dans la suite :

$$1 \xrightarrow{\alpha} 2$$

On a  $Q_0 = \{1, 2\}$  et  $Q_1 = \{\alpha\}$ . Une représentation de  $Q$  est la donnée de deux espaces vectoriels  $V_1$  et  $V_2$  et d'une application linéaire  $V_\alpha$  de  $V_1$  dans  $V_2$ .

Par exemple,  $V$  et  $W$  sont deux représentations de  $Q$  de dimensions respectives 1 et 3 :

$$V = (\mathbb{C} \xrightarrow{0} 0) \qquad W = (\mathbb{C}^2 \xrightarrow{(1 \ -3)} \mathbb{C}).$$

L'application linéaire  $W_\alpha$  est ici donnée par sa matrice dans les bases canoniques.

**Exemple 2.** Soit  $Q$  le carquois suivant :



Une représentation de  $Q$  est la donnée d'un espace vectoriel  $V$  et d'un endomorphisme de  $V$ .

### 2.1 – Morphismes de représentations

Étant données deux représentations  $V$  et  $W$  de  $Q$ , un *morphisme*  $\varphi : V \rightarrow W$  est la donnée d'applications linéaires  $\varphi_i : V_i \rightarrow W_i$  pour chaque sommet  $i$  telles que pour toute flèche  $\alpha : i \rightarrow j$ , on ait

$$\begin{array}{ccc} V_i & \xrightarrow{V_\alpha} & V_j \\ \downarrow \varphi_i & & \downarrow \varphi_j \\ W_i & \xrightarrow{W_\alpha} & W_j \end{array} \qquad \varphi_j \circ V_\alpha = W_\alpha \circ \varphi_i.$$

Les notions de représentation et de morphisme de représentations permettent de définir ce qu'on appelle la catégorie  $\text{Rep}_{\mathbb{C}}(Q)$  des représentations de  $Q$ .

**Exemple 3.** Reprenons l'exemple de type  $A_2$  (ex. 1). Alors il existe un morphisme  $\varphi$  de  $V$  dans  $W$  donné par :

$$\begin{array}{ccc} V = & (\mathbb{C} \xrightarrow{0} 0) & \\ \varphi \downarrow & \left( \begin{array}{c} 3 \\ 1 \end{array} \right) \downarrow & \downarrow 0 \\ W = & (\mathbb{C}^2 \xrightarrow{(1 \ -3)} \mathbb{C}) & \end{array}$$

1. La notion générale de graphe étant trop générique et vague, P. Gabriel a choisi d'introduire un nom spécifique, qui se référerait uniquement à la théorie des représentations.

Étant donné  $Q$  et  $i \in Q_0$  un sommet, on peut définir une représentation, notée  $S_i$ , de dimension 1, où l'espace vectoriel  $\mathbb{C}$  est placé au sommet  $i$ . Cette représentation est *simple* au sens où elle n'admet pas de sous-représentation non triviale. Dans le cas où le carquois  $Q$  n'a pas de cycles orientés, toutes les représentations simples sont de cette forme.

## 2.2 – Représentations indécomposables

On peut définir la notion de somme directe de représentations d'un même carquois  $Q$  : la somme directe de  $V$  et  $W$  est définie par  $(V \oplus W)_i = V_i \oplus W_i$  et l'application  $(V \oplus W)_\alpha$  est donnée par une matrice diagonale par blocs,  $V_\alpha \oplus W_\alpha$ . Une représentation est dite *indécomposable* si elle n'est pas isomorphe à une somme directe de sous-représentations de dimensions strictement inférieures.

Ainsi toute représentation est isomorphe à une somme directe de représentations indécomposables. De plus on peut montrer que cette décomposition est unique à permutation et à isomorphisme des facteurs près.

**Exemple 4.** Reprenons le type  $A_2$  (ex. 1 et 3). Notons

$$S_1 = (\mathbb{C} \xrightarrow{0} 0), \quad S_2 = (0 \xrightarrow{0} \mathbb{C})$$

les représentations simples, et pour  $\lambda \in \mathbb{C}$  notons

$$V_\lambda = (\mathbb{C} \xrightarrow{\lambda} \mathbb{C}).$$

Alors on a

$$V_\lambda \oplus S_1 \oplus S_2 = (\mathbb{C}^2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} \mathbb{C}^2).$$

La représentation  $V_0$  est décomposable :  $V_0 = S_1 \oplus S_2$ . Tandis que si  $\lambda \neq 0$ , alors  $V_\lambda$  est indécomposable et isomorphe à  $V_1$ . Remarquons de plus que  $V_\lambda$  n'est pas simple. En effet  $S_2$  est une sous-représentation de  $V_\lambda$  pour tout  $\lambda$ .

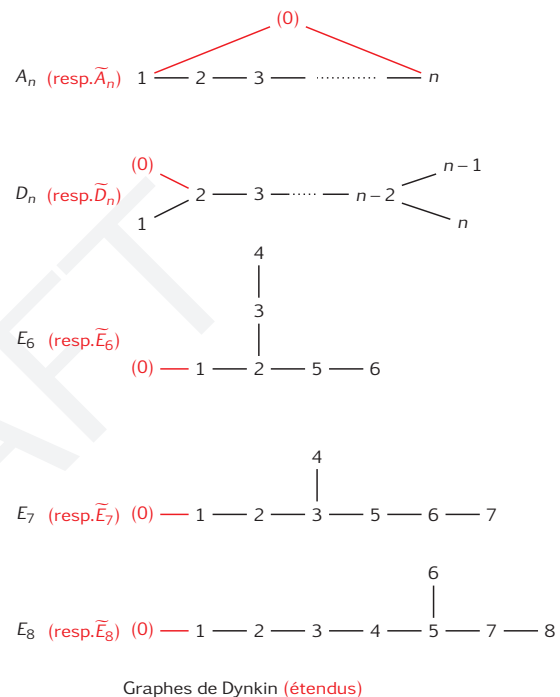
**Exemple 5.** Reprenons l'exemple 2. Pour  $\lambda \neq 0$  et  $n \in \mathbb{N}^*$  notons  $J_n(\lambda)$  la représentation de dimension  $n$  donnée par le bloc de Jordan de taille  $n$  associée à la valeur propre  $\lambda$ . Alors la représentation  $J_n(\lambda)$  est indécomposable. De plus la réduction des endomorphismes sur  $\mathbb{C}$  nous dit que toute représentation de  $Q$  est isomorphe à une somme directe de représentations de la forme  $J_n(\lambda)$ . Notons que pour  $n = 1$  la représentation  $J_1(\lambda)$  est simple. On obtient dans ce cas une infinité de représentations simples deux à deux non isomorphes.

## 2.3 – Le cas fini

Le but étant de comprendre la catégorie  $\text{Rep}_{\mathbb{C}}(Q)$ , une question alors naturelle est de décrire l'ensemble  $\text{Ind}_{\mathbb{C}}(Q)$  des classes d'isomorphismes des représentations indécomposables d'un carquois  $Q$ .

Une partie de la réponse à cette question est donnée par le théorème suivant :

**Théorème 1 (Gabriel 1972, [5]).** *Étant donné un carquois connexe  $Q$ , l'ensemble  $\text{Ind}_{\mathbb{C}}(Q)$  est fini si et seulement si  $Q$  est une orientation d'un graphe de Dynkin de type  $A, D$  ou  $E$ .*



**Exemple 6.** Reprenons le type  $A_2$  (ex. 1, 3 et 4). Soit

$$W = (\mathbb{C}^m \xrightarrow{M} \mathbb{C}^n)$$

une représentation de  $Q$  donnée par une matrice  $M \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{C})$ . Il existe des matrices  $P \in \text{GL}(m, \mathbb{C})$  et  $Q \in \text{GL}(n, \mathbb{C})$  telles que

$$QMP^{-1} = \left( \begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right),$$

où l'entier  $r$  est le rang de la matrice  $M$ . Autrement dit on a un isomorphisme de représentations

$$W \simeq (S_1)^{m-r} \oplus (S_2)^{n-r} \oplus (V_1)^r.$$

On a donc

$$\text{Ind}_{\mathbb{C}}(Q) = \{[S_1], [S_2], [V_1]\}.$$

### 3. La forme de Tits

A une représentation  $V \in \text{Rep}_{\mathbb{C}}(Q)$  on peut associer son *vecteur dimension* défini par  $\underline{\dim} V := (\dim V_i)_{i \in Q_0}$ . On définit une forme quadratique sur  $\mathbb{Z}^{Q_0}$ , la *forme de Tits*, par :

$$q_Q(\underline{d}) = \sum_{i \in Q_0} d_i^2 - \sum_{\alpha \in Q_1, \alpha: i \rightarrow j} d_i d_j.$$

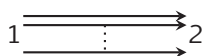
Un résultat plus précis que le théorème de Gabriel a été démontré par Victor Kac.

**Théorème 2 (Kac (1980) [6]).** *Soit  $Q$  un carquois connexe et  $\underline{d} \in \mathbb{N}^{Q_0}$ . Il existe une représentation indécomposable de vecteur dimension  $\underline{d}$  si et seulement si  $q_Q(\underline{d}) \leq 1$ . De plus,*

- si  $q_Q(\underline{d}) = 1$ , l'ensemble  $\text{Ind}_{\mathbb{C}}(Q, \underline{d})$  des classes d'isomorphismes des représentations indécomposables de vecteur dimension  $\underline{d}$  est réduit à un point,
- et si  $q_Q(\underline{d}) \leq 0$ , l'ensemble  $\text{Ind}_{\mathbb{C}}(Q, \underline{d})$  est infini.

Tout comme en théorie de Lie, le cas où  $q_Q$  est semidéfinie positive (correspondant aux graphes de Dynkin étendus, en rouge sur la figure précédente) donne une autre famille particulière de carquois. Un tel carquois est en effet *docile*, au sens où pour tout vecteur dimension  $\underline{d}$ , l'ensemble  $\text{Ind}_{\mathbb{C}}(Q, \underline{d})$  est un ensemble fini de familles à 0 ou 1 paramètre. Dans le cas où  $q_Q$  prend des valeurs négatives, le carquois est dit *sauvage*, et la classification complète des indécomposables est une tâche essentiellement impossible, au sens où il existe des familles arbitrairement grandes d'indécomposables.

**Exemple 7.** Pour  $m \in \mathbb{N}$  on définit le carquois à  $m$  flèches suivant :



Alors un calcul simple permet de voir que

$$\begin{aligned} q(x, y) &= x^2 + y^2 - mxy \\ &= \left(x - \frac{m}{2}y\right)^2 + \frac{(2-m)(2+m)}{4}y^2. \end{aligned}$$

Autrement dit  $\text{Ind}_{\mathbb{C}}(Q)$  est fini si et seulement si  $m = 0$  ou  $m = 1$ ,  $Q$  est docile si et seulement si  $m \leq 2$  et sauvage si  $m \geq 3$ .

### 4. L'approche géométrique

Lorsque  $Q$  n'est pas de type Dynkin, l'ensemble  $\text{Ind}_{\mathbb{C}}(Q)$  est infini. Une stratégie pour mieux comprendre cet ensemble, consiste à essayer de lui donner une structure géométrique, ou plus exactement

à donner une structure géométrique à certains de ses sous-ensembles.

Fixons  $\underline{d} \in \mathbb{N}^{Q_0}$  un vecteur dimension, et notons  $R = \text{Rep}_{\mathbb{C}}(Q, \underline{d})$  l'ensemble des représentations de vecteur dimension  $\underline{d}$ . Cet ensemble  $R$  est un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel isomorphe au produit d'espaces de matrices  $\bigoplus_{\alpha: i \rightarrow j} \mathcal{M}_{d_j \times d_i}(\mathbb{C})$ . Le groupe  $G = \prod_{i \in Q_0} \text{GL}(d_i, \mathbb{C})$  agit naturellement sur  $R$  par :

$$(g_i)_{i \in Q_0} \cdot (V_{\alpha})_{\alpha \in Q_1} := (g_j \cdot V_{\alpha} \cdot g_i^{-1})_{\alpha \in Q_1, \alpha: i \rightarrow j}.$$

La forme de Tits peut s'interpréter via la formule :

$$q_Q(\underline{d}) = \dim G - \dim R. \tag{1}$$

Deux représentations  $V$  et  $W$  de  $R$  sont dans la même orbite si et seulement si elles sont isomorphes. L'ensemble  $\text{Ind}_{\mathbb{C}}(Q, \underline{d})$  est donc un sous-ensemble de l'ensemble des orbites, ou autrement dit, du quotient de  $R$  par l'action de  $G$ . Comme le groupe  $G$  est algébrique, et que son action sur  $R$  est aussi algébrique, on a, pour tout  $V$  dans  $R$ , l'égalité suivante :

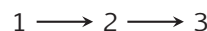
$$\dim \mathcal{O}_V = \dim G - \dim G_V. \tag{2}$$

où  $\mathcal{O}_V$  est l'orbite de  $V$ , et  $G_V$  le sous-groupe stabilisateur de  $V$ .

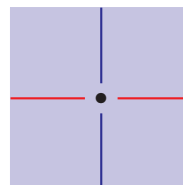
En combinant (1) et (2), on obtient immédiatement

$$\dim R - \dim \mathcal{O}_V = \dim G_V - q_Q(\underline{d}). \tag{3}$$

**Exemple 8.** Soit  $Q$  le carquois suivant de type  $A_3$  :



Notons  $\underline{d} = (1, 1, 1)$ . Alors l'espace  $R$  est isomorphe à  $\mathbb{C}^2$ , et le groupe  $G$  isomorphe à  $(\mathbb{C}^*)^3$  agit sur  $R = \mathbb{C}^2$  par  $(\alpha, \beta, \gamma) \cdot (x, y) = (\beta x \alpha^{-1}, \gamma y \beta^{-1})$ . L'espace  $R$  est donc la réunion disjointe de quatre orbites qui sont  $\mathcal{O}_{(0,0)}$ ,  $\mathcal{O}_{(1,0)}$ ,  $\mathcal{O}_{(0,1)}$  et  $\mathcal{O}_{(1,1)}$  de dimensions respectives 0, 1, 1 et 2.



Comme les orbites ne sont pas toutes fermées (elles sont localement fermées pour la topologie de Zariski), le quotient  $R/G$  n'a pas de bonne structure topologique. Une stratégie pour avoir un quotient raisonnable peut être d'utiliser la théorie géométrique des invariants. Mais dans le cadre de cette théorie, le quotient, noté  $R//G$ , paramètre uniquement les orbites fermées. Dans le cas où le carquois  $Q$  n'a pas de cycle orienté, il n'y a toujours qu'une seule orbite fermée, réduite à un point (l'origine), et qui correspond à l'unique représentation semi-simple (c'est-à-dire celle qui est la somme directe des représentations simples avec multiplicités). Or ce sont les orbites de grande dimension qui nous intéressent et que l'on cherche à paramétrer. En effet, plus la dimension de l'orbite est grande moins la représentation se décompose.

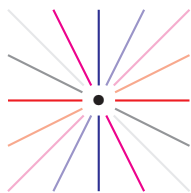
La réunion des orbites de dimension maximale forme toujours un ouvert dense  $U$  de  $R$ . D'après (3), cette dimension maximale est toujours inférieure ou égale à  $\dim R + q_Q(\underline{d}) - 1$  (puisque le stabilisateur contient toujours  $\mathbb{C}^*$ ). Donc le quotient de  $U$  par  $G$ , lorsqu'il a une bonne structure, devrait être de dimension  $1 - q_Q(\underline{d})$  s'il existe des indécomposables dont le stabilisateur a dimension 1.

**Exemple 9.** Soit  $Q$  le carquois donné dans l'exemple 7.

Étudions d'abord le cas  $m = 2$ , et  $\underline{d} = (1, 1)$ . On a alors  $R = \mathbb{C}^2$  et  $G = (\mathbb{C}^*)^2$ . L'action de  $G$  sur  $R$  est définie par

$$(\alpha, \beta).(x, y) = (\alpha^{-1}x\beta, \alpha^{-1}y\beta).$$

Dans ce cas, il n'y a pas d'orbite dense, mais une infinité d'orbites de dimension 1 et une orbite de dimension 0. Toutes les orbites de dimension 1 correspondent à des représentations indécomposables, tandis que l'orbite de dimension 0 est  $\{S_1 \oplus S_2\}$ . L'ensemble  $\text{Ind}_{\mathbb{C}}(Q, \underline{d})$  est donc en bijection avec la droite projective complexe  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ .



Prenons maintenant un  $m$  général, et posons  $\underline{d} = (1, d)$ . Un élément de  $R$  est la donnée de  $m$  vecteurs colonnes de taille  $d$ , autrement dit c'est la donnée d'une matrice de taille  $m \times d$ . L'action de  $G = \mathbb{C}^* \times \text{GL}(d)$  est donnée par  $(\lambda, P).M = \lambda^{-1}MP$ .

Une représentation donnée par une matrice  $M$  sera donc isomorphe à une représentation  $M'$  si et seulement si l'image de  $M$  et celle de  $M'$  coïncident. De plus,  $M$  sera indécomposable si et seulement si le rang de  $M$  est  $d$ . Ainsi l'ensemble  $\text{Ind}_{\mathbb{C}}(Q, \underline{d})$  vérifie les propriétés suivantes :

- si  $d > m$ ,  $\text{Ind}_{\mathbb{C}}(Q, \underline{d}) = \emptyset$ ;
- si  $m = 0$  ou  $m = d$ ,  $\text{Ind}_{\mathbb{C}}(Q, \underline{d})$  est réduit à un point;
- si  $0 < d < m$ ,  $\text{Ind}_{\mathbb{C}}(Q, \underline{d})$  est en bijection avec la Grassmannienne  $\text{Gr}_d(\mathbb{C}^m)$ , c'est-à-dire l'ensemble des sous-espaces de dimension  $d$  de  $\mathbb{C}^m$ .

Malheureusement le quotient de la réunion des orbites de dimension maximale  $U$  par  $G$  n'a pas toujours une structure de variété algébrique. L'idée suivante, due à Alastair King dans [7], est alors de se restreindre encore à un sous-ensemble de  $U$  (des représentations satisfaisant une certaine condition appelée stabilité). Renvoyons ici à [8] pour un très bel article de survol sur le sujet.

## 5. Théorie d'Auslander-Reiten

On se place ici dans le cas où le carquois  $Q$  n'a pas de cycle orienté.

Nous nous sommes jusqu'ici intéressés aux objets de la catégorie  $\text{Rep}_{\mathbb{C}}(Q)$ . Mais qu'en est-il des morphismes ? Un outil très efficace pour aborder cette question est l'utilisation des *suites presque scindées* introduites par Maurice Auslander et Idun Reiten en 1975 dans [2]. Le but est double : parvenir à une description assez précise des morphismes, et pouvoir calculer récursivement certains indécomposables par un algorithme.

Pour décrire les morphismes de la catégorie  $\text{Rep}_{\mathbb{C}}(Q)$ , on introduit une notion analogue à la notion de représentation indécomposable : la notion de *morphisme irréductible*. Approximativement, un morphisme est irréductible s'il ne s'écrit pas comme une composition non triviale de deux morphismes.

### 5.1 – Carquois d'Auslander-Reiten

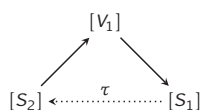
A la catégorie  $\text{Rep}_{\mathbb{C}}(Q)$ , on associe alors un carquois noté  $\Gamma = \Gamma_Q$  et appelé le *carquois d'Auslander-Reiten* dont les sommets sont indexés par l'ensemble  $\text{Ind}_{\mathbb{C}}(Q)$ . Le nombre de flèches entre  $[X]$  et  $[Y]$  dans  $\Gamma_Q$  est la dimension de l'espace des morphismes irréductibles entre  $X$  et  $Y$ .

Ce carquois a un nombre infini de sommets si  $Q$  n'est pas de type Dynkin. Mais on peut montrer qu'il est toujours *localement fini* : le nombre de flèches incidentes à un sommet est toujours fini. Il a de plus une structure de *carquois à translation* : il existe des sous-ensembles finis  $P_0$  et  $I_0$  de l'ensemble de sommets  $\Gamma_0$  et une bijection

$$\tau : \Gamma_0 \setminus P_0 \longrightarrow \Gamma_0 \setminus I_0$$

telle que le nombre de flèches  $X \rightarrow Y$  est le même que le nombre de flèches  $\tau Y \rightarrow X$ . Les ensembles  $P_0$  et  $I_0$  ont tous deux même cardinalité que  $Q_0$ . On appelle *projectives* les représentations correspondantes aux sommets  $P_0$  et *injectives* celles correspondantes à  $I_0$ . La catégorie  $\text{Rep}_{\mathbb{C}}(Q)$  étant abélienne, on a en effet une notion de suite exacte.

**Exemple 10.** Pour le carquois de type  $A_2$  (ex. 1, 4 et 6), le carquois d'Auslander-Reiten est donné par :



On a  $P_0 = \{[S_2], [V_1]\}$ ,  $I_0 = \{[V_1], [S_1]\}$  et  $\tau(S_1) = S_2$ .

L'application  $\tau$  a une interprétation algébrique : elle provient d'un foncteur

$$\tau : \text{Ind}_{\mathbb{C}}(Q) \longrightarrow \text{Ind}_{\mathbb{C}}(Q),$$

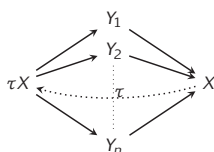
appelé *translation d'Auslander-Reiten* qui vérifie les propriétés suivantes :

- si  $X$  n'est pas projective, alors  $\tau X$  n'est pas injective ;
- et il existe une suite exacte de la forme :

$$0 \longrightarrow \tau X \xrightarrow{(g_i)} \bigoplus_i Y_i \xrightarrow{(f_i)} X \longrightarrow 0$$

appelée suite *presque scindée* ou *suite d'Auslander-Reiten*, où tous les morphismes  $f_i$  et  $g_i$  sont irréductibles.

Chaque suite presque scindée correspond à une maille dans  $\Gamma_Q$  de la forme



**Exemple 11.** Dans l'exemple 10, la suite exacte

$$0 \longrightarrow S_2 \longrightarrow V_1 \longrightarrow S_1 \longrightarrow 0$$

est une suite exacte presque scindée.

## 5.2 – Composantes préprojective et préinjective

Une représentation indécomposable  $X$  est appelée *préprojective* si  $\tau^n X$  est projectif pour un certain  $n \geq 0$ . De manière duale, une représentation indécomposable  $X$  est appelée *préinjective* si  $\tau^{-n} X$  est injectif pour un certain  $n \geq 0$ . On peut alors montrer que le sous-carquois dont les sommets sont préprojectifs (resp. préinjectifs) forme une composante connexe  $\mathcal{P}$  (resp.  $\mathcal{I}$ ) de  $\Gamma_Q$ .

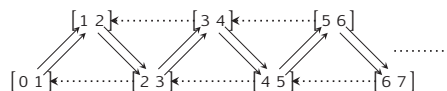
Dans le cas où  $Q$  est un carquois de Dynkin, le carquois  $\Gamma_Q$  est toujours connexe et on a donc  $\mathcal{P} = \mathcal{I}$ . De plus la structure de  $\Gamma_Q$  est totalement connue, et se décrit très facilement à partir de  $Q$ .

Dans le cas où  $Q$  n'est pas de type Dynkin, les composantes  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{I}$  sont infinies et distinctes. Mais ces deux composantes sont bien comprises et leur carquois se construit aisément à partir de  $Q$ . En outre, les suites presque scindées permettent de calculer facilement par récurrence les vecteurs dimension des représentations de  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{I}$  en utilisant la formule :

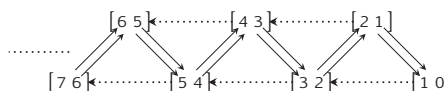
$$\underline{\dim} X + \underline{\dim} \tau X = \sum_i \underline{\dim} Y_i.$$

Comme les représentations préprojectives et préinjectives sont entièrement déterminées par leur vecteur dimension, cet algorithme est très puissant.

**Exemple 12.** Soit  $Q$  le carquois de l'exemple 9 avec  $m = 2$ . Dans ce cas la composante  $\mathcal{P}$  est de la forme :



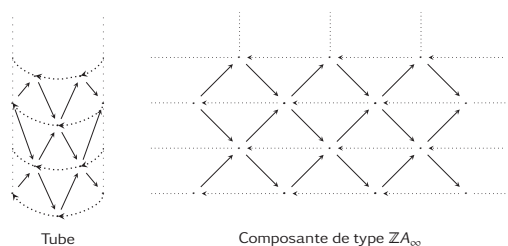
La composante  $\mathcal{I}$ , elle, a la forme suivante :



## 5.3 – Composantes régulières

Les autres composantes connexes sont appelées *régulières*. Bien que l'ensemble  $\text{Ind}_{\mathbb{C}}(Q)$  ne soit pas descriptible dans le cas sauvage, les composantes connexes régulières ont des structures bien particulières : elles sont des tubes dans le cas

docile, ou bien des composantes de la forme  $\mathbb{Z}A_\infty$  dans le cas sauvage.



**Exemple 13.** Reprenons l'exemple 9 avec  $m = 2$ . L'ensemble des composantes régulières de  $\Gamma_Q$  forme une famille de tubes de rang 1 indexée par  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ .

## 6. Pour aller plus loin

L'apport des représentations de carquois dans la théorie des représentations d'algèbres est considérable. Tous les résultats présentés ici se généralisent en effet au cas des modules de dimension finie sur une  $\mathbb{C}$ -algèbre de dimension finie. Nous renvoyons ici le lecteur voulant en savoir plus aux livres [1], [3] ou aux notes de cours [4].

Un autre aspect très intéressant de la théorie des représentations de carquois porte sur les opérations combinatoires reliant certains carquois entre eux, comme les réflexions ou les mutations. En effet, l'interprétation algébrique en terme de représentations de ces opérations ont donné de nombreuses applications au domaine (voir par exemple [9]).

### Références

- [1] I. ASSEM, D. SIMSON et A. SKOWROŃSKI. *Elements of the representation theory of associative algebras. Vol. 1: Techniques of representation theory*. English. Cambridge: Cambridge University Press, 2006, p. ix + 458. ISBN : 0-521-58631-3/pbk; 0-521-58423-X/hbk.
- [2] M. AUSLANDER et I. REITEN. « Representation theory of Artin algebras. III: Almost split sequences. » English. *Commun. Algebra* **3** (1975), p. 239–294. ISSN : 0092-7872; 1532-4125/e. DOI : 10.1080/00927877508822046.
- [3] M. AUSLANDER, I. REITEN et S. O. SMALØ. *Representation Theory of Artin Algebras*. **36**. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge : Cambridge University Press, 1997, p. 425. ISBN : 9780521599238.
- [4] W. CRAWLEY-BOEVEY. « Lectures on representations of quivers, More lectures on representations of quivers ». Lecture notes, 1992, available at the author's webpage.
- [5] P. GABRIEL. « Unzerlegbare Darstellungen. I. (Indecomposable representations. I). » German. *Manuscr. Math.* **6** (1972), p. 71–103. ISSN : 0025-2611; 1432-1785/e. DOI : 10.1007/BF01298413.
- [6] V. KAC. « Infinite root systems, representations of graphs and invariant theory. » English. *Invent. Math.* **56** (1980), p. 57–92. ISSN : 0020-9910; 1432-1297/e. DOI : 10.1007/BF01403155.
- [7] A. KING. « Moduli of representations of finite dimensional algebras. » English. *Q. J. Math., Oxf. II. Ser.* **45**, n° 180 (1994), p. 515–530. ISSN : 0033-5606; 1464-3847/e. DOI : 10.1093/qmath/45.4.515.
- [8] M. REINEKE. « Moduli of representation of quivers. » English. In : *Trends in representation theory of algebras and related topics. Proceedings of the 12th international conference on representations of algebras and workshop (ICRA XII), Toruń, Poland, August 15–24, 2007*. Zürich: European Mathematical Society (EMS), 2008, p. 589–637. ISBN : 978-3-03719-062-3/hbk.
- [9] I. REITEN. « Tilting theory and cluster algebras ». Advanced School on Representation Theory and related Topics, ICTP Trieste, January 2006, arXiv:1012.6014.



**Claire Amiot**

Claire Amiot est maître de conférence à l'université Grenoble-Alpes. Ses travaux portent sur la théorie des représentations d'algèbres, l'algèbre homologique et les algèbres amassées.

L'auteur voudrait remercier Michel Brion, Vianney Combet, Fanny Kassel, Bernhard Keller, Evelyne Miot, Pierre-Guy Plamondon et Pierre Will pour leurs conseils bienveillants sur des versions antérieures de ce texte.