



**HAL**  
open science

## Quelques remarques sur l'enseignement des mathématiques et ses conditions d'efficacité

Alain Jacques Mercier

► **To cite this version:**

Alain Jacques Mercier. Quelques remarques sur l'enseignement des mathématiques et ses conditions d'efficacité. Conférence Nationale sur l'Enseignement des Mathématiques, Mar 2012, Lyon, France. hal-01997200

**HAL Id: hal-01997200**

**<https://hal.science/hal-01997200>**

Submitted on 28 Jan 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Quelques remarques sur l'enseignement des mathématiques et ses conditions d'efficacité

*Alain Mercier*

**Remarque 1. L'efficacité des systèmes d'enseignement modernes les a rendus universels**, ils sont donc devenus la norme pour tous les savoirs techniques et technologiques, et dans toutes les cultures qui transmettent de tels savoirs.

## Principe 1

*L'efficacité d'un système d'enseignement moderne est liée à une rationalisation de l'enseignement des savoirs*

Nous en décrivons ci-dessous les caractéristiques principales, elles font dire que l'école moderne est « bureaucratique ».

**Remarque 2. Les mathématiques sont un domaine de savoirs hautement techniques**, qui ne peuvent être appris par l'ensemble d'une classe d'âge que par un effort important d'instruction supposant une école et un enseignement explicite. C'est déjà vrai pour les premiers nombres entiers, comme l'a dit Stanislas Dehaene. C'est sans doute pourquoi leur nom signifie à l'origine « ce qui est enseigné » (MATHEMA).

Le succès des écoles modernes vient de leur efficacité. Inventées il y a quatre siècles pour enseigner les sciences, qui sont à leur origine les savoirs mathématisés, les écoles s'imposent aujourd'hui partout et pour tous les savoirs. Leur efficacité tient aux principes 1 à 4.

## Principe 2

*Le professeur enseigne à un collectif qui étudie en groupe*

Ainsi les membres du collectif peuvent partager leurs ignorances comme leurs connaissances, interpréter les actes des autres élèves comme des effets de ces ignorances ou connaissances, s'assurer de ce que leur rapport aux choses et leurs actions sont interprétables, éprouver le pouvoir d'agir que la connaissance partagée donne, et ainsi transformer une partie de leurs connaissances en techniques reconnues dont ils peuvent décider a priori de l'emploi pertinent.

## Principe 3

*Le professeur commence par le commencement*

Cependant il n'y a pas de commencement naturel. C'est l'épistémologie partagée par les possesseurs du savoir et les futurs professeurs qui le détermine. Tout commencement n'est qu'un des commencements possibles, comme le montrent les exposés de Mariolina Bartolini-Bussi (on peut étudier tous ensemble les problèmes d'addition et de soustraction impliquant les nombres 5, 1 et 6), de Joël Briand (on doit régler la question de l'énumération des objets pour pouvoir les dénombrer) ou de Maggy Schneider (les premiers objets du travail algébrique peuvent être les équations à une inconnue ou les variables d'une formule) et de Denise Grenier (la démonstration peut être engagée tout de suite, sans qu'il soit nécessaire d'entrer dans une pratique des figures géométriques qui en soit le support). On voit ainsi que

le professeur de philosophie de Monsieur Jourdain commence à lui apprendre à lire en lui apprenant les sons, portés par les lettres : les voyelles en premier, dans une leçon de phonétique, tandis que nous apprenons d'abord aux petits enfants à écrire leur nom, bien avant qu'ils sachent lire. Ces phénomènes relèvent de ce qu'on appelle la transposition didactique.

#### Principe 4

*Le professeur organise une progression telle que, (selon lui) rien ne soit demandé aux élèves qui n'ait pas été enseigné*

C'est ce qui le rend légitime à poser aux élèves des questions qu'ils ne savent pas traiter : il peut les renvoyer à leur manière d'étudier ce qu'il leur avait dit ; mais la progression réelle n'est pas la progression déclarée, car les chemins du progrès des apprentissages doivent être étudiés du point de vue d'un élève (le curriculum réel), comme le rappellent Michèle Artigue (dans les cas du calcul et des systèmes de nombres) et Alain Mercier (dans le cas des savoirs de la proportionnalité, des fractions, des décimaux, des produits du type «  $0 \times 4$  » et de leur rencontre à l'occasion de la décomposition des écritures décimales en polynômes).

**Remarque 3. Les systèmes d'enseignement bureaucratiques sont si efficaces qu'ils ont conduit à penser qu'on pouvait enseigner tout savoir à tous les enfants d'une classe d'âge,** et que s'ils échouent dans quelques cas, aujourd'hui, on les déclare « en échec ». C'est que l'effort consenti par la société, pour qu'existe une école, est important. Cependant, le gain sur les derniers 30% d'une classe d'âge est plus difficile à obtenir. C'est cela qui nous occupe aujourd'hui, c'est un problème social difficile qui, pensons nous, n'est pas une question d'opinion et doit être traité comme une question à la fois politique (relevant de l'organisation de la société) et technique (relevant de notre connaissance du fonctionnement des systèmes d'enseignement bureaucratiques et de la possibilité d'en imaginer de plus performants). L'intervention de Yves Chevallard porte en grande partie sur cette question.

#### Principe 5

*Les manières d'organiser l'étude déterminent les types de savoir qu'il est possible d'apprendre*

Ainsi, en apprenant **en chœur**, on apprend à **restituer collectivement** un texte (un chant), et tel quel ce savoir n'a pas d'autre usage: c'est donc pertinent pour un texte qui doit être **prononcé** par un collectif.

L'apprentissage **par cœur** signifie qu'**apprendre c'est mémoriser** et donc pouvoir restituer (personnellement, ce qui change l'exercice d'évaluation). On observe que certains enfants de maternelle se satisfont de répondre en chœur, pour éviter d'avoir à apprendre eux-mêmes, et savoir par cœur. Cette liberté qui leur est donnée est spécifique de la maternelle et de l'idée que les apprentissages relèvent du développement naturel de l'enfant. Certaines déclarations de Stanislas Dehaene donnent à penser que ce n'est peut-être pas si exact.

**L'exercice** permet d'éprouver l'efficacité d'une technique en exécutant des tâches partielles, relevant en principe de la tâche visée. Cela signifie que la tâche visée peut être ainsi décomposée en éléments qui ont du sens, et cela ne va pas plus de soi dans les écoles de football que dans les conservatoires ou les écoles. La question récurrente sur les automatismes à acquérir et le fait que la manière dont ils sont traditionnellement enseignés par l'exercice formel fait perdre le sens des questions qu'en principe ils devraient permettre de traiter relève de ce problème de transposition didactique.

**Le jeu** permet l'exercice libre des facultés, soit dans un environnement libre et il accompagne alors le développement, soit dans un environnement socialement organisé et il accompagne alors une acculturation. L'intérêt pour les jeux dont Denise Grenier nous a montré l'usage possible tient sans doute à cela, que l'enjeu d'un jeu mathématique comme ceux qu'elle propose aux élèves est proche: gagner c'est trouver quelque chose à faire, et c'est cela qui est appris, chacun peut voir que tous imaginent quelque chose à faire et peuvent même s'emparer des idées d'un autre...

**Les situations didactiques d'action** sont des jeux en classe qui ont donc pour but l'enseignement. Elles doivent donc pouvoir permettre l'évolution raisonnée des stratégies gagnantes. Gérer cela est le travail d'un professeur, qui définit des jeux d'apprentissage, comme les nomme Sensevy. C'est délicat car cela suppose, pour le professeur, d'interpréter en termes de connaissances les actions et stratégies des joueurs, comme l'expliquent Denis Butlen et Pascale Masselot, afin de les faire évoluer en adaptant le jeu ou ses règles. C'est justement cela que Joël Briand montrait, avec les boîtes d'allumettes où mettre une allumette et une seule que, dans un second temps, on colle pour forcer une stratégie d'énumération symbolique au lieu d'une énumération pratique. Cependant...

**L'activité** (qui semble proche du jeu d'apprentissage) ne désigne pourtant pas d'emblée un enjeu d'apprentissage : une activité a normalement une fonction productive (instrumentale) et **enseigner à partir d'une activité suppose que l'enjeu soit désigné comme un au-delà de l'activité**. Cela signifie que le collier à réaliser pour la fête des mères ne donne lieu à apprentissage que pour l'élève qui y trouve l'occasion d'exercer son habileté manuelle (enfiler le fil sur l'aiguille, enfiler une petite perle sur le fil) ou esthétique (créer une séquence de perles de couleurs ou de tailles variées): **tout dépendra donc de la manière dont le professeur définit l'enjeu de l'activité et en fait dévolution aux élèves... puis de la manière dont il signale ce qui a été appris à cette occasion.** Nous retrouvons là encore ce que disaient Denis Butlen et Pascale Masselot sur la difficulté de l'institutionnalisation. L'étude des types d'activités et de la manière dont leurs enjeux peuvent être définis montre les aléas de cette stratégie d'enseignement et le rapport Durpaire soulignait cela, récemment. Pour le comprendre mieux il suffit de comparer l'activité, qui est l'exécution d'une tâche, à l'action en situation didactique, dont l'enjeu n'est pas la tâche à réussir mais la production des stratégies de réussite.

## Principe 6

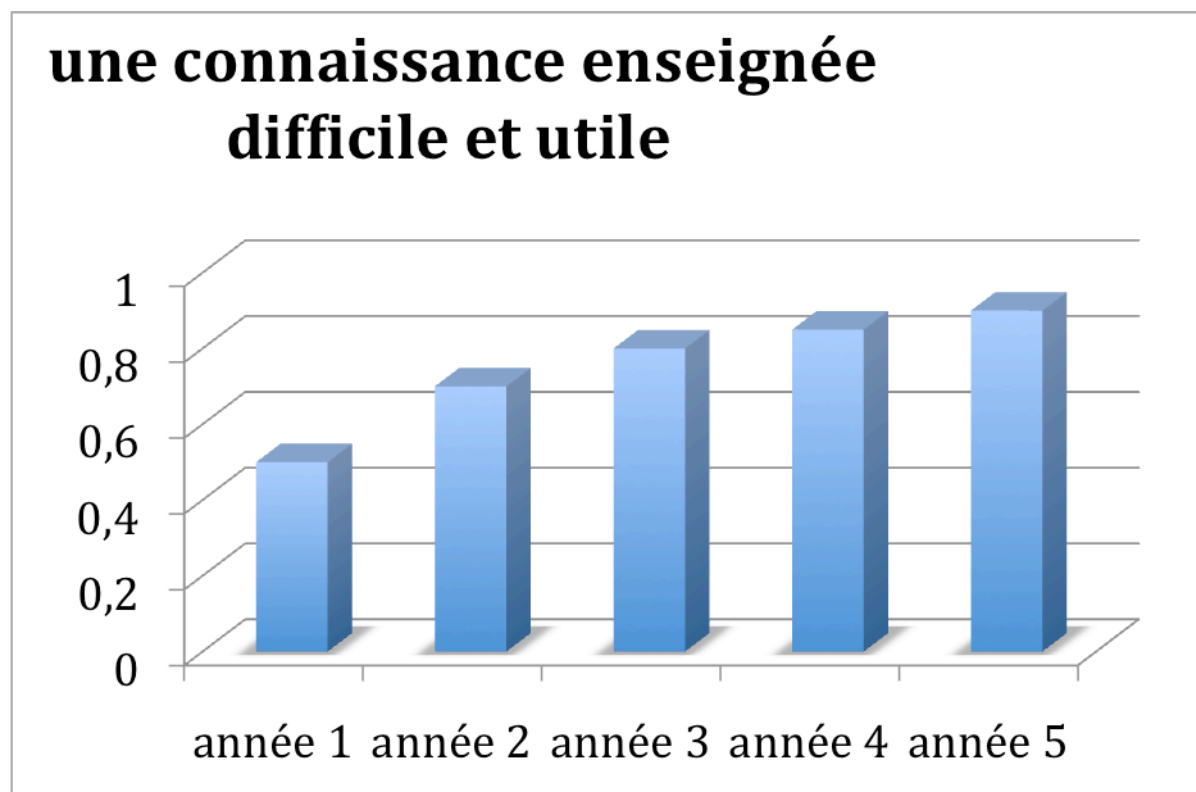
### *Ce qui s'enseigne détermine ce qui peut être appris*

Comment, et dans quelle mesure? C'est ce que nous allons dire en quelques mots. Mais cela signifie déjà que ce qui a été appris est en rapport à ce qui est enseigné, et que l'observation des apprentissages donne une information sur les enseignements, ce que je vais démontrer en m'appuyant sur des travaux existants parfois anciens, dont les résultats n'ont pas toujours été interprétés pour ce qu'ils permettaient de comprendre. Cette ligne montre un usage des évaluations qui souvent n'est pas bien compris des professeurs ou de ceux qui se situent en position de professeur pour les construire et en interpréter les résultats.

Déjà si nous prenons cette assertion dans sa forme la plus grossière nous pensons au temps passé en classe de mathématiques comme à un temps d'exposition à ce savoir et aux objets de cette œuvre. Nous obtenons déjà un observable rarement identifié en didactique française, comme si on en craignait les résultats. En Suisse, dans les années 1980, Jean François Perret a mené une enquête sur le temps passé à enseigner les mathématiques, dans les classes de dernière année primaire: le résultat va du simple au double... Qu'en est-il en France?

**L'instruction obligatoire (socle commun) suppose de 10 à 13 ans de scolarité**, selon que les enfants fréquentent ou non la maternelle ; l'année dure en principe 36 semaines mais très souvent l'année d'enseignement explicite est réduite à 33 semaines (départ prématuré en congés, classes de nature, activités périscolaires durant le temps scolaire, absence du professeur, fêtes familiales ou religieuses, maladie, etc.) ; la semaine est maintenant de quatre jours ouvrables et le nombre de séquences effectives de mathématiques varie de 3 à 5 selon l'organisation de l'école, la durée des pauses, le temps passé en remédiation, aide individuelle, etc. Le temps d'enseignement des mathématiques élémentaires pour le citoyen, et d'enseignement d'un outillage mathématique spécialisé du travailleur le moins qualifié est donc évaluable : pour la France et dans les trente dernières années (maternelle, scolarité à 16 ans, et « pas de fin de scolarité sans un métier »), suivant la manière dont on l'évalue et dont on compte en heures le résultat oscille **entre  $10 \times 33 \times 3 = 990$  heures** (sans doute proche de la réalité actuelle dans certaines zones) **et  $13 \times 36 \times 5 = 2340$  heures** (proche de ce que l'on a vu dans les années glorieuses et du maximum aujourd'hui possible dans le cas le plus favorable). Donc et très officiellement plus du simple au double selon les parcours et la manière dont la famille scolarise l'enfant, dont l'établissement qui le reçoit organise les choses, et dont l'attention aux mathématiques est éveillée. Quelle est la variation réelle? Nous pourrions demander à la DEPP de regarder si ce genre de corrélations ne peut pas être fait: le temps d'enseignement doit déterminer quelque chose des apprentissages observables... sans doute on ne peut le raccourcir impunément et Pierre Arnoux par exemple montre une corrélation forte entre le temps d'enseignement des mathématiques et des sciences en première et terminale scientifique et la proportion des élèves qui se sont orientés vers des études scientifiques, trois ans plus tard.

**Le calcul sur les fractions dans les pays anglo-saxons (années 1970)**



On peut alors se servir de l'observation la progression d'un savoir dans un groupe qui apprend, telle qu'on l'observe **dans une cohorte en posant la même question durant longtemps, contrairement à ce que ferait un professeur qui pose une question pour savoir**

si suffisamment d'élèves ont appris pour qu'il puisse poursuivre la progression. Savoir si tel élève a appris n'est donc pas le plus intéressant, comme on va le voir: mieux vaut regarder si un groupe apprend: plus nombreux, mieux répartis dans le groupe sont ceux qui savent, mieux le savoir sera partagé. Jusqu'aujourd'hui et sauf dans les évaluations APMEP réalisées sous l'impulsion de Antoine Bodin, nous utilisons les évaluations comme les photographies d'un état, mais pas comme les comptes rendus d'une progression collective...

- pour comprendre **comment ce savoir est enseigné**: explicitement ou implicitement, fondé en théorie ou par l'usage, etc.

- pour comprendre **comment enseigner un programme** (quand on est professeur), organiser ou réformer un curriculum (quand on est décideur) avec plus d'efficacité. Par exemple ici, la courbe statistique du nombre d'enseignés qui ont appris est croissante, avec un pourcentage d'élèves constant qui chaque année ne savent pas encore mais apprennent.

### **Principe**

**3**

*Ce qui s'enseigne n'est pas ce que le programme d'enseignement officiel décrit*

On sait que **personne ne peut décrire tout le savoir nécessaire à un travail** mathématique (ou autre). **Les règles permettant de suivre les règles forment un ensemble qu'on ne peut décrire entièrement**, écrivait le philosophe Ludwig Wittgenstein. **Du coup, la disparition de certaines de ces règles peut passer inaperçue alors qu'elles sont indispensables.** L'idée que l'on peut tout naturellement et sans étude sérieuse donner les prérequis d'une question est donc fort naïve.

La disparition de règles indispensables s'est produite au collège il y a vingt ans, quand l'arithmétique élémentaire a été la victime d'une simplification hasardeuse du programme. Il a fallu la réintroduire pourtant, car c'est une des conditions de vie des calculs sur les fractions.

Ce type de phénomènes est si fréquent que plusieurs interventions d'aujourd'hui nous l'ont montré: Christine Chambris en montrant que la disparition des pratiques du système métrique est passée inaperçue alors qu'elle est aujourd'hui indispensable à l'enseignement de la numération décimale.

Mais aussi Denise Grenier montre que les techniques utiles à la démonstration ne sont pas enseignées (par exemple, qu'il faut définir un objet pour en parler précisément, ou par exemple, qu'il faut circonscrire un problème aux cas que l'on sait traiter avant de l'attaquer dans sa généralité).

Et encore Joël Briand, montre que les professeurs doivent identifier les difficultés que rencontrent les élèves, et que pour les choses les plus simples c'est encore plus difficile à faire car ces difficultés relèvent de règles qui nous sont naturelles.

Et chacun sait que **le programme décrit des savoirs qui ne sont pas enseignés.** Une étude déjà ancienne (Rajosohn, 1988) avait montré que des savoirs dont ni les professeurs ni les élèves n'imaginent ou n'éprouvent l'utilité actuelle ou future ne sont pas enseignés même s'ils figurent dans les textes officiels... Ainsi, parce que les pratiques sociales du mesurage des longueurs, surfaces, capacités, temps, sont devenues invisibles et que le système métrique

lui-même perd sa réalité, c'est donc le cas actuel du système métrique, comme le montre l'intervention de Christine Chambris.

## **Principe**

4

*Ce qui n'est pas enseigné ne peut être connu que par son usage*

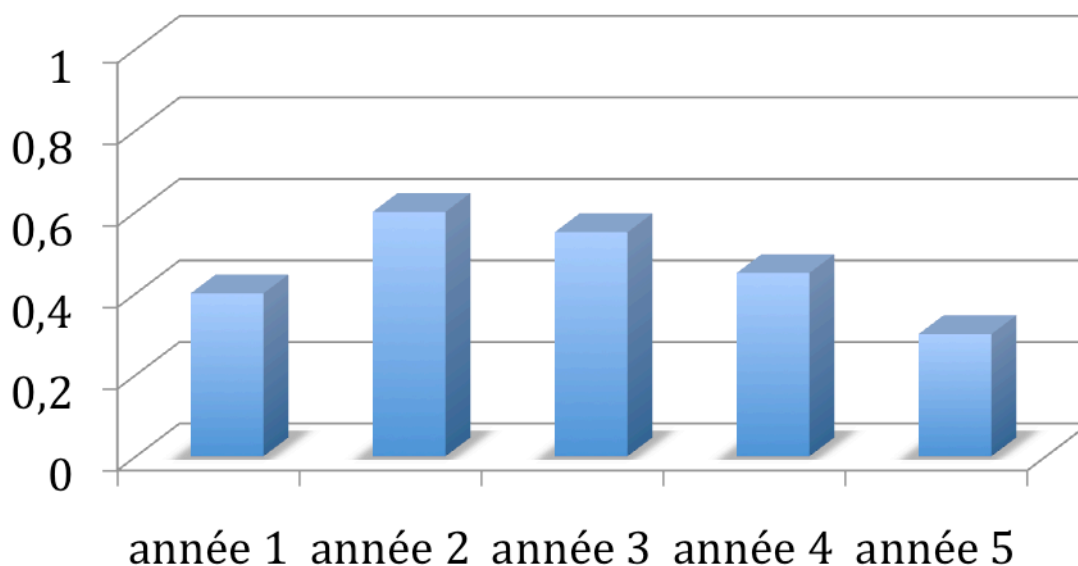
Mais surtout, « **Les savoirs qui ne sont pas enseignés et qui ne produisent que rarement des erreurs ne sont jamais appris** »... **car personne ne s'aperçoit du problème avant que leur usage soit incontournable.** C'est par exemple le cas étonnant du produit  $0 \times n$  qui est l'occasion de nombreuses erreurs tandis que  $n \times 0$  est bien réussi.

Les calculs  $0 \times n$  sont rarissimes, ils produisent une erreur sur un savoir qui n'est jamais l'enjeu actuel de l'enseignement: les élèves qui les rencontrent pensent, comme leurs professeurs, qu'il s'agit d'une étourderie...

Imaginer les conditions favorables pour donner aux élèves une occasion d'apprendre que  $0 \times n = 0$  suppose un travail collectif difficile et une grande stabilité du curriculum. Nous les avons observées avec Denise Pascal il y a longtemps: un professeur faisait écrire les décompositions décimales systématiques de grands nombres choisis au hasard comme  $5037 = 5 \times 1000 + 0 \times 100 + 3 \times 10 + 7 \times 1$  (5 mille, trois dix et 7 unités) et des années plus tard ses élèves réussissaient statistiquement mieux les calculs où figuraient les résultats de  $0 \times n$  que ceux dont les professeurs se contentaient de  $5307 = 5 \times 1000 + 3 \times 10 + 7$  (5 mille, trois dix et 7) et qui n'écrivaient jamais, même indirectement, que 0 c'est  $0 \times 100$ ...

**Les calculs sur les décimaux dans les pays anglo-saxons (années 1970)**

## une connaissance enseignée peu utile



On sait aussi que **les professeurs enseignent des savoirs hors programme**, parce que ce sont justement des règles qui leur manquent et auxquelles ils veulent faire appel. Et chacun sait que **le programme décrit des savoirs qui ne sont pas enseignés**. Ainsi, parce que les pratiques sociales du mesurage des longueurs, surfaces, capacités, temps, sont devenues invisibles et que le système métrique lui-même perd sa réalité, c'est le cas actuel du système métrique, comme le montre l'intervention de Christine Chambris.

**Ce qui n'est plus enseigné et qui n'est pas utilisé est de moins en moins connu, c'est une observation qui correspond au principe précédent.**

C'est la surprise de l'étude de Hart et al., en 1979 : les performances des élèves anglais sur les décimaux baissent régulièrement. Il fallut en conclure, contrairement à ce qu'on pensait à l'époque, que les élèves savent, sur les décimaux, **des usages techniques** (ce qu'on appelle des savoirs sociaux) et que ces savoirs ne relèvent pas **du développement cognitif** (des schèmes d'action universels).

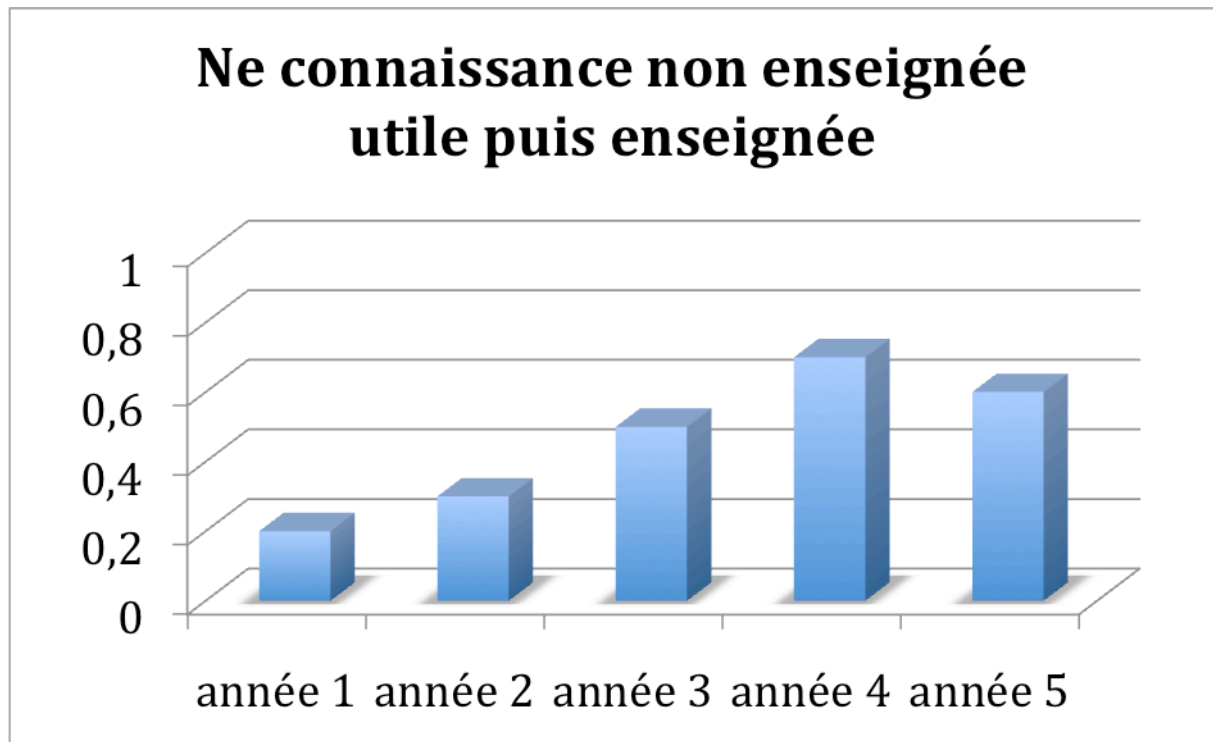
Or, on peut oublier un usage technique s'il est d'une grande technicité et inutile. Pour mieux comprendre, pensons à la connaissance « monter à bicyclette ». Cela ne s'oublie pas dit-on. C'est sans doute que les schèmes moteurs mobilisés sont simples (monter à vélo s'apprend en une journée, dès que l'on expérimente comment l'équilibre se rattrape).

1) Non seulement **ce qui n'est pas enseigné n'est pas appris** (sauf si cela sert), mais **ce qui n'est plus enseigné est oublié** (surtout si cela ne sert pas).



2) Mais ces affirmations ont une autre forme: **tout ce qui est connu peut servir**, et quelques uns apprennent tout ce qui peut servir.

**Le “raisonnement proportionnel” pour déterminer la hauteur d’un grand arbre sachant le petit, en France (années 1990)**



**Mais ces affirmations ont une autre forme: tout ce qui est connu peut servir, et quelques élèves apprennent tout ce qui peut servir.**

C’est une surprise telle que le résultat n’est pas rendu public, dans les années 1990, quand il sort. Mais Antoine Bodin le remarque et Yves Matheron l’étudie en 1995 : les élèves français sont les meilleurs du monde sur le théorème de Thalès... un an avant qu’on leur enseigne !!! Pourquoi?

Le schéma des deux sapins sert dès les classes élémentaires à illustrer, dans de nombreux ouvrages à destination des élèves, un cas de raisonnement proportionnel. Il introduit même de très nombreux chapitres sur la question: c’est chez nous un emblème de la proportionnalité.

Les élèves de 4e en France réussissent très bien l’exercice posé parce que cela fait cinq ans qu’on leur parle de proportionnalité à l’aide du schéma des deux sapins. Alors quand on leur demande la tialle du grand sapin connaissant le petit, ils pensent « proportion ».

Matheron vérifie que les résultats diminuent lorsque le théorème est enseigné: car il vient alors une incertitude due à l’hypothèse du parallélisme nécessaire des deux sapins.

Il montre enfin que les élèves de 4e mobilisent un raisonnement proportionnel même si les deux sapins ne sont pas parallèles: leur calcul est automatique, c’est ce qui fait leur performance!

*Un savoir qui n'est pas enseigné peut être connu par son usage, mais qui l'utilise ne sait pas ce qu'il connaît*

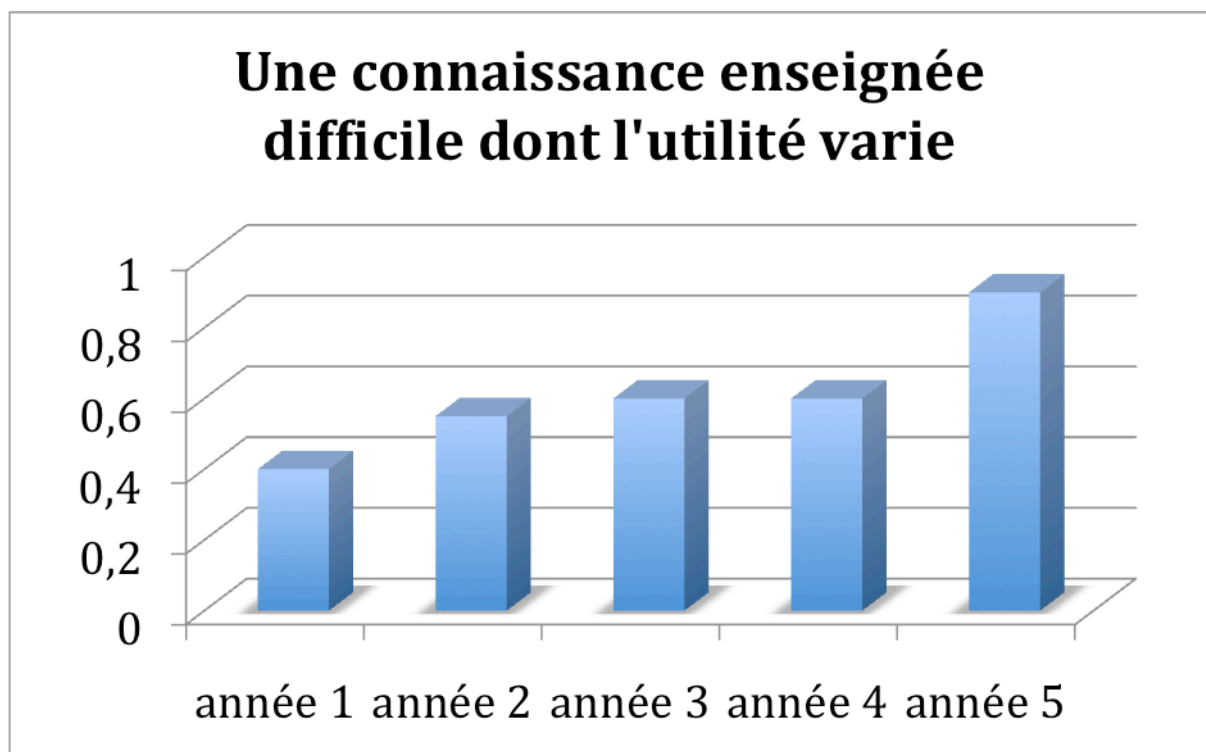
Ceux qui ont appris par l'usage le disent: **Y'a qu'à FAIRE, y'a rien à SAVOIR...**

Effectivement savoir, c'est **POUVOIR FAIRE MAIS** c'est aussi **POUVOIR JUGER DE LA PERTINENCE DE L'ACTION** et donc, savoir ce qu'il faut faire, **raisonner**, comme l'ont bien dit Denis Butlen et Pascale Masselot.'

On sait aussi que **les professeurs enseignent des savoirs hors programme**, parce que ces savoirs fondent des règles auxquelles ils veulent faire appel et montrer aux élèves qu'ils devraient les connaître, puisque leur professeur les leur a enseignées...

Et chacun sait que **le programme décrit des savoirs qui ne sont pas enseignés**. Une étude déjà ancienne (Rajosohn, 1988) avait montré que des savoirs dont ni les professeurs ni les élèves n'imaginent ou n'éprouvent l'utilité actuelle ou future ne sont pas enseignés même s'ils figurent dans les textes officiels... Ainsi, parce que les pratiques sociales du mesurage des longueurs, surfaces, capacités, temps, sont devenues invisibles et que le système métrique lui-même perd sa réalité, c'est donc le cas actuel du système métrique, comme le montre l'intervention de Christine Chambris.

**Le calcul d'une quatrième proportionnelle en France (années 1990)**



Un exemple, **le raisonnement proportionnel et les calculs d'une quatrième proportionnelle...**

La technique enseignée en CM2 (tableau à compléter) n'est pas suivie en 6e (produit en croix),

la progression est donc faible: c'est presque comme un nouvel enseignement;

la question est peu présente en 5e, les résultats sont stables;

mais en Troisième, non seulement la proportionnalité est utilisée dans le travail du théorème de Thalès, mais elle trouve une nouvelle théorisation et des techniques renouvelées avec le travail sur les fonctions linéaires: cela se vit avec un progrès important.

**Un professeur efficace enseigne des savoirs qui ont de l'avenir.**

**Un professeur efficace met en place par la pratique des manières de faire et de dire qui permettent de comprendre, ensuite, ce que l'on fait avec le modèle mathématique.**

**Un professeur efficace enseigne des savoirs qui ont de l'avenir, et il le fait sentir jusque dans le moment où il les introduit dans l'espace de la classe de mathématiques: le calcul Artigue.**

Le mouvement de modélisation et le jeu entre *système étudié* et *modèle pour l'étude* est pertinent lorsque **le travail dans le modèle** (par exemple, «  $6-1=5$ ;  $5+1=6$ ;  $6-5=1$  » sont les trois formes du modèle) **prend sens de ce qu'il est parlé avec les mots du système étudié, ce qui permet de contrôler la pertinence du calcul proposé** (par exemple, « dans la classe il y a 6 personnes dont un professeur, soient 5 élèves »; « dans la classe il y a 5 élèves et 1 professeur soient 6 personnes »; « Dans la classe il y a 6 personnes et les 5 élèves vont sortir, il restera 1 professeur »).

Mariolina Bartolini-Bussi a montré que... La manière dont procède l'enseignement traditionnel des mathématiques, en Chine, semble bien satisfaire à cette condition que nous avons identifiée par d'autres voies... Ou presque, ne soyons pas enthousiastes mal à propos, car les **manières de dire** que produit la variation du problème **ne rendent pas compte** d'une situation pratique et peuvent être très abstraites...

## OUVRIER BUFFET

- la question des problèmes et de la formation ou plutôt l'éducation à une culture des mathématiques et à une pratique des mathématiques ; je redoute fortement la constitution d'une "banque de problèmes" évoquée brièvement par JM.Blanquer tout à l'heure (banque qui semble-t-il, si j'ai bien compris, est en cours d'élaboration). On retombe dans une illusion de "pack prêt à l'emploi" qui va à l'encontre, à mon avis, de la pratique des maths, y compris pour la constitution, chez les élèves et les enseignants, d'une culture commune des démarches mathématiques. Cette dernière serait d'ailleurs à définir, pour les instituteurs qui revendiquent la polyvalence (à ce sujet, les études que j'ai pu lire sur la polyvalence des enseignants et la place des maths dans la gestion de cette polyvalence sont superficielles et mériteraient d'être

creusées au niveau didactique, notamment dans une perspective transdisciplinaire). Donc une vigilance épistémologique et didactique à l'encontre de tels problèmes à mettre en avant, de même (mais dans une autre mesure) que la prise en compte d'activités péri- ou extra-scolaires ou scolaires telles les rallyes et autres compétitions (la perspective internationale est recensée et analysée dans une étude ICMI "Challenging math in and beyond the classroom", elle pourrait servir de point d'appui à la réflexion).

Petite parenthèse : se développent aujourd'hui beaucoup de réflexions (assez peu organisées à ce jour, il me semble, dans différents IREM) autour de la démarche d'investigation en mathématiques, il y aura là une attention toute particulière à porter car 1) la démarche d'investigation est fortement connotée en sciences et à des fondements épistémologiques différents de la démarche de recherche (ou démarche expérimentale) en maths et 2) quid de la caractérisation de la démarche expérimentale en maths et cela rejoint la question des labos de maths (évoquée par Mariolina mais aussi assez largement par Kahane) qu'il serait nécessaire de développer et de favoriser, peut-être à l'occasion des maisons des sciences, si les maths peuvent y avoir une place privilégiée.

- je ne suis pas sûre que le message sur les algorithmes de calcul soit complètement passé, il serait intéressant d'avoir un retour à ce sujet du "public". Et dans le prolongement la place de l'algorithmique dans le secondaire, en mathématiques d'une part, et en informatique d'autre part, serait alors à considérer. D'ailleurs, l'algorithmique (en maths) est un lieu possible propédeutique pour la démonstration (afin d'éviter de retomber toujours dans la géométrie).

- je rajoute un dernier point : la géométrie et la place de la manipulation (matérielle et TICE) dans les apprentissages géométriques. On "sait" que celle-ci n'est pas réalisée sur un temps scolaire suffisamment long et que les représentations prennent le pas "trop" vite, une refonte / précision des curricula à ce sujet serait à engager, assez rapidement il me semble et permettrait d'aborder le primaire et le secondaire, voire le supérieur (en particulier si on revient sur l'aspect preuve, en explorant des changements de cadres, en particulier dans différentes géométries, dont la géométrie discrète).

Je suis trop longue.

Merci encore à vous pour tout ce travail, la conférence "rendait" bien aujourd'hui, et nous le devons à vos qualités d'organisation scientifique, le choix des intervenants et du thème se tenaient vraiment et donnaient une unité à la journée.

*Il est toujours aussi difficile de répondre à la question : comment améliorer l'enseignement des mathématiques ?*

*Les mathématiques "élémentaires" sont des mathématiques profondes : leur enseignement nécessite, pour les professeurs qui l'organisent, un ensemble complexe de connaissances mathématiques épistémologiques et didactiques intriquées.*

*Les recherches sont nombreuses et des pistes de solution existent mais leur diffusion ne nous appartient pas. L'organisation des études universitaires et de la formation initiale, de la formation professionnelle et continue, des établissements et du système national d'enseignement, ne nous appartient pas non plus.*

### **Constats communs et idées principales :**

- Le nombre d'élèves en difficulté en mathématiques, en particulier en calcul devient préoccupant. Pour une bonne part des élèves, les nombres ne sont pas « vivants » et chez les adultes, l'« innumérisme » gagne du terrain de façon inquiétante (voir le texte de l'académie de Sciences, 31/01.2012)).

- La qualité de l'enseignement des mathématiques dépend du recrutement, de la formation universitaire des étudiants dans la discipline, du statut, de la formation professionnelle initiale et continue des enseignants : entre autres ils ont à connaître les enjeux mathématiques et didactiques de ce qu'ils enseignent, et qu'ils ont à avoir la meilleure lucidité possible sur l'ensemble du curriculum (ce qui est difficile dans un curriculum organisé en trois niveaux séparés). Dans leur statut ni les professeurs ni leur encadrement n'ont la responsabilité de la réussite (en mathématiques ou ailleurs) de tous les élèves. Un travail d'équipe accru dans les établissements, encadré régulièrement par des formateurs universitaires, est nécessaire afin que les enseignants produisent des moyens d'enseignement partagés et validés collectivement.

- On sait que ce qui n'est pas enseigné, en mathématiques, n'est pas appris : on apprend aussi des mathématiques par l'usage, mais seulement après avoir été enseigné c'est-à-dire après que les savoirs visés aient été présentés et définis. Faute de quoi, on ne peut pas « savoir ce que l'on sait » et ce que l'on sait, ce ne sont pas des mathématiques c'est-à-dire, des techniques démontrées, partagées, transmissibles, qu'il est possible de remettre au travail selon les besoins nouveaux.

- Il y a consensus sur le fait qu'il ne faut pas sous-estimer l'importance des premiers apprentissages, ceux de la maternelle en lien avec les apprentissages sociaux et sur le fait qu'il faut mettre au travail le rapport des élèves aux nombres ; il se dégage aussi un nouveau regard sur l'apprentissage de l'algèbre, au collège. Pour autant les évolutions nécessaires sur ces points ne nécessitent pas un changement des attentes du socle.

- Au sein du CS, il y a une vision partagée sur ce qui est attendu de l'enseignement du calcul, des équilibres à trouver entre automatisation et flexibilité, de l'importance du calcul d'estimation et d'ordres de grandeur, du travail à mener sur les rapports entre grandeurs, nombres et numération.

Le travail systématique du système métrique (compréhension des systèmes d'unités pour une grandeur donnée) est nécessaire parce que l'appropriation de ce que sont les grandeurs (quantité, espace, temps, masse, puis les grandeurs composées aire, volume, vitesse, force, travail) qui suppose le raisonnement sur les ordres de grandeur les mesures, et la numération suppose la pratique des instruments de mesure analogique.

- La question de la familiarité nécessaire des élèves avec les nombres et de la manière de la construire est revenue plusieurs fois au débat. Elle doit occuper une place centrale dans l'enseignement des mathématiques : le système de la numération décimale de position, fonde les techniques de calcul et les algorithmes opératoires, les élèves doivent avoir sur ces questions une maîtrise pratique théorique et technique. Cette maîtrise comprend nécessairement la modélisation des problèmes et leur organisation en types ou classes qui donne accès aux sens des opérations, parce qu'elles permettent de résoudre les problèmes d'un(e) même type ou classe.

Le travail de constitution des classes de problèmes socialement vifs dans les pratiques sociales d'une époque, et qui à ce titre doivent être proposés aux élèves pour qu'ils les étudient, doit être organisé comme une tâche collective de la profession de professeur et d'abord, des équipes de professeurs dans les établissements d'enseignement. Les jeux à mathématiques, les situations de recherche, les questions venues de l'histoire des mathématiques doivent être interrogés dans ce même cadre pour leur capacité à fournir des problèmes permettant d'apprendre des savoirs identifiés et donc, d'enseigner ces savoirs.

C'est ainsi que le curriculum en mathématiques au collège pourra être repensé en continuité et en cohérence avec le curriculum de l'école élémentaire. Car il n'y a pas de priorités nettes dans ce qui est enseigné au collège, en mathématiques. Le socle devrait aider mais il est devenu un point de focalisation du mécontentement des enseignants de collège et dans la formulation du pilier 3, les mathématiques ne se distinguent pas nettement comme un enjeu de la formation scientifique des élèves.

- L'approche spécifique de l'algèbre en France et les alternatives montrées sont éclairantes de ce qu'il est possible de faire évoluer. Le système éducatif institutionnel et la recherche didactique ont enfin établi un lien de coopération, qui devrait conduire à la prise en compte des résultats de la recherche dans l'élaboration des programmes, des ressources, et de la formation et à une meilleure réflexion du traitement des situations dans les classes. Les documents d'accompagnement des programmes devraient témoigner de ce travail conjoint.

- Il y a nécessité d'expliquer et de moduler le rôle réel et la place des évaluations, qui sont utiles aux professeurs et aux élèves quand elles sont faites en classe, aux professeurs et aux parents quand elles font un bilan ponctuel, aux administrateurs du système quand elles sont externes. Mais ce sont des instantanés qui ne permettent ni de savoir les évolutions d'une classe d'âge ni sans autre analyse de faire le

diagnostic des difficultés d'une catégorie d'acteurs (élèves, professeurs, parents, administrateurs, société).

### **From concrete materials to formalisation**

Young children, particularly those under about the age of 11 years, very often experience in school a more practical or applied type of mathematics than their older brothers and sisters. Influenced by the theories of Piaget, teachers in many countries have been advised to base mathematics for young children on the use of concrete materials (manipulatives). Such manipulatives can be put to many uses. They can be used to provide the base from which concepts are developed. For example, to know what is meant by the word 'triangle' one needs to have seen, touched and explored a lot of triangles. Manipulatives can be the essence of a problem, for example real or plastic money being used for shopping. One use of manipulatives which has been advocated over a number of years is the provision of well-structured experiences which lead to the 'discovery' (albeit guided discovery) of a generalisation or rule. This can then become part of the repertoire of the child as he moves into the more abstract or formal type of mathematics commonly assumed and built on in the secondary school. An example of this type of teaching is when the child is working towards the acquisition of the formula for finding the area of a rectangle. The classroom experiences recommended by many texts and teacher trainers include:

- 1) Covering space with various two dimensional shapes in order to be able to quantify how much areas there is.
- 2) Covering rectangles with squares.
- 3) Moving squares around to form differently shaped rectangles.
- 4) Drawing rectangles on squared paper.

These activities are supposed to be enough to prompt the recognition that the area of any rectangle can be found by multiplying the number of units in the length by the number in the width. It is this rule, often written  $A=l \times b$ , which is carried into the secondary school and which is then used whenever the area of a rectangle is sought

The assumption that all secondary-aged have available a 'formal' method of finding the area of a triangle can be shown to be false by the following example from C.S.M.S.

Find the area

a): Triangle quadrillé rectangle isocèle de 4X4, b): triangle non quadrillé rectangle de 3 cmX4cm, selon l'âge des élèves :

12+ 76 % 31 %

13+ 87 % 39 %

14+ 91 % 48 % La deuxième technique (calcul à partir de la formule) n'est manifestement que très peu utilisé bien que en principe elle soit enseignée et exigible.

### **Fig. 3 Area examples CSMS**

The pupils tested were 986 in number and came from different British schools. These two questions were attempted by the same children on the same occasion. The formula for the area of a rectangle would have been taught in their primary school mathematics and most of the children would have met the extension to the area of a triangle in their lessons.

The theory is that the child has a firmer understanding of the rule because s/he has seen from where it came and because the discovery was his/hers, the idea will be retained. This view fits well with the constructivist philosophy. Many children throughout the world have learned (or failed to learn) in a different environment as Dorfler (PME, 1989) says

Mathematics for many students never gets their own activity, it remains something which others have done (who really know how to do it) and devised and which can only be imitated (for instance by the help of automated algorithmic routines at which the student works more like a machine than like a

conscious human being). In other words, mathematics mostly is not part of the personal experience and the reason for this very likely is that the mathematical knowledge of the students was not (or only in an insufficient way) the result of structuring and organising their own experience. 'Guided discovery' seems an attractive alternative, however, there are drawbacks when the ordinary teacher puts theory and interpreted theory into practice in the