

Résolutions approchées d'équations polynomiales :
comment les travaux précurseurs de Hoëné Wronski
ont été perçus par Robert de Montessus au début du
XXème siècle
travail en cours, Janvier 2019

Hervé Le Ferrand*

Institut de Mathématiques de Bourgogne, Université de Bourgogne
Dijon, France

27 janvier 2019

Ces jours-ci j'étudiais les formules de Wronski ; la loi Suprême et ses premières applications m'ont beaucoup intéressé.

Lettre de Pierre Féline à Paul Valéry, 1/9/1892.

1 Introduction

Le mathématicien Robert de Montessus de Ballore (1870-1937) s'est intéressé à l'oeuvre mathématique du mathématicien-philosophe polonais Hoëné Wronski (1778-1853). Dès 1905, Robert de Montessus pointe l'importance de la contribution de Wronski à la résolution approchée d'équations algébriques. Car c'est bien pour ôter toute confusion sur l'interprétation des travaux de Wronski qu'il faut considérer des résolutions approchées et non exactes. On verra pourquoi on peut écarter les conclusions du mémoire de Wronski de 1812 sur les équations algébriques [29] pour se référer à son ouvrage de 1847 [30]. Robert de Montessus voit dans le mémoire de Wronski [30] de 1847 le premier jalon de travaux qui vont être développés à la fin du XIXe siècle par Hadamard avec toute la rigueur mathématique attendue. Après Hadamard viendront notamment les travaux de Aitken dans les années 1920 puis ceux de Rutishauser dans les années 1950 sur l'algorithme QD.

*courriel : leferran@u-bourgogne.fr

En 1935, Robert de Montessus publie dans la *Revue Scientifique*¹ un article intitulé « Wronski, mathématicien ». Dans ce court article, Robert de Montessus décrit l'oeuvre mathématique du singulier personnage² Wronski. Les travaux de Wronski sont d'un accès quelque peu ardu du fait du style lyrique employé par ce scientifique. A cela s'ajoute le tempérament très entier de Wronski qui défendait manifestement fermement ses idées. Wronski est toutefois passé à la postérité en Mathématiques (au moins) pour le *wronskien*³. Comme l'indique Robert de Montessus, les travaux de Wronski ont été étudiés par différents auteurs dès le XIXème siècle et cette étude s'est poursuivie au XXème siècle. Mentionnons notamment comme auteur le mathématicien français Alain Lascoux (1944-2013) et son article [16] sur lequel nous reviendrons.

Dans cet article de l'année 1935, Robert de Montessus indique que Wronski avait dans la première moitié du XIXème donné les bases d'une méthode pour le calcul approché des racines d'un polynôme, méthode qui sera développée de façon rigoureuse à la fin du XIXème siècle, début du XXème siècle, par Jacques Hadamard (1865-1963). Wronski et Hadamard généralisent la méthode classique de Daniel Bernoulli (1700-1782). Robert de Montessus écrit [22] :

Passons aux équations algébriques à coefficients numériques. Une méthode d'approximations successives, fort simple, découverte dès le XVIIIème siècle, permet le calcul d'une racine réelle, quand son module est moindre que les modules des autres racines. Mais la méthode tombe en défaut si l'on a affaire à plusieurs racines ayant le même module, parmi lesquelles se trouve la racine à calculer. Il faut alors modifier la méthode, ce qui a été fait dans le dernier quart du XIXème siècle : Wronski avait fait cette généralisation cinquante ans plus tôt avec ses fonctions aleph (lettre hébraïque aussi), composées, qui sont des fonctions symétriques complètes des racines de l'équation, et cela sans rien connaître du cercle de convergence des séries, notion qui a expliqué plus tard tant de particularités des fonctions analytiques.

De plus près de trente auparavant, en 1907, Robert de Montessus participe à la rédaction de l'édition française du livre d'histoire des mathématiques du mathématicien anglais Walter William Rouse Ball (1850-1925) [27]. Une note sur Wronski, rédigée par Robert de Montessus, apparaît dans le chapitre sur la théorie des fonctions à la page 196 :

1. Quelques dates concernant cette revue (source : sciences.gloubik.info) : en 1863, création de la *Revue des cours scientifiques de la France et de l'étranger*; en 1865 ce journal absorbe *Le Courrier des sciences, de l'industrie et de l'agriculture*; (date de création inconnue : 1862 ?); en 1884, le journal change de titre et devient la *Revue Scientifique*; en 1960 la *Revue Scientifique* devient *Nucleus*; en 1971, *Nucleus* est absorbé par *La Recherche*.

2. L'« énigmatique polonais » tel que le nomme Robert de Montessus.

3. Le wronskien est un déterminant associé à une équation différentielle. Par exemple, si on considère une équation différentielle scalaire ordinaire du second degré à coefficients constants $y'' = ay' + by$, le wronskien de deux solutions $y_1(t)$ et $y_2(t)$ de cette équation est le déterminant $W(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}$.

. *Hoenë Wronski, que nous citons à dessein ici, car il semble avoir été l'un des précurseurs de la science actuelle, naquit à Posen en 1778, et mourut à Neuilly en 1853. Il eut une existence fort agitée, combattant dans les rangs de l'armée polonaise, puis s'engageant au service de la Russie et plus tard à celui de la France.*

Wronski a laissé une oeuvre mathématique, médiocrement exposée par Montferrier, qui paraît importante, mais qui est mal connue. Ses travaux sur la résolution numérique des équations, sur certaines questions de l'analyse, ont une haute valeur.

Il s'est préoccupé de satisfaire formellement aux systèmes algébriques ou différentiels par des développements en séries dont la convergence serait utilement étudiée.

Nous allons voir comment dès 1905, Robert de Montessus a reconnu tout l'intérêt des méthodes que Wronski a mis en oeuvre pour la résolution approchée des équations algébriques.

2 Généralisation de la méthode de Bernoulli. Les travaux de Jacques Hadamard (1892 et 1901)

Dès 1905, dans un article paru dans le *Bulletin de la Société Mathématique de France* [21], Robert de Montessus met en évidence les travaux de Wronski sur la résolution des équations numériques en comparant la démarche de Wronski (utilisation des fonctions aleph) à celle de Jacques Hadamard, telle que celui-ci la développe dans son remarquable ouvrage⁴ de 1901 [11]. Il semble que Robert de Montessus soit le premier à avoir fait cette remarque.

Dans l'introduction, nous avons dit qu'il fallait s'appuyer sur le mémoire de Wronski paru en 1847 plutôt que sur celui publié en 1812. Expliquons pourquoi. En 1812, paraît donc l'article « Résolution générale des équations de tous les degrés » [29] de Wronski dans lequel le mathématicien polonais introduit les fonctions aleph et donne les expressions (avec radicaux) des racines d'un polynôme de degré n . Wronski est donc en contradiction avec le théorème de Niels Abel (1802-1829) démontré en 1824 prouvant que l'équation générale de degré $n = 5$ n'est pas résoluble par radicaux. Signalons que dès la publication de l'article de Wronski, Joseph Diez Gergonne (1771-1859) réagit dans un papier intitulé « Analise. Doutes et réflexions, sur la méthode proposée par M. Wronski, pour la résolution générale des équations algébriques de tous les degrés » [15]. Gergonne y critique d'une part la lourdeur de la méthode de Wronski quand il s'agit de résoudre une équation du

4. Robert de Montessus choisit en effet comme référence le livre que publie Jacques Hadamard neuf ans après la parution de sa thèse [9] qui contient déjà la plupart des résultats de l'ouvrage.

quatrième degré et d'autre part le fait que *Wronski* croit être le premier à n'avoir pas fait subir de modifications à ses méthodes, pour les appliquer au quatrième degré [15] page 54.

Puis en 2007, Piotr Pragacz publie un article sur la vie et l'oeuvre de Wronski [25]. Sur la question de la résolution des équations algébriques, Pragacz écrit :

So did Wronski question the Ruffini-Abel theorem ? Or did he not know it ? As much as in the later years Wronski really did not systematically study the mathematical literature, in the first decade of the nineteenth century he has kept track of the major contributions. If one studies carefully (difficult to understand) deliberations and calculations, it seems that, Wronski's methods leads to approximate solutions, in which the error can be made arbitrarily small. In his arguments besides algebraic methods, we find analytic and transcendental ones.

Cette réflexion de Pragacz rejoint celle de Robert de Montessus émise en 1935 : il faut considérer les résultats de Wronski sous l'angle de la recherche de solutions approchées. Citons Robert de Montessus [22] :

Quand Wronski annonce qu'il a résolu les équations algébriques littérales de tous les degrés, il ne prend pas cette résolution dans le sens que nous avons défini⁵, ce que ne paraît pas avoir aperçu M. Loria : en effet, ses formules sont des séries illimités de termes ; on ne peut pas dire qu'il soit en opposition avec Abel et Galois. D'ailleurs, ses formules ont été appliquées à des équations à coefficients numériques de degrés 2,3, 4, 5, 6 et en ont donné toutes les racines.

Pour porter ce jugement, Robert de Montessus s'est appuyé sur les textes de Wronski postérieurs à celui de 1812. Dans l'article de 1812 [29], il ne semble pas en effet que les formules données soient des séries illimitées. Cependant la première partie de cet article est fondamental. La référence donnée par Robert de Montessus dans son article de 1905 [21] est le mémoire que Wronski publie en 1847 [30]. On peut aussi prolonger le propos de Robert de Montessus en citant Lascoux [16] :

He took care to emphasize that his solution was transcendental and not algebraic, in other words that he had to go to infinity to attain an exact factorization, but could nevertheless provide an approximate factorization before proceeding to the limit.

Wronski dans son mémoire de 1847 travaille sur la méthode de Bernoulli et tente de la généraliser. La méthode de Daniel Bernoulli est, par exemple, présentée sous un angle historique dans [5]. Les auteurs indiquent notamment que Leonhard Euler (1707-1783) dans [7] donne une preuve de la méthode de Bernoulli en considérant une fraction

5. Avant ce passage, Robert de Montessus a évoqué Nicolo Tartaglia (1500-1557), Girolamo Cardano (1501-1576), Lodovico Ferrari (1522-1565), Paolo Ruffini (1765-1822) et Niels Abel, Evariste Galois (1811-1832).

rationnelle de dénominateur $1 - a_1x - \dots - a_px^p$ (si l'équation est $1 = a_1x + \dots + a_px^p$) qu'il développe en série entière de deux façons différentes.

Après 1847, date de parution de l'ouvrage de Wronski, quels auteurs, en dehors de Hadamard, ont travaillé sur ce sujet ? Dans [4], les auteurs indiquent que le mathématicien hongrois Julius König (1849-1913)⁶ a dès 1884 élargi le champ d'application de la méthode de Bernoulli. Puis, les auteurs présentent les résultats de Jacques Hadamard et leurs implications dans la généralisation de la méthode de Bernoulli. Les résultats de Jacques Hadamard sont aussi exposés en détail par Peter Henrici (1923-1987) dans [13] qui étudie l'algorithme QD [26] de Hanz Rutishauer (1918-1970) qui est une généralisation de la méthode de Bernoulli. Rutishauer utilise d'ailleurs un résultat dû à Wronski dans [28]. Il s'agit des expressions des coefficients de la série inverse d'une série formelle sous forme de déterminants, notion chère à Wronski. Henrici indique aussi ce résultat de Wronski dans [13], page 17. Une étude de la découverte de l'algorithme QD est l'objet de l'article de Gutknecht et Parlett [8] qui citent eux-aussi Wronski.

En 1926, Alexandre Aitken expose dans [1] sa célèbre méthode d'accélération de convergence, le procédé Δ^2 . Aitken commence par généraliser la méthode précédente de Daniel Bernoulli dite *méthode des séries récurrentes*. Une analyse de son article est faite dans [5], pages 492-497. On consultera aussi [4], [18] et [8]. Aitken ne cite pas Hadamard, ni Wronski. Par contre, dans son livre [2] publié en 1944 Aitken mentionne pages 114-115 les fonctions aleph de Wronski. Comme l'indiquent Gutknecht et Parlett dans [8], Aitken ne connaissait pas les travaux de Hadamard. Aitken redécouvre donc le théorème de Jacques Hadamard sur la limite d'une suite de quotients de déterminants de Hankel associés à la série de Taylor d'une fonction méromorphe. Indiquons tout de même qu'en 1926 avec le concours de Szolem Mandelbrojt (1899-1983), Hadamard publie une nouvelle version de son livre paru en 1901 [12]. Ce livre fait l'objet d'un compte-rendu en 1928 dans le Bulletin of the American Mathematical Society⁷. D'ailleurs en 1928, Georges Pólya, alors professeur à Zürich, fait référence à cette édition de 1926 dans [24].

Dans sa thèse [9], page 135, Jacques Hadamard explique clairement comment ses résultats sur le problème qu'il se donne à résoudre (page 119 de sa thèse), à savoir « *Cherchons maintenant dans quels cas notre fonction a pour singularités, sur le cercle de convergence, plusieurs pôles simples ou multiples* », conduit à une généralisation de la méthode de Bernoulli. Cette généralisation est redécouverte par Aitken dans les années 1920 comme on vient de le voir. Rappelons que Robert de Montessus avait fait lui le lien en 1902 entre cette question posée par Hadamard et les approximants de Padé d'une fonction méromorphe dans [20]. Robert de Montessus démontre ainsi son célèbre théorème sur la convergence d'approximants de Padé d'une fonction méromorphe (voir [17]). Parlett livre dans « *What Hadamard missed* » [23] une analyse pertinente sur la place des travaux de Hadamard dans la genèse de l'algorithme QD. Parlett écrit :

6. L'article de König, « *Über eine Eigenschaft der Potenzreihen* » (Math. Ann. 23, 447-449, 1884) est indiqué dans la bibliographie du livre de Jacques Hadamard [11].

7. Voir : Bull. Amer. Math. Soc. Volume 34, Number 1 (1928), 119-120.

Our tale begins with the doctoral dissertation of the illustrious French mathematician Jacques Hadamard in 1891. His solution to the problem, described in the next section, yields a lousy algorithm. Our title intends no disparagement of that great man; neither he nor any of his contemporaries would have dreamt of evaluating the determinants he so cleverly introduced. Hadamard 'missed' the subsequent of his idea because he saw no need for it.

It is exciting, and a little intimidating to realize how much our notion of the 'solution' to a problem has changed in one century. The story is 'virtual' history because the next two investigators, A.C. Aitken and H. Rutishauser, were not directly influenced by Hadamard's dissertation. However they could have been! Aitken rediscovered Hadamard's idea for himself (about 1925) and, driven by the existence of computing machines, though hand driven and mechanical, saw the weakness in the formal solution.

Hadamard ne s'est pas occupé de ces questions uniquement dans sa thèse de 1892 et dans son livre de 1901. Il faut aussi regarder son article [10]. Szolem Mandelbrojt souligne l'importance des résultats de Hadamard en Analyse Complexe dans un article paru dans l'*Enseignement Mathématique* en 1967 [19]. Ces résultats de Hadamard ont été la source de très nombreux travaux entre les deux guerres.

Alston Scott Householder (1904-1993) remarque dans [14] pages 124-125 que si Aitken semble être le premier à avoir fait un usage systématique des déterminants de Hankel pour la recherche des racines d'une équation algébrique, d'autres auteurs avant lui ont emprunté cette voie. Householder mentionne James Douglas Hamilton Dickson (1849-1931) [6] et deux mathématiciens allemands Fürstenau et Nägelsbach⁸. Peut-on inclure dans cette liste Wronski et Robert de Montessus ?

3 Wronsky (1847) et Robert de Montessus (1905)

Au début de son article de 1905 [21] expose la méthode de Bernoulli pour la recherche de la racine de plus petit module d'un polynôme, en supposant qu'il existe une seule racine de ce type. Les racines du polynôme sont vues comme les pôles d'une fraction rationnelle dont les coefficients de la série de Taylor vérifient une relation de récurrence dont les coefficients sont donnés par ceux du polynôme. L'exposé est classique et on le trouve par exemple dans [13]. Un simple changement de variable permet de trouver la racine de module maximale, en supposant là aussi qu'il existe une seule racine de ce type. Robert de Montessus rappelle que les fonctions alephs de Wronski vérifient les mêmes relations de récurrence⁹ et donc peuvent être utilisées dans la méthode de Bernoulli dans le cadre que nous avons donné plus haut. En fait, les fonctions alephs, notée par le symbole \aleph ,

8. Ces deux mathématiciens sont cités par Aitken dans [1]. Pour une étude de leurs travaux, voir [4].

9. Il faut distinguer néanmoins les fonctions alephs positives et les fonctions alephs négatives.

de Wronski sont les fonctions symétriques homogènes complètes¹⁰. On peut d'ailleurs se référer au livre de Aitken [2] page 114.

Si on considère n indéterminées x_1, x_2, \dots, x_n , alors

$$\aleph(k) = h_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_k \leq n} x_{j_1} \cdots x_{j_k}. \quad (1)$$

On a l'identité formelle :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} h_k(x_1, x_2, \dots, x_n) t^k = \frac{1}{(1 - x_1 t) \cdots (1 - x_n t)}. \quad (2)$$

Si l'on remplace les indéterminées x_i par les racines, que l'on supposera toutes non nulles du polynôme, dans l'identité ci-dessus, on obtient la relation de récurrence que satisfont les $\aleph(k)$. Wronski dans [30] a considéré des quotients de fonctions alephs.

En effet, Lascoux écrit dans [16] que :

« More precisely, given the polynomial $\prod_{a \in A} (x - a) \cdot \prod_{b \in B} (x - b)$, Wronski claimed to be able to get its « universal » factorization, i.e. to produce separately both polynomials $\prod_{a \in A} (x - a)$ and $\prod_{b \in B} (x - b)$.

Lascoux décrit alors, en termes modernes et de façon très élégante, les idées de Wronski.

Revenons au mémoire de Wronski paru en 1847 [30]. Wronski considère, pages 32-33, l'équation générale

$$0 = z^m - A_1 z^{m-1} + A_2 z^{m-2} \cdots + (-1)^m A_m. \quad (3)$$

Il associe une équation de degré $m - 1$,

$$0 = z^{m-1} - P_2 z^{m-2} + P_3 z^{m-3} \cdots + (-1)^{m-1} P_m \quad (4)$$

dont les coefficients sont obtenus de façon « transcendante ». En effet, Wronski donne le mode de calcul des P_i . On a par exemple $P_2 \aleph(q) = A_1 \aleph(q) - \aleph(q+1)$ ou encore $P_3 \aleph(q) = A_2 \aleph(q) - A_1 \aleph(q+1) + \aleph(q+2)$. Il faut comprendre l'« égalité » $P_2 \aleph(q) = A_1 \aleph(q) - \aleph(q+1)$ comme un passage à la limite :

$$P_2 = A_1 - \lim_{q \rightarrow +\infty} \frac{\aleph(q+1)}{\aleph(q)}. \quad (5)$$

Considérons pour illustrer notre propos, une équation de degré 3,

$$0 = z^3 - (\alpha + \beta + \gamma)z^2 + (\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)z - \alpha\beta\gamma = (z - \alpha)(z - \beta)(z - \gamma). \quad (6)$$

10. Robert de Montessus emploie cette expression dans son article de 1935.

Si $\alpha = \lim_{q \rightarrow +\infty} \frac{\aleph(q+1)}{\aleph(q)}$, on a $P_2 = A_1 - \alpha = \beta + \gamma$. On aura aussi

$$P_3 = \lim_{q \rightarrow +\infty} \left(A_2 - A_1 \frac{\aleph(q+1)}{\aleph(q)} + \frac{\aleph(q+2)}{\aleph(q)} \right) \quad (7)$$

$$= \lim_{q \rightarrow +\infty} \left(A_2 - A_1 \frac{\aleph(q+1)}{\aleph(q)} + \frac{\aleph(q+2)}{\aleph(q+1)} \frac{\aleph(q+1)}{\aleph(q)} \right) \quad (8)$$

$$= A_2 - A_1 \alpha + \alpha^2 \quad (9)$$

$$= (\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma) - (\alpha + \beta + \gamma)\alpha + \alpha^2 \quad (10)$$

$$= \beta\gamma. \quad (11)$$

et on retrouve le polynôme $(z - \beta)(z - \gamma)$.

Dans [21], Robert de Montessus considère la situation où le polynôme a exactement deux racines distinctes de module minimal. Dans le cas d'un polynôme à coefficients réels cela reviendrait à supposer que l'on a deux racines conjuguées de module minimal. Robert de Montessus construit une suite de polynômes de degré 2 qui tend vers le polynôme de degré 2 ayant justement pour racines, les deux racines distinctes de module minimal. Cette méthode apparaît dans la thèse de Hadamard [9] et dans son livre de 1901 [11]. Henrici [13] développe toutes ces idées dans le chapitre¹¹ concernant l'algorithme QD. Ceci revient donc à factoriser le polynôme de départ. Pour Robert de Montessus, Wronski a aussi mis en oeuvre cette méthode en utilisant des fonctions *aleph composées*. Les premières fonctions aleph composées introduites par Wronski dans son mémoire de 1847 sont les $\aleph(q)(1|\alpha)$ définies par :

$$\aleph(q)(1|\alpha) = \aleph(q)\aleph(q+\alpha) - \aleph(q-1)\aleph(q+\alpha+1), \quad (12)$$

c'est à dire des déterminants 2×2 . On retrouve ainsi l'expression numérotée (7) de l'article de Robert de Montessus à la page 47 du mémoire de Wronski.

Si l'on se trouve dans la situation où les racines du polynôme « les plus proches du point $z = 0$ »¹² vérifient

$$|\alpha_1| \leq |\alpha_2| \leq \dots \leq |\alpha_p| < |\alpha_{p+1}| \leq |\alpha_{p+2}| \leq \dots \quad (13)$$

il est possible, et citant Robert de Montessus, « Wronski l'avait fait », de construire l'équation de degré p ayant pour racines les α_i , $i = 1 \dots p$. Lascoux explique cela dans [16]. On retrouve aussi cette idée, à savoir déterminer des facteurs du polynôme, dans les travaux de Hadamard et dans ceux de Rutishauser comme cela est exposé par Henrici [13] : Henrici revient en effet sur la notion de *polynôme de Hadamard*, notion généralisée par Rutishauser dans les cas de fonctions méromorphes ayant des pôles de même module. Robert de Montessus a aussi fait usage de polynômes de Hadamard dans la preuve de son célèbre théorème de convergence d'approximants de Padé [20].

11. Voir aussi l'exercice 5 page 621.

12. [21] page 31-32

4 Conclusion

Wronski, personnage de roman, a apporté des contributions fondamentales dans le domaine de la résolution approchée d'équations algébriques. Soulignée en 1905 par Robert de Montessus, cette contribution est aussi mise en lumière par Lascoux dans les années 1990. Robert de Montessus situe les résultats de Wronski par rapport à ceux de Hadamard sur la recherche des singularités polaires. La présentation de Lascoux est plus algébrique et insiste plus sur l'idée de factorisation du polynôme, même si cela est présent dans l'article de Robert de Montessus de 1905.

On peut placer les travaux de Wronski dans une lignée qui débiterait avec Bernoulli et Euler, en passant par Hadamard et d'autres auteurs du XIXe siècle, puis par Robert de Montessus, Aitken et enfin Rutishauser et l'algorithme QD.

Références

- [1] Aitken A.C., On Bernoulli's Numerical Solution of Algebraic Equations, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 46 (1926) 289-305.
- [2] Aitken A. C., Determinants and matrices, Third Edition, 1944, Oliver and Boys, Edinburgh and London. New York : Interscience publishers, inc.
- [3] Bernoulli D., Observationes de seriebus quae formantur ex additione vel subtractione quacunque terminorum se mutuo consequentium, Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, 3 (1728) 85-100.
- [4] Brezinski C., Redivo-Zaglia M., The genesis and early developments of Aitken's process, Shanks' transformation, and related fixed point methods, Numerical Algorithms, vol. 80, 2019.
- [5] Chabert J.-L. and, *A History of Algorithms. From the Pebble to the Microchip*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1999.
- [6] Dickson J. D. H., Least roots of equations, Trans. of Edinb. XXVIII. 119-133, 1877.
- [7] Euler L., *De usu serierum recurrentium in radicibus aequationum indagandis, Introductio in analysin infinitorum*, 1748. *Introduction à l'Analyse Infinitésimale*, Paris, 1796, livre 1, chap XVII.
- [8] Gutknecht M. H., Parlett, B. N., From qd to LR, or, How were the qd and LR algorithms discovered ?, IMA Journal of Numerical Analysis (2009) Page 1 of 15.
- [9] Hadamard J., Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor, Journal de mathématiques pures et appliquées 4e série, tome 8 (1892), p. 101-186.
- [10] Hadamard J., Etude sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d'une fonction considérée par Riemann, Journal de mathématiques pures et appliquées 4e série, tome 9 (1893), p. 171-216.
- [11] Hadamard J., La série de Taylor et son prolongement analytique, Scientia, No 12, Paris, 1901.
- [12] Hadamard J., Mandelbrojt S., La série de Taylor et son prolongement analytique, Scientia, No. 41. Deuxième édition, revue et mise au courant des progrès récents. Paris, Gauthier-Villars, 1926.
- [13] Henrici P., *Applied and Computational Complex Analysis*, volume 1, John Wiley and sons, New York, 1988.
- [14] Householder A.S., The numerical treatment of a single nonlinear equations, International series in pure and applied mathematics, Mc Graw-Hill, 1970.
- [15] Gergonne, Analyse. Doutes et réflexions, sur la méthode proposée par M.Wronski, pour la résolution générale des équations algébriques de tous les degrés Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 3 (1812-1813), p. 51-59

- [16] Lascoux A., Wronski's factorization of polynomials, in : Topics in Algebra, Banach Center Publ. 26, Part 2, PWN, Warszawa 1990.
- [17] Le Ferrand, H. : 1902, un théorème pour la postérité ?, Images des Mathématiques, CNRS. <http://images.math.cnrs.fr/1902-un-theoreme-pour-la-posterite.html> (2017).
- [18] Le Ferrand H., The rational iteration method by Georges Lemaître, Numerical Algorithms vol 80, 2019.
- [19] Mandelbrojt S., Théorie des fonctions et théorie des nombres dans l'oeuvre de Jacques Hadamard, L'Enseignement Mathématique, 13, 1967.
- [20] Montessus (de) R., Sur les fractions continues algébriques. Bull. Soc. Math. France 30, 28–36 (1902).
- [21] Montessus (de) R., La résolution numérique des équations, Bulletin de la Société Mathématique de France, tome 33 (1905), pages 26-33.
- [22] Montessus (de) R., Wronski, Mathématicien, Revue Scientifique, numéro 10, 1935.
- [23] Parlett, B. N., What Hadamard missed. Technical Report PAM-671. Center for Pure and Applied Mathematics, University of California at Berkeley, 1996.
- [24] Pólya G., Über gewisse notwendige Determinantkriterien für die Fortsetzbarkeit einer Potenzreihe, Mathematische Annalen, 99. Band, 1928.
- [25] Pragacz P. (2007) Notes on the Life and Work of Józef Maria Hoene-Wroński. In : Pragacz P. (eds) Algebraic Cycles, Sheaves, Shtukas, and Moduli. Trends in Mathematics. Birkhäuser Basel.
- [26] Rutishauser H., Der Quotienten-Differenzen-Algorithmus, Z. Angew. Math. Phys., 5 (1954) 233-251.
- [27] Rouse Ball, W.-W., Histoire des Mathématiques, édition française revue et augmentée, traduite sur la troisième édition anglaise par L. Freund, tome II avec des additions de R. de Montessus, Librairie Scientifique Hermann, Paris, 1907.
- [28] Rutishauser H., Eine Formel von Wronski und ihre Bedeutung für den Quotienten-Differenzen-Algorithmus, ZAMP, Vol. VII, 1956 Kurze Mitteilungen - Brief Reports - Communications brèves.
- [29] Wronski H., Résolution générale des équations de tous les degrés, J.Klostermann fils, Libraire de l'École Impériale Polytechnique, Paris, 1812.
- [30] Wronski H., Réforme absolue et par conséquent finale du savoir humain, tome III. Messianisme ou réforme absolue du savoir humain ; nommément ; réforme des mathématiques comme prototype de l'accomplissement final des sciences et réforme de la philosophie comme base de l'accomplissement final de la religion. Résolution des équations algébriques de tous les degrés comme addition à la réforme des mathématiques. Résolution général des équations algébriques de tous les degrés : précédée du manifeste historique concernant l'actuelle réforme du savoir humain. Imprimerie Firmin Didot frères, Paris, 1847.