



Modélisations d'interfaces

Roger Prud'Homme

► To cite this version:

Roger Prud'Homme. Modélisations d'interfaces. 19ème Congrès Français de Mécanique, Aug 2009, Marseille, France. <hal-02000948>

HAL Id: hal-02000948

<https://hal.science/hal-02000948v1>

Submitted on 6 Feb 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

Modélisations d'interfaces

ROGER PRUD'HOMME

Institut D'Alembert - UMR 7190 – CNRS/UPMC - Case 162 ; 4, place Jussieu 75252 Paris cedex 05. Tél. 0144277306 Fax. 0144275259. roger.prud_homme@upmc.fr

Résumé :

La modélisation analytique des interfaces consiste à établir pour celles-ci un système d'équations aux dérivées partielles complet, avec conditions de fermeture, par passage d'une description en couche interfaciale tridimensionnelle à une description en surface.

La donnée de conditions aux limites et de conditions initiales doit en principe permettre la résolution, analytique ou numérique, du système et d'accéder ainsi au comportement mécanique et thermodynamique des interfaces. La méthode de résolution dépend beaucoup du type d'interface considéré et les situations rencontrées sont très variées.

Abstract :

The analytic modeling consists in establishing, for the interfaces, a complete system of partial differential equations with closure conditions, by crossing from a description of three-dimensional interfacial layer to a description in terms of surface.

The given boundary conditions and initial conditions should in principle allow the resolution, by analysis or by numerical calculus, and permit study of the mechanical and thermodynamical behaviors of interfaces.

The method of resolution depends on the type of the interface in question and the situations are very varied.

Mots clefs : interfaces, modélisation, mécanique, thermodynamique

Généralités

Les exemples donnés dans les figures illustrent d'une certaine façon la variété des situations pouvant laisser à penser que l'on se trouve en présence d'interfaces. Il y a bien sûr le cas d'un liquide au repos ou en mouvement en présence d'un autre fluide ou de sa propre vapeur. La figure 1.I montre cependant une « goutte thermique », c'est-à-dire une zone plus froide qui se distingue de l'ensemble du liquide et dont la limite ressemble à une surface capillaire¹.

On voit sur la figure 1.II un fluide pur dans un récipient de volume constant, d'abord avec deux phases séparées par une surface capillaire. Dans un deuxième temps la surface de séparation a disparu suite à une légère augmentation de température, car on se trouve alors en régime supercritique (C.M. Rayner et al. University of Leeds, UK.). L'onde de choc de la figure 1.III est une onde de discontinuité à l'échelle macroscopique et peut aussi être considérée comme une interface. Il en est de même d'une flamme de prémélange, bien que cette flamme s'épaississe sous l'effet d'une diminution de la pression (Figure 1.IV. Photo Laboratoire d'Aérodynamique du CNRS, 1985). La flamme sphérique de la figure 1.V voit apparaître des structures cellulaires au cours de son expansion. Cela peut-il s'expliquer par des propriétés d'interfaces. Dans quelle mesure les interfaces sont-elles autonomes ?

1 Forme générale d'une loi de bilan d'interface.

Soient un vecteur \mathbf{X} et le vecteur normal unitaire à la surface, on utilise les notations suivantes :

$$\mathbf{X}_{//} = (\mathbf{I} - \mathbf{N} \otimes \mathbf{N}) \cdot \mathbf{X}, \quad \mathbf{X}_{\perp} = \mathbf{N} \otimes \mathbf{N} \cdot \mathbf{X} = (\mathbf{N} \cdot \mathbf{X}) \mathbf{N} = X_{\perp} \mathbf{N}, \quad X_{\perp} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{X}$$

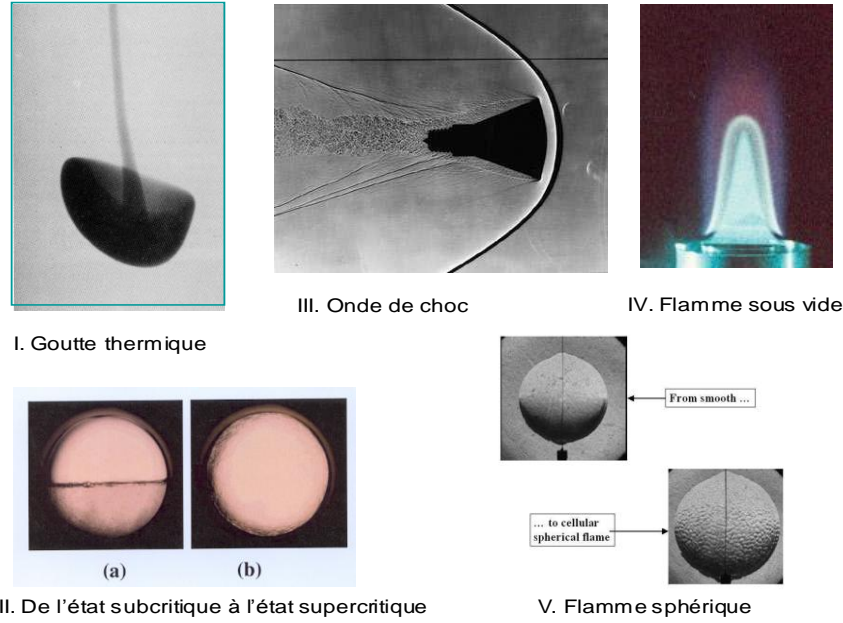


Figure 1 : I. Goutte thermique. II De l'état subcritique (a) à l'état supercritique (b) (document web). III Onde de choc devant un corps de rentrée (document web). IV. Tomographie laser d'une flamme de prémélange méthane-air sous basse pression. V. Images successives, obtenues par ombroscopie, de la propagation d'une flamme de prémélange sphérique, montrant la transition d'une surface lisse à une surface cellulaire².

L'établissement des lois de bilan d'interface passe par une mise en forme de l'équation de bilan 3D (couche interfaciale, Figure 2a) qui peut s'écrire :

$$\frac{d_V(\rho f)}{dt} + \rho f \nabla_{//} \cdot \mathbf{V} + \nabla_{//} \cdot \mathbf{J}_{VF} + \frac{\partial \mathbf{J}_{VF\perp}}{\partial N} = \dot{W}_F \quad (1)$$

avec : $\nabla_{//} \cdot \mathbf{J}_{VF} = \nabla_{//} \cdot \mathbf{J}_{VF//} + \mathbf{J}_{VF\perp} \cdot \nabla \cdot \mathbf{N}$, $\mathbf{J}_{VF} = \mathbf{J}_{VF} + \rho f (\mathbf{v} - \mathbf{V})$.

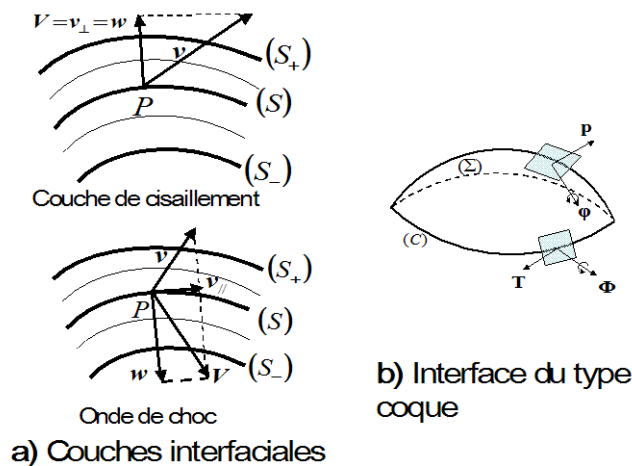


Figure 2 : a) Définition du vecteur vitesse dans la couche interfaciale (représentation plane)³.
b) Représentation des efforts agissant sur une surface

Puis on introduit alors les quantités de surface :

$$\rho_a f_S = \int_{N_-}^{N_+} \rho f dN \quad , \quad \mathbf{J}_{VF a} = \int_{N_-}^{N_+} \mathbf{J}_{VF} dN \quad , \quad \dot{W}_{Fa} = \int_{N_-}^{N_+} \dot{W}_F dN$$

et enfin on déduit l'équation de bilan d'interface :

$$\frac{d_s(\rho_a f_s)}{\partial t} + \rho_a f_s \nabla_s \cdot \mathbf{V}_s + \nabla_s \cdot \mathbf{J}_{vFa} + [\mathbf{J}_{vF\perp}]^+ = \dot{W}_{Fa} \quad (2)$$

La démonstration est aisée en supposant que \mathbf{V} et $\nabla_{//}$ se conservent à la traversée de l'interface et on pose : $\mathbf{V} = \mathbf{V}_s$, $\nabla_{//} = \nabla_s$.

2 Interfaces à variables vérifiant directement des relations classiques de la thermostatique et de la TPI-2D

Il n'est pas automatique que les interfaces 2D vérifient les lois de comportement des milieux 3D. Les lois d'état (relevant de la thermostatique) et les lois complémentaires (relevant de la TPI) peuvent être de formes très différentes. Nous supposons néanmoins qu'il est des cas où ces lois sont analogues.

Cela signifie généralement que la couche interfaciale n'est pas un milieu ordinaire.

Ainsi, on ne peut obtenir une variable intensive telle que la tension superficielle qu'en considérant que la couche interfaciale est un fluide capillaire, avec un coefficient capillaire. La théorie du second gradient permet d'étudier de tels milieux pour lesquels l'intégration à travers la couche interfaciale conduit à la tension capillaire^{3,4}.

Il serait intéressant d'avoir une théorie générale des milieux non classiques 3D permettant de déduire ainsi l'ensemble des lois classiques 2D, et pas seulement la tension superficielle.

Enonçons maintenant les lois d'état et les lois complémentaires vérifiant directement des relations classiques de la thermostatique et de la TPI-2D.

2.1 Thermostatique

On introduit la tension superficielle thermodynamique, qui remplace la pression thermodynamique 3D (ou plutôt son opposé) et on écrit les relations classiques d'Euler, de Gibbs et de Gibbs-Duhem :

$$\begin{aligned} e_s &= T_s s_s + \sigma / \rho_a + \sum_{j=1}^N g_s^j Y_s^j, \quad de_s = T_s ds_s + \sigma d(1/\rho_a) + \sum_{j=1}^N g_s^j dY_s^j, \\ 0 &= s_s dT_s + (1/\rho_a) d\sigma + \sum_{j=1}^N Y_s^j dg_s^j \end{aligned} \quad (3)$$

2.2 Lois complémentaires

La forme de ces lois est déductible de l'expression du taux de production d'entropie en appliquant les principes de base de la TPI. Nous nous limitons ici à la présentation de quelques exemples.

Exemple de la viscosité de surface :

La formule suivante, due à Slattery⁵, donne pour le tenseur des tensions visqueuses de surface (avec les viscosités de surface κ_a , ε_a) :

$$\boldsymbol{\sigma}_v = \boldsymbol{\sigma}_{v//} = \boldsymbol{\sigma} - \sigma \mathbf{1}_{//} = [(\kappa_a - \varepsilon_a) \nabla_s \cdot \mathbf{v}_s] \mathbf{1}_{//} + 2 \varepsilon_a \mathbf{D}_s \quad (4)$$

Application : théorie de Scriven et Sternling (1964)⁶ pour l'instabilité de Bénard-Marangoni.

On admet que la surface peut se déformer et on considère trois nombres sans dimensions :

Le nombre de Nusselt Nu, celui de crispation (ou capillaire) Cr et le nombre de viscosité Vi :

$$Cr = \mu \kappa / \sigma d, \quad Vi = (\kappa_a + \varepsilon_a) / \mu d$$

L'analyse en petites perturbations linéarisées conduit à l'expression du nombre de Marangoni de la stabilité neutre Ma en fonction de $\alpha = K d$, où K est le nombre d'onde et d l'épaisseur de la couche fluide :

$$Ma = \frac{8\alpha(\alpha \operatorname{ch} \alpha + Nu \operatorname{sh} \alpha)[\alpha - \operatorname{sh} \alpha \operatorname{ch} \alpha + (Vi/2)\alpha(\alpha^2 - \operatorname{sh}^2 \alpha)]}{\alpha^3 \operatorname{ch} \alpha - \operatorname{sh}^3 \alpha - 8Cr \alpha^3 \operatorname{sh} \alpha} \quad (5)$$

Pour $Cr=0$, on retrouve le cas de la surface plane de la théorie de Pearson (1958)⁷, qui expliqua pour la première fois les observations d'Henri Bénard (Figure 3a).

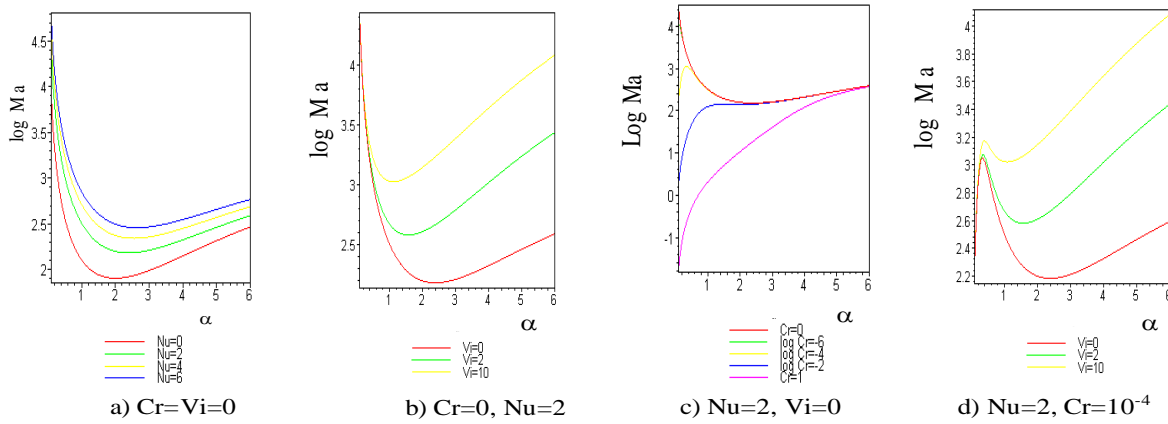


Figure 3 : Courbes de stabilité neutre obtenues dans le cas d'un fond isotherme.
Cas d'une surface plane (Pearson, 1958)⁷: a) Influence de Nu ; b) Influence de Vi.
Cas d'une surface libre (Scriven et Sternling)⁶: c) Influence de Cr ; d) Influence de Vi.

Contrairement à celles de Pearson, les courbes de Scriven et Sternling obtenues pour $Cr \neq 0$ (Figure 3c), soit σ non infini, c'est-à-dire pour une surface libre, semblent ne pas donner de Marangoni critique, cependant, il faut noter que la théorie s'applique à des surfaces infinies, ce qui n'est pas le cas dans la réalité. Si l'on tient compte des dimensions du récipient (c'est-à-dire d'un nombre d'onde minimum non nul), il apparaît bien une valeur critique dans la plupart des cas.

La figure 3b (surface plane) et la figure 3d (surface libre) montrent que l'effet de la viscosité de surface, lorsqu'elle existe, n'est pas négligeable et modifie sensiblement le Marangoni critique.

Autres exemples : réactions de surface, adsorption et désorption, évaporation.

La théorie cinétique de l'évaporation condensation a été développée suivant différentes approches^{8, 9, 10}.

Pour l'évaporation hors d'équilibre, on trouve par exemple la formule de Bond et al. (2004)¹¹:

$$\dot{m} = \left(\frac{M}{2\pi R} \right)^{1/2} \left(\alpha_v \frac{p_{sat}}{(T_s^-)^{1/2}} - \alpha_c \frac{p^+}{(T^+)^{1/2}} \right) \quad (6)$$

avec deux coefficients α différents, l'un pour l'évaporation et l'autre pour la condensation, M est la masse molaire, R la constante universelle des gaz, p_{sat} la pression de vapeur saturante à la température $T^- = T_s$ de surface du liquide, T^+ , p^+ correspondent au gaz au dessus du liquide.

3 Interfaces déduites de la thermostatique et de la TPI - 3D classiques.

L'exemple de flammes étirées

Le concept d'interface permet d'obtenir des résultats intéressants, sinon de retrouver des choses connues tels les coefficients d'échange.

L'un des résultats les plus spectaculaires concerne les flammes de prémélange pour lesquelles l'étude 3D conduit à l'expression de la vitesse de combustion en fonction d'une quantité typiquement interfaciale qui est le taux d'étirement de la flamme.

On trouve, sous des conditions particulières assez bien vérifiées pour les flammes d'hydrocarbures¹² :

$$s_L / s_L^0 \cong 1 - \mathcal{L}(\kappa + S / s_L^0) \quad (7)$$

où la parenthèse du second membre est le taux d'étirement de la surface $\nabla_{//} \cdot \mathbf{V}_S$ décomposé pour faire apparaître la courbure normale moyenne κ et le taux de déformation de l'écoulement au niveau de la flamme $S = -\mathbf{N} \cdot (\nabla \otimes \mathbf{v}) \cdot \mathbf{N}$. La longueur de Markstein \mathcal{L} est telle que :

$$\frac{\mathcal{L}}{\ell_f} = \frac{1}{\gamma} \ln \left(\frac{1}{1-\gamma} \right) + \frac{Ze(Le-1)}{2} \frac{1-\gamma}{\gamma} \int_0^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} \frac{\ln(1+x)}{x} dx \quad (8)$$

où ℓ_f est l'épaisseur de flamme, $\gamma = (\rho_u - \rho_b) / \rho_u$ et $Ze = E_a(T_b - T_u) / RT_b^2$ le nombre de Zel'dovich.

La notion de taux d'étirement de flamme - ou d'écoulement étiré - dans la couche interfaciale d'épaisseur ℓ_f est utilisée dans certains *modèles de combustion turbulente*, tels le modèle de flamme cohérente, avec la notion de densité de surface de flamme¹³. Marble and Broadwell sont à l'origine de ce modèle, qui a été adapté aux flammes de diffusion par Candel et al.¹⁴.

Il est appelé "Flame surface density model" par Poinot et Veynante¹⁵.

Ecrivons la production d'entropie pour une flamme mince de prémélange¹⁶ : $\tilde{W}_c = \rho_u s_L^0 I_0 \Sigma$, où ρ_u est la masse volumique des gaz frais, s_L^0 est la vitesse de combustion de la flamme plane laminaire, Σ l'aire de

flamme par unité de volume (Flame surface density) et I_0 un facteur d'étirement $I_0 = \frac{1}{s_L^0} \int_0^\infty s_c(\kappa) p(\kappa) d\kappa$,

qui est d'ordre 1, s_c est la vitesse de consommation, κ le taux d'étirement. La probabilité $p(\kappa)$ est supposée, dans beaucoup d'applications pratiques, être une fonction de Dirac : $p(\kappa) = \delta(\kappa - \bar{\kappa})$.

Une formulation satisfaisante de l'équation de bilan de la densité de surface, donnant de bons résultats comparativement à la DNS, est la suivante¹⁷ :

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \nabla \cdot (\tilde{v} \Sigma) = \nabla \cdot (D_t \nabla \Sigma) + C_1 \frac{\varepsilon}{k} \Sigma - C_2 s_L^0 \frac{\Sigma^2}{1 - \bar{c}} \quad (9)$$

4 Interfaces manifestant une résistance au plissement

On rejoint là le problème des coques minces, et le problème est d'obtenir des équations correctes pour la quantité de mouvement. On peut procéder par la méthode des puissances virtuelles. Le résultat concerne les efforts représentés sur la figure 2b.

Les équations de la quantité de mouvement forment le système suivant¹⁸ :

$$\begin{aligned} \nabla_{//} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \nabla_{//} \cdot (\mathbf{N} \otimes \mathbf{g}) + \mathbf{p} &= \rho_a d\mathbf{v}_a / dt, \quad \nabla_{//} \cdot \mathbf{M} + \nabla_{//} \cdot (\mathbf{N} \otimes \mathbf{m}) - \mathbf{N} \times \mathbf{g} + \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{0}, \\ (\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{N} \otimes \mathbf{g}) \cdot \boldsymbol{\eta} &= \mathbf{T}, \quad \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\Phi} \end{aligned} \quad (10)$$

La signification des forces extérieures est la suivante : \mathbf{p} , densité de forces de surface ; $\boldsymbol{\varphi}$, densité de moments de surface, $\boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{N} = 0$; \mathbf{T} densité de forces par unité de longueur; $\boldsymbol{\Phi}$, densité de moments par unité de longueur $\boldsymbol{\Phi} \cdot \mathbf{N} = 0$. Le tenseur $\boldsymbol{\sigma}$ est le tenseur des tensions (ou tenseur des contraintes de membrane). Le vecteur \mathbf{g} est le vecteur des forces de cisaillement. \mathbf{M} et \mathbf{m} caractérisent les moments de flexion.

Il faut compléter ce système d'équations de quantité de mouvement par les autres équations de bilan et établir l'expression du taux de production d'entropie, puis écrire les lois de comportement, avant de tenter de résoudre un problème donné. Mais nous nous limitons ici aux équations de quantité de mouvement car nous

avons voulu pointer du doigt une difficulté majeure du problème des interfaces offrant une résistance au plissement.

5 Modélisation numérique

Sur le plan numérique on peut résoudre directement les équations obtenues en considérant par exemple des volumes fluides partiellement occupés par chaque phase et à raccorder les éléments de surface afin de construire à tout instant l'interface solution. D'autres méthodes consistent à considérer des couches interfaciales, quitte à les reconstituer artificiellement à partir de la description bidimensionnelle.

Parmi les méthodes utilisées en solidification et consistant à considérer une couche interfaciale, on trouve

- aux échelles les plus grandes : la « méthode enthalpique » (Benielli et al. El Ganaoui ; Guérin et al.), la « méthode de la zone pâteuse » (Goyeau B., Benihaddadene T., Gobin D. & Quintard M. 1999, Metall. Mat. Trans., 30B, 613)
- aux échelles plus petites, la « méthode du champ de phase » (Figure 4)¹⁹.

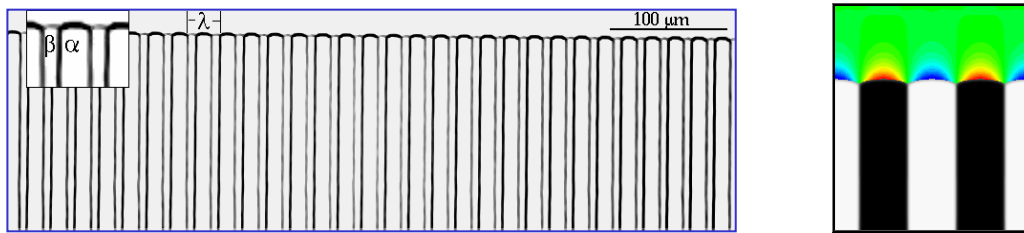


Figure 4 : Simulation 2D par champ de phase. A gauche : expérience de croissance eutectique (S. Akamatsu, G. Faivre, 2000. Phys. Rev. E, 61, 3357). A droite: Simulation par la « méthode du champ de phase » (R. Folch, M. Plapp, 2001)

Dans cette dernière méthode appliquée à un eutectique binaire comportant des impuretés, on introduit un champ de phase $\phi(x, z, t)$ qui permet de distinguer entre liquide et solide, c'est-à-dire un champ scalaire qui a une valeur fixe dans chaque phase et varie de façon continue à la traversée de la zone interfaciale diffuse. Les auteurs partent d'une fonctionnelle d'énergie libre de Helmholtz adimensionnée et déduisent, avec des approximations appropriées, par minimisation, trois équations locales entre trois variables, valables partout :

$$\tau \frac{\partial \phi}{\partial t} = W_\phi \nabla^2 \phi + \frac{\phi}{2} - \frac{\phi^3}{2} + h'(\phi) (f_{liq} - f_{sol}), \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot \left[M \left(\frac{\partial^2 f_{liq}}{\partial u^2} \nabla u + W_u^2 \nabla (\nabla^2 u) \right) \right], \quad (11)$$

$$\frac{\partial \tilde{C}}{\partial t} = \nabla \cdot \left(\tilde{M} \frac{\partial^2 f_{liq}}{\partial \tilde{C}^2} \nabla \tilde{C} \right).$$

C_E , C_α et C_β étant les compositions du liquide et des deux phases solides dans l'eutectique binaire pur à la température eutectique T_E , la concentration réduite u est définie par :

$$u(x, z, t) = \frac{C(x, z, t) - C_E}{(C_\beta - C_\alpha)/2}, \quad \tilde{C}(x, z, t) \text{ est la concentration en impuretés, } h(\phi) = \frac{3}{2} \left(\phi - \frac{\phi^3}{3} \right) \text{ est une}$$

fonction d'interpolation, $f_{sol}(u, \tilde{C}, T)$, $f_{liq}(u, \tilde{C}, T)$ sont respectivement les énergies libres du solide et du liquide, W_u , W_ϕ sont respectivement les épaisseurs caractéristiques des interfaces solide – solide et solide – liquide. $M(\phi, u, \tilde{C})$, $\tilde{M}(\phi, u, \tilde{C})$, sont respectivement les fonctions mobilité des composants eutectiques et de l'eutectique ternaire.

Ces équations sont résolues numériquement. La méthode a été appliquée également, avec succès, aux cas tridimensionnels (Plapp, M., Dejmek, M. 2004, *Europhysics Lett.* **65**, 2 p. 276-282). Cependant, la convection

est généralement absente de cette formulation, réservée aux changements de phase sans changement importants de masse volumique.

6 Conclusion

Avec ce survol des modélisations d'interface, nous avons voulu attirer l'attention sur la multiplicité des situations qui se présentent au mécanicien des fluides (nous n'avons pas traité des interfaces solide - solide) et au physicien au travers de quelques exemples. Puis nous avons relevé quelques difficultés dans le traitement analytique des équations dans le cadre de la dualité d'échelles « couche interfaciale/interface », sans entrer dans le détail mais en nous référant à plusieurs auteurs. Enfin, sur le plan de l'analyse numérique, nous n'avons qu'évoqué les méthodes et esquissé celle du champ de phase au travers de l'application à la croissance des eutectiques lamellaires.

References

- [1] Kojima M., Hinch E. J., Acrivos A., 1984, "The formation and expansion of a toroidal drop moving in a viscous fluid", *Phys. Fluids*, 27 (1), pp. 19-32.
- [2] Jomaas, G., Law, C. K., Bechtold, J.K.: On transition to cellularity in expanding spherical flames, *J. Fluid Mech.*, 583, 1-26 (2007).
- [3] Gatignol, R., Prud'homme, R.: Mechanical and thermodynamical modelling of fluid interfaces - Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences, 58, World Scientific, Singapore (2001).
- [4] Casal, P. (1972): La théorie du second gradient et la capillarité, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **274**, Série A, 1571-1574.
- [5] Slattery, J.C.: Interfacial transport phenomena, Springer-Verlag, Berlin (1990).
- [6] Scriven, L.E. Sternling, C.V.: On cellular convection driven by surface tension gradients: effects of mean surface tension and surface viscosity, *Chem. Engng. Mech.*, 19, 321-340 (1964).
- [7] Pearson, J.R.A.: On convection cells induced by surface tension, *J. Fluid Mech.*, 4, 489-500 (1958).
- [8] Ytrehus, T., Østmo, S.: Kinetic theory approach to interphase processes, *Int. J. of Multiphase flow*, 22, n1, 133-155 (1996).
- [9] Marek, R., Straub, J.: Analysis of the evaporation coefficient and the condensation coefficient of water, *Int. J. of Heat and Mass Transfer*, 44, 39-53 (2001).
- [10] Nicodin I., Gatignol R.: Unsteady half-space evaporation and condensation problems on the basis of the discrete kinetic theory, *Physics of Fluids*, 18, 127101-127111 (2006).
- [11] Bond, M., Struchtrup, H.: Mean evaporation and condensation coefficients based on energy dependent condensation probability, *Physical Review E* 70, 061605 (2004).
- [12] Clavin, P., Joulin, G.: Premixed flames in large and high intensity turbulent flow, *Le J. de Phys. Lett.*, 44: 1 (1983).
- [13] Libby, P.A., Williams, F. A.: Turbulent reacting flows, Springer-Verlag, New York (1980).
- [14] Candel, S., Veynante, D., Lacas, F., Maistret, E., Darabiha, N.: Coherent flame model: applications and recent extensions. In: Larroturou (ed), Advances in combustion modeling, World Scientific, Singapour (1990).
- [15] Poinso, Th., Veynante, D.: Theoretical and numerical combustion, Second Edition, Edwards (2005).
- [16] Peters, N.: Turbulent Combustion, Cambridge Monographs on Mechanics, Cambridge University Press (2000).
- [17] Trouvé, A., Poinso, Th.: The evolution equation for the flame surface density in turbulent premixed combustion, *J. Fluid Mech.*, **278**, 1-31 (1994).
- [18] Prud'homme, R.: Flows of reactive fluids, Springer FMIA Series with the cooperation of Springer-Birkhäuser, to be published (2009).
- [19] Plapp, M. & Karma, A. Eutectic colony formation: A stability analysis, *Physical Review E (Statistical Physics, Plasmas, Fluids, and Related Interdisciplinary Topics)*, **60**, 6865-6889 (1999).