



HAL
open science

Développements curriculaires dans l'enseignement obligatoire

Claire Margolinas, Alain Jacques Mercier, Sophie René de Cotret

► **To cite this version:**

Claire Margolinas, Alain Jacques Mercier, Sophie René de Cotret. Développements curriculaires dans l'enseignement obligatoire. Journées Mathématiques de l'IFE, Oct 2006, Lyon, France. hal-01995408

HAL Id: hal-01995408

<https://hal.science/hal-01995408v1>

Submitted on 26 Jan 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Développements curriculaires dans l'enseignement obligatoire

Claire Margolinas, INRP, UMR ADEF

Alain Mercier, INRP, UMR ADEF

Sophie René de Cotret, Université de Montréal, professeure invitée à l'INRP, UMR ADEF

Notre exposé vise à introduire les questions de développement curriculaires, dans l'enseignement obligatoire, qui sont sous-jacentes aux démarches de recherche de développement de plusieurs groupes de travail soutenus par l'INRP (DéMathE¹ et CIIREM Didactique²).

Dans un premier temps, nous situerons la problématique du développement curriculaire en nous interrogeant sur les liens, dans nos travaux, entre *recherche* et *développement*. Notre exposé s'appuiera ensuite sur la reprise et la redéfinition de certaines questions (en *italique* dans le texte) mises en ligne pour l'organisation des journées.

Dans un deuxième temps, nous pointerons certains résultats de recherche en didactique des mathématiques, relatifs aux savoirs mathématiques, ce qui nous permettra d'aborder deux questions : celle des *raisons d'être des objets d'enseignement, organisations mathématiques et organisations sociales à mathématiques* et celle de *la part de l'expérience dans le cours de mathématique*.

Dans un troisième temps, nous nous intéresserons au travail du professeur dans les classes ordinaires. Les travaux de développement, s'ils se destinent aux professeurs, doivent en effet prendre en compte les contraintes du travail du professeur. Les travaux de recherche sur ce travail nous renseignent sur les points d'appui d'une évolution possible des pratiques et sur les points de stabilité. Dans ce cadre, nous aborderons la question suivante : *Quelles situations mathématiques concevoir, quels dispositifs construire dans la classe, quelles ressources pédagogiques construire par et pour les enseignants et quelle mutualisation ?*

Dans un quatrième temps, nous envisagerons le travail mathématique de régulation curriculaire. L'usage possible des résultats didactiques sera montré sur deux exemples, la notion d'*énumération* et le problème de *l'organisation des collections*, la notion de *fonction* et le dénombrement des classes d'objets *variables*.

La question abordée par l'exposé sera : *quelle analyse des usages de ces résultats dans la classe et quelle analyse des apprentissages construits ?* En conclusion, nous nous interrogerons enfin sur *les nouveaux équilibres à constituer entre la recherche et l'étude*. Nous nous appuierons sur un même type d'exemple mathématique : la transparence des questions de *combinatoire* dans le curriculum officiel et sur une difficulté de diffusion des travaux didactiques qui tient à la différence entre *problème* et *situation*.

Recherches et développements

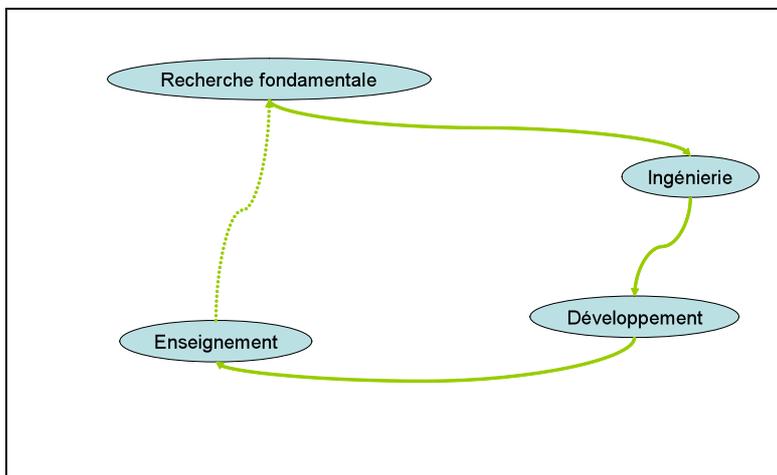
Les recherches conduites à l'INRP et qui sont l'objet de la rencontre sont des recherches de développement. Elles associent des chercheurs universitaires et des professeurs qui consacrent une part de leur temps à ce travail. Leurs résultats sont orientés vers la *production de ressources* pour les professeurs et/ou les formateurs. Nous allons donc, dans un premier temps, nous interroger sur

¹ Développement des *Mathématiques à l'École*

² Commission Inter IREM Didactique

ce qui peut caractériser voire fonder cette association, qui interroge les relations entre recherche fondamentale, ingénierie, développement et enseignement.

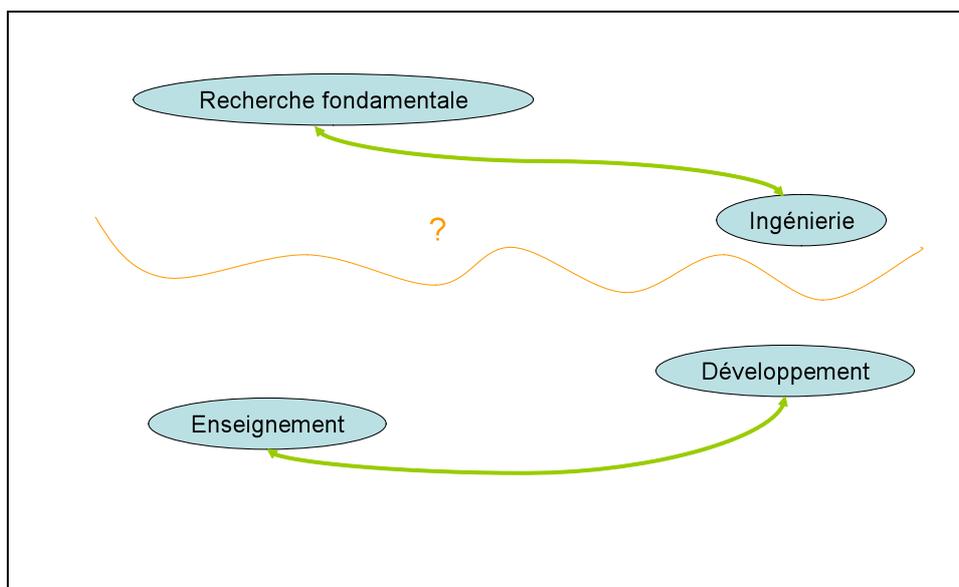
Dans une vision que nous qualifierons ici de « classique » on imagine – idéalement - une sorte de chaîne descendante de la recherche fondamentale à l'ingénierie, au développement et à l'enseignement qui, pour sa part, fournit en retour une partie des questions pour la recherche fondamentale. Sans que ce schéma se trouve jamais écrit tel quel, il semble sous-jacent à certaines conceptions des relations entre recherche et enseignement, il n'y a qu'à penser aux discours sur la « théorie » la « pratique » et « l'articulation théorie-pratique » pour s'en convaincre.



Un schéma classique

Nous ne partageons pas cette vision, qui reflète une conception plutôt simpliste à la fois de l'enseignement et de la recherche. En effet, la recherche fondamentale entretient avec l'ingénierie des relations réciproques : l'ingénierie n'y joue pas le rôle d'une pratique idéale mais permet de comprendre certaines conditions de possibilité ou d'existence de situations didactiques. C'est dans ce contexte que Brousseau (1998) insiste sur le fait que les ingénieries qu'il a développées ne sont ni transposables ni destinées à être transposées dans les classes ordinaires, c'est pour cela que Chevallard n'a jamais rien publié de ses travaux d'ingénierie

Par ailleurs, enseigner nécessite une composante de développement : ni le système éducatif ni les professeurs ne peuvent concevoir le travail d'enseignement autrement que dans cette perspective, d'autant que les conditions du travail scolaire ne cessent de se transformer, de l'intérieur comme de l'extérieur. La question qui se pose est donc celle des relations entre ces deux pôles : recherche fondamentale/ingénierie d'une part, enseignement/développement, de l'autre. C'est la problématique de notre exposé.

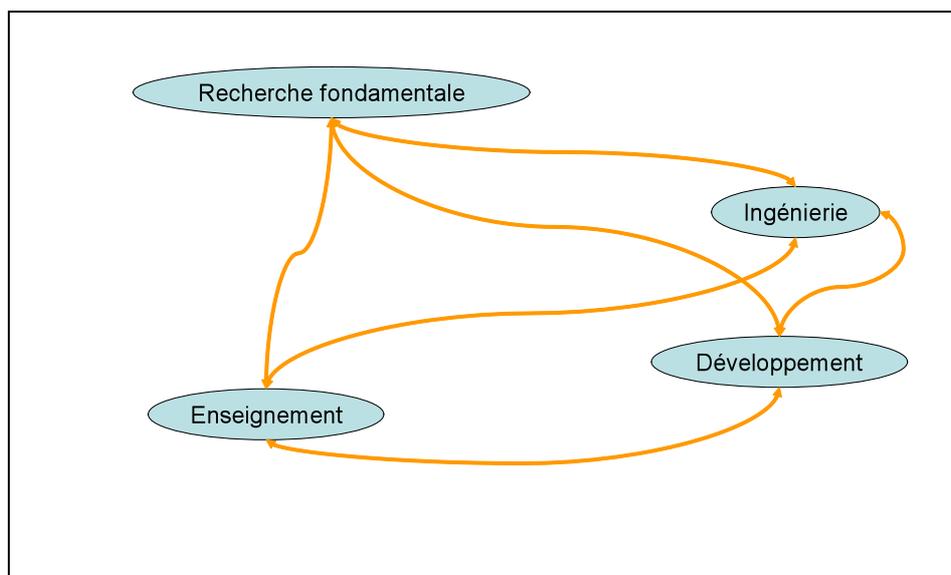


Un schéma des fonctions

Questionnons un instant les différentes relations représentées sur ce schéma. Nous avons déjà évoqué celles de la recherche fondamentale et de l'ingénierie et celle de l'enseignement et du développement. Dans le schéma « classique », l'ingénierie et le développement sont parfois vues comme ayant des relations naturelles, sans doute parce que l'ingénierie conduit à construire des situations de classe et à les réaliser dans des classes effectives, laissant ainsi penser que ce travail pourrait contribuer très directement au développement. Par ailleurs, le développement, ou l'innovation, se considère souvent comme une sorte de « poste avancé » du système éducatif, qui pourrait se rapprocher d'une pratique plus contrôlée, une des caractéristiques de l'ingénierie. La relation entre ingénierie et enseignement a donc parfois été vue, dans une perspective descendante, comme une relation directe.

Ce que nous voulons questionner ici correspondrait aux deux dernières relations, entre recherche fondamentale et développement, d'une part, entre recherche fondamentale et enseignement, d'autre part. Nous allons nous référer une nouvelle fois aux travaux des chercheurs et aux professeurs qui ont travaillé en collaboration avec Guy Brousseau, parce qu'ils fournissent un cas paradigmatique. Les recherches menées dans ce cadre ont conduit d'une part au développement de la théorie des situations didactiques, un développement conceptuel qui détermine, dans le cadre des processus complémentaire de dévolution et d'institutionnalisation, les situations correspondant aux fonctions du savoir mathématique : action, formulation, preuve. Elles ont conduit également, pour chaque recherche singulière, au travail épistémologique, dans l'optique – souvent mal comprise – des situations fondamentales, qui permet de déterminer à la fois les relations nécessaires entre les concepts et les situations caractéristiques ou fondamentales qui y sont associées. Ce sont ces travaux qui ont nécessité la construction de ce que l'on appelle *les ingénieries*, toujours très longues et jamais ponctuelles, qui ont concerné la majeure partie de l'enseignement obligatoire. Cette « raison d'être » des constructions d'ingénierie a très peu diffusé, même dans le monde des chercheurs, pour ne pas parler de l'enseignement, ni même du développement. Or, si les ingénieries sont des organisations singulières, adaptées à la fois aux intérêts de la recherche à un moment donné, mais aussi aux conditions effectives de réalisation dans le cadre scolaire, ces travaux, dont le caractère est à la fois épistémologique et curriculaire ne sont pas a priori limités par les conditions spécifiques qui leur ont donné naissance.

Il y a pour nous un enjeu fort à comprendre pourquoi et comment cet aspect des recherches fondamentales – issu de différentes recherches – pourrait connaître une diffusion et dans quelles conditions.



Questionnement des relations

Raisons d'être des objets mathématiques

Pour aller plus loin, il nous faut introduire cette idée: les savoirs ne sont pas tous de même nature et on peut les distinguer selon le travail de leur production. Ce qui fait qu'on ne peut pas imaginer enseigner de la même manière deux savoirs de natures différentes et qu'il devient nécessaire d'inventer des manières d'enseigner pouvant garantir certaines propriétés des savoirs dont on vise la transmission. A la suite des travaux de Brousseau (1998), nous pouvons dire que les savoirs s'organisent en plusieurs types, et qu'ils sont constitués :

de *théories* ou discours sur le monde de l'expérience,
d' *algorithmes* ou règles d'action dans le monde de l'expérience,
de *routines* ou manières d'agir dans le monde de l'expérience,
d' *expérience* ou connaissances dans le monde de l'expérience.

Chaque type est produit à partir d'un type précédent : la problématisation des *faits* d'expérience produit, par mathématisation, des *résultats* qui se décrivent dans des organisations théoriques, les résultats sont *démontrés* en théorie (sous la condition de vérité des axiomes et des théorèmes précédemment connus) ; l'usage systématique des *résultats* théoriques produit, par démathématisation, des *outils* qui se décrivent comme algorithmes, les outils sont *vérifiés* par ce qu'ils réalisent en pratique (sous les conditions données par la théorie) ; l'emploi usuel des *outils* algorithmiques produit, par désinstitutionnalisation, des *dispositifs* qui appellent des routines ou pratiques, les dispositifs sont *validés* par ce qu'ils permettent de faire (dans des conditions pratiques diverses, sous le contrôle de la contingence) ; la mise en oeuvre des *dispositifs* produit, par réinstitutionnalisation, des *faits* qui sont issus de l'expérience, et des connaissances, les faits sont *prouvés* expérimentalement (dans le domaine de réalité dont une institution donnée traite).

Tout enseignement réalise un équilibre dans cet espace, qui permet donc de décrire les choix de transposition. Mais enseigner des problèmes, des théories, des algorithmes, ou des routines ne se fait pas de la même manière. *C'est sans doute cette nécessaire variabilité de l'enseignement attendu qui fait le principal problème professionnel des professeurs de mathématiques.* On peut bien sûr essayer d'enseigner des théories sans les problèmes qui les motivent, des algorithmes qui ne sont pas les résultats de l'usage de théories, etc., mais...

- ce n'est pas très motivant, pour le professeur comme pour les élèves, puisque le savoir

enseigné n'a pas de motif ;

- c'est coûteux en efforts parce que la composition des gestes élémentaires (dont l'exécution n'est pas sous le contrôle d'une évaluation (théorique, démonstration des résultats, algorithmique, vérification des outils, routinière, validation des dispositifs, ou d'expérience, preuve des faits) appartenant à l'agent, augmente rapidement la complexité de l'action ;
- c'est donc long et pénible pour les élèves, qui ne peuvent pas contrôler leur action et corriger leurs erreurs (Brousseau l'avait déjà dit en, 1973, à propos de la multiplication).

Il faudrait donc enseigner des savoirs qui tiennent solidairement à ces quatre dimensions routines, expérience, théories, algorithmes ; et on peut montrer en effet que tout enseignement stable propose un parcours organisé d'une telle organisation mathématique, l'enjeu de l'enseignement et la culture des élèves déterminant les points de départ et d'arrivée du parcours. Mais nous savons que la difficulté d'un enseignement organisant l'ensemble du parcours n'est pas seulement épistémologique, elle tient aussi à la nécessité de *changer d'activité de référence* chaque fois que l'on change de niveau dans le parcours. C'est ce que déclare par exemple la Théorie des Situations Didactiques (TSD), qui propose trois étapes, pour passer du niveau de *l'action dans un milieu* à la *production de représentations* puis, à la *validation des résultats* obtenus, pour produire des éléments de théorie relatifs à l'action. Mais bien d'autres mouvements sont nécessaires, qui nécessitent peut-être des étapes que la TSD ne nomme pas. Le travail épistémologique à l'usage de l'enseignement n'est pas terminé.

Le mathématicien Henri Lebesgue (1975), qui disait aux futurs professeurs que « un nombre est le compte-rendu complet de l'action qui le produit [...] le reste est métaphysique » déclarait en conclusion de son cours sur « La mesure des grandeurs » que l'étude des mathématiques élémentaires était essentielle, pour leur enseignement : cette étude permettait par exemple de comprendre qu'un nombre est le résultat d'une expérience particulière sur une grandeur. Il travaillait pour que peut-être, les professeurs au fait de ce qu'est la mesure des grandeurs envisagent leur enseignement sur les systèmes de nombres comme portant sur les manières de *produire des mesures* par un algorithme vérifié ou des dispositifs validés, selon les cas, et *d'en rendre compte par un nombre*, que l'on considérerait alors comme le compte-rendu d'une *expérience de mesure*.

Le groupe DéMathE, a pris ce problème comme point de départ du travail de développement de son groupe, dans le cas du geste mathématique le plus élémentaire, l'*énumération* des objets d'une collection, comme geste préalable à (et comme technique de) dénombrement de cette collection. Le travail de développement, dans ce cas, doit répondre aux besoins des professeurs en leur fournissant des savoirs et des ressources, sachant que les professeurs n'auront pas de demandes tant que ceux-ci ne seront pas disponibles...

Dans le cas des travaux conduits dans le cadre de la CIIREM Didactique, qui mobilise dans un travail commun des enseignants-chercheurs des formateurs d'IUFM et des professeurs, dans une dizaine d'IREM, le travail est conduit par les didacticiens à la fois avec les professeurs et les formateurs. Le problème est donc pris par un autre bout, supposant en quelque sorte que le travail mathématique permettra aux professeurs de transformer les organisations pédagogiques (Fluckiger & Mercier, 2002; Matheron & Salin, 2002) parce que nous faisons cette hypothèse : *les professeurs ont plus de liberté de décision d'organisation du travail de leur classe, sont plus disponibles à l'observation de leurs élèves, sont plus ouverts à leurs idées, s'ils sont assurés des savoirs qu'ils cherchent à transmettre*. Notre question commune pourrait donc être formulée ainsi: Dans le format d'enseignement devenu classique aujourd'hui :

[activité/synthèse/exercices/évaluation]

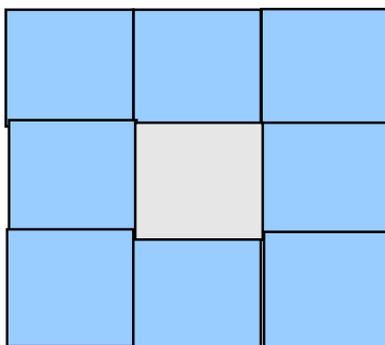
quel est l'avenir d'une activité proposée aux élèves en introduction d'une leçon ? Fera-t-elle expérience, produira-t-elle des faits ? Quels résultats sont attendus de la synthèse qui rend compte de son étude, dans quel cadre théorique seront-ils inscrits ? Comment le professeur peut-il gérer cet avenir ? Pour commencer de répondre, une première question est utile : Sur quoi l'activité proposée ouvre-t-elle ? Sur quoi devrait-elle ouvrir ? Un Problème ? Ou... une Situation ? Les débats entre

nous n'ont pas décidé ; cependant, nous avons quelques éléments permettant d'avancer, ils tiennent à l'analyse des thèmes et des valeurs portés par un projet de leçon.

Quel est l'enjeu actuel de l' <i>activité</i> , est- elle robuste? Quels sont ses avènements possibles ? Ouvre-t-elle sur une question <i>cruciale</i> ? Ouvre-t-elle sur un thème d'étude dont elle est <i>génératrice</i> ? Ouvre-t-elle sur une théorie dont elle est <i>fondamentale</i> ? Permet-elle un ou plusieurs <i>parcours</i> dans une organisation de savoirs?

Situation n'est pas problème

Nous avons, dans les équipes de la CIIREM Didactique, des travaux qui vont dans ce sens et permettent de répondre positivement à ces questions, comme par exemple ceux de l'équipe de Bordeaux, qui prend l'idée de Lebesgue au sérieux et développe le *calcul de l'aire du rectangle* comme situation fondamentale des calculs de produits, de nombres entiers dans l'enseignement élémentaire, de fractions et de décimaux ensuite. Ce travail conduit chaque fois à des éléments théoriques puis, à la construction d'un algorithme enfin à la mise en place d'un dispositif permettant d'asseoir des routines de calcul sur un répertoire connu. Mais pour être plus explicite sur les difficultés de notre entreprise, qui n'en est qu'à ses débuts, on a préféré ici montrer un cas qui fait problème plutôt qu'une réponse assurée en partant donc d'une proposition d'activité telle qu'on en trouve régulièrement dans les ouvrages d'enseignement du Collège. « Déterminer le nombre de carrés bleus nécessaires pour border, comme sur le dessin ci-dessous, avec des carreaux carrés entiers de côté 1, un miroir central carré de côté: un (le cas représenté), quatre, sept, douze... n'importe quelle taille. »



La figure représente le cas d'un miroir central de côté 1.

Cette activité, définit-elle un *problème*, permet-elle de mettre en place une *situation* ? Qu'y a-t-il à en apprendre, du point de vue d'un élève ? Un élève se pose toujours cette question, elle est de sa responsabilité, et parfois il la pose au professeur : « A quoi ça sert ? » ou : « On l'aura à l'interro ? », demande-t-il, lorsque l'activité ne permet pas de saisir un enjeu d'enseignement possible. Le professeur qui se prépare à l'introduire dans sa classe se demande : « Quel est l'enjeu actuel de cette activité, est- elle robuste (produit-elle facilement les effets attendus, ces effets sont-ils connus, peut-on les anticiper ?) » Cette « activité » permet sans aucun doute que les élèves s'engagent dans un comptage et trouvent 8 de contour pour 1 de centre, 12 de contour pour 4 de centre, 16 de contour pour 9 de centre, etc. Des professeurs la proposeront donc. Mais ensuite ? Nous devons pour le savoir conduire ce que Assude et al. (soumis) nomment *une analyse a priori ascendante de la transposition*, c'est-à-dire remonter aux mathématiques que cette activité, considérée comme évocatrice d'un problème, rend possibles en principe. Mais pour que ces mathématiques soient produites, par les élèves, il faudra que le professeur *organise l'étude de ces faits* (on constate que le

cadre est constitué de 8, 12, 16 carreaux pour un centre carré de 1, 2, 3 de côté). Et pour cela, il faudra que le professeur conduise les élèves à *changer d'objet* de travail. Par exemple, en disposant en *tableau de valeurs* les tailles des miroirs carrés et celles des contours, et en associant les procédures de calcul venues de la décomposition du contour en éléments rectilignes. Le professeur doit anticiper cela, et être persuadé de cette nécessité, pour prendre rapidement cette décision et arrêter le travail de comptage sur des exemples « à l'infini ».

Côté	Miroir	Contour	Calcul 1	Calcul 2	Calcul 3	C+M
1	1	8	$4x1+4$	$4x(1+1)$	$2x3+2x1$	9
2	4	12	$4x2+4$	$4x(2+1)$	$2x4+2x2$	16
3	9	16	$4x3+4$	$4x(3+1)$	$2x(3+2)+2x3$	25
4	$16[=4^2]$	20	$4x4+4$	$4x(4+1)$	$2x(4+2)+2x4$	36
?	?	?	?	?	?	?

Selon le point atteint par les élèves, les procédures seront plus ou moins diverses et pourront être enrichies. Ainsi, la poursuite de la colonne M qui représente « l'aire des miroirs carrés de côté entier » permet de remarquer que « ce sont des nombres au carré » et qu'on aurait dû y penser, puisque les miroirs bordés sont... des carrés. On peut remarquer alors que « la somme (miroir M plus contour C) est aussi un carré » et qu'à cela aussi on aurait dû penser, notre connaissance théorique des carrés nous l'aurait dit si nous y avions fait appel au lieu d'entrer dans le calcul. Un travail systématique du tableau à l'aide d'un tableur engage plus sûrement un tel travail de mise à distance, les calculs exploratoires étant peu coûteux. C'est important de savoir que le professeur y gagne en robustesse, car l'appui sur les remarques des élèves rend la situation moins robuste. On peut obtenir d'autres remarques encore : « Le contour est un multiple de 4 » est un constat possible.

Il faudra que le professeur organise l'étude de certains de ces faits, qui cette fois sont relatifs au tableau de nombres. Pour cela, il faut un dispositif *d'enregistrement* et de *mise à l'étude* des faits constatés: le tableau. La recherche d'une méthode de calcul pour un terme général donne alors des « formules », dans les colonnes associées : $4x1+4$ puis $4x2+4$ et $4x3+4$ qui correspondent à l'énoncé, « Quatre fois le côté plus quatre pour les sommets » sont des formules non algébriques, mais elles ont la même fonction descriptive de même que, dans un premier rapport à l'algèbre, ce que Serfati (2005) nomme forme *rhétorique* parce qu'elle peut se dire : « 4 fois c plus 4s », où c est la longueur d'un côté tandis que s est un sommet, etc. Mais ces formules ne sont pas « calculables ». Plusieurs formules générales peuvent alors être imaginées par des élèves de 4^e ou de fin de 5^e, selon leur méthode de calcul, qui rend compte du découpage du contour dont elle est de fait, comme le dit Lebesgue une description : $4n+4$ (les côtés du carré et les coins) ou $2(n+2)+2n$ (deux longueurs parallèles et deux côtés) ou $4(n+1)$ (quatre longueurs égales imbriquées) ou $4(n+2)-4$, (quatre longueurs complètes moins les recouvrements) ou encore $(n+2)^2-n^2$ (par différence des aires, une formule moins probable).

On peut alors chercher à montrer l'équivalence des procédés de description et de calcul, et pour cela entrer dans un travail algébrique c'est-à-dire, chercher à transformer une formule en une autre par une manipulation formelle réglée. Mais cela montre que l'activité n'était qu'un prétexte et que *l'enjeu n'était pas la recherche d'une réponse au problème posé !* Il faut alors l'annoncer et montrer que le problème rencontré correspond à un phénomène général, qui va nécessiter un travail sur les transformations algébriques légitimes, *les formules devenant donc objets d'étude dans ce second niveau de changement d'objet.*

Le travail des *tableaux de nombres* est donc l'un des avènements de cette activité. Il ouvre sur les relations fonctionnelles. Le travail *algébrique des formules désignant des programmes de calcul* est donc un des avènements de l'activité, il ouvre sur l'équivalence des formules, envisagées comme programmes de calcul. Mais avant tout, *quel est l'avenir du problème lui-même ?* Comment un mathématicien le traiterait-il ? Sans doute, en cherchant quel est le problème général dont le

problème d'encadrement du miroir relève. Imaginons que sa généralité soit obtenue en passant en dimension supérieure. Le travail se poursuivrait donc en direction de l'encadrement... des cubes.

Il faudrait par exemple $6n^2 + 12n + 8$ cubes, pour border les six faces par n^2 cubes, les 12 arêtes par n cubes et les 8 sommets par un cube, pour un cube d'arête n . Mais la généralisation de cette formule à d'autres dimensions suppose une description de l'hypercube qui donne le nombre de ses éléments frontière. Or, ces éléments sont des hypercubes de dimension 4 bordant respectivement les éléments de dimension 3 par n^3 hypercubes chacun, ceux de dimension 2 par n^2 hypercubes chacun, ceux de dimension 1 par n hypercubes chacun et les sommets par un hypercube chacun... et ainsi de suite pour les dimensions suivantes. Nous n'en disposons pas ! Pourtant, puisque nous cherchons ici à faire le tour du problème pour en tester la généralité, nous pouvons voir qu'une des formules imaginées donne des résultats : considérons que le cadre à carreler est la différence des aires du carré complet et de son intérieur:

ainsi, $4n+4=(n+2)^2 -n^2$

de même, $6n^2+12n+8=(n+2)^3 -n^3$

et bien sûr, par une généralisation

(aisée à démontrer mais cette fois le calcul est en sens inverse),

$$(n+2)^4 -n^4 =8n^3 +24n^2 +32n+16$$

Par retour du rapport de système à modèle, la formule permet de savoir que l'hypercube de dimension 4 est bordé de 8 faces cubiques, 24 faces carrées, 32 arêtes, 16 sommets, car nous avons découvert une *fonction génératrice* des éléments constitutifs de l'hypercube, un polynôme qui le décrit si l'on considère maintenant que n^3 désigne les bords de dimension 3 d'un hypercube, n^2 les bords de dimension 2, etc. Cette formule donne même le résultat en dimension 1 : $(n+2)-n=2$ et en effet, une ligne de cubes a deux bouts! L'avenir de notre problème se trouve maintenant en combinatoire, plus du côté de la méthode (ou théorie) combinatoire de Polya que du côté des programmes du Collège. Mais l'analyse faite nous donne une idée du type théorique dont il relève. Elle nous montre aussi, et cela nous confirme dans notre hypothèse précédente, que ce que l'on peut apprendre de la résolution d'un problème tient aux outils mathématiques que cette résolution mobilise. Ici, on apprend *ce qu'est une fonction génératrice* dans un problème de dénombrement, c'est un savoir de combinatoire.

Ce qui s'est passé n'est pas un fait isolé. L'analyse du Puzzle de Carroll est proposé en 3^e dans de nombreux ouvrages pour l'enseignement, or Nin (1992) montre que l'on débouche sur une équation de Pell-Fermat et elle a donné lieu en son temps à un joli problème de préparation à l'agrégation interne... Mais notre intérêt de professeurs n'est pas dans le travail mathématique de résolution des problèmes dans leur généralité et de construction des théories nécessaires : faire des mathématiques c'est « résoudre des problèmes dans toute leur généralité et pour cela produire les théories les plus larges possible », ce n'est pas notre objet car *le niveau théorique est, dans le cas de l'enseignement, donné par avance*.

L'acculturation aux mathématiques dans l'enseignement obligatoire est donc limitée aux premiers éléments de théorie qu'il est possible de produire pour attaquer quelques classes de problèmes bien particuliers. Pourtant, comme nous l'avons éprouvé dans le cas de la résolution du problème général correspondant à l'activité initiale, cette activité n'est mathématiquement motivée que si elle a un avenir et si son étude peut se poursuivre par des éléments théoriques, si elle produit des résultats qui donneront des outils mathématiques efficaces, utilisables dans de nombreuses occasions pour devenir routiniers, etc. Le niveau théorique auquel nous nous arrêterons, au Collège, est relatif aux *tableaux de nombres* (comme premières mises en forme de relations numériques) et aux *formules*

(comme descriptions de procédures de calcul). La reconnaissance de la dimension mathématique de ces objets appartient à *l'épistémologie*

- Savante :Serfati (2005) montre que les formules sont des descriptions de procédures ;
- Scolaire :Erdogan (2006, thèse dirigée par Pierre Duchet) montre que les tableaux sont un premier contact avec les fonctions, en combinatoire).

Les outils d'attaque de la question initiale font son intérêt : elle définit une des tâches qui se résolvent à l'aide de ces outils et peut conduire à des routines d'attaque numérique (outillées par des moyens de calcul) de certains problèmes. Soit, par une technique de *mise en tableau* des nombres en relation (dès la 6^e, en continuité avec le travail sur les tableaux de proportionnalité mais aussi en rupture avec le raisonnement proportionnel). Soit, par une technique de *mise en formule* des nombres en relation (dès la 5^e, en continuité avec le travail sur les tableaux et au delà avec les représentations graphiques de tableaux puis de relations données par des formules à une variable comme moyen de classification des types de relations numériques par le degré de la formule). Tableaux, puis fonctions et formules sont bien les outils premiers de la *combinatoire*.

Le programme de travail qui peut être ouvert par l'activité étudiée appartient donc à ce domaine mathématique, qui peut *fonder la production de deux outils* mathématiques qui sont l'enjeu des programmes du Collège. Mais ce domaine n'est pas cité dans les programmes, les outils ainsi produits devront donc appartenir *implicitement seulement* à la combinatoire et bientôt ils devront être transférés explicitement dans un autre domaine mathématique, le *cadre* de l'analyse au sens de Douady, 1986). Ce n'est pas pour le Collège. La capacité de ces outils à modéliser des problèmes géométriques devra suffire à en motiver le développement, dans le curriculum réel, en 4^e et 3^e. C'est ce qu'explore le travail du groupe de l'IREM d'Aix-Marseille. Mais les autres groupes de la CIIREM ne font pas moins, même si on ne peut ici rendre compte de ce que chacun a entrepris.

L'activité « encadrement du miroir » doit donc être pensée non pas comme ouvrant sur un problème, mais comme permettant de *définir une situation didactique initiale, génératrice d'une étude à long terme, relative aux usages puis aux propriétés d'un outil mathématique* (le travail des relations numériques par tableaux puis par formules), la dimension théorique nécessaire à la résolution du problème générique n'étant pas l'enjeu de l'étude. Une *situation* et non pas un *problème* : c'est-à-dire, un moyen d'enseignement, mais surtout pas l'origine d'une théorie ou l'essence d'une pratique, questions qui seront, pour nous et par principe, métaphysiques.

Notre travail de didacticiens consiste à identifier, avec les professeurs et à leur intention, des *outils* techniques, qui ne sont pas toujours décrits dans les travaux mathématiques théoriques mais qui permettent de gérer le curriculum réel que les professeurs mettent en place au quotidien et de même, à leur fournir des *résultats*, des *dispositifs*, des *faits*, pouvant donner des objets d'enseignement conformes aux programmes. C'est ainsi que nous proposons de réaliser le travail de développement que demande l'INRP.

Les outils sont peut-être les éléments les moins visibles. Ils sont identifiés par des systèmes sémiotiques, des *notations* « calculables » et les *notions* associées (tableau de nombres, colonne des différences ; programmes de calcul écrits comme formules d'un tableur ; etc.) dont la vie appartient parfois seulement à la culture d'un niveau d'études. Les résultats sont énoncés et lorsqu'ils sont de quelque ampleur on les nomme théorèmes, les dispositifs s'appuient sur leur usage et certains comme l'algorithme de multiplication sont suffisamment connus pour figurer au programme des études. Ces systèmes de notations et de notions à *usage didactique* sont indispensables au professeur comme aux élèves parce qu'ils correspondent à leur niveau de travail théorique. Mais si ces systèmes langagiers et symboliques, étroitement associés, ne sont pas stables et identifiés comme *les enjeux officiels du travail de la classe*, les activités des élèves et du professeur ne produisent pas de savoir mathématique visible et bientôt, ces activités ne sont plus légitimes.

C'est en ce sens que notre travail de développement participe à la production d'un curriculum effectif : nous nous sommes donné pour enjeu de produire, systématiquement et en coopération, les supports de situations d'enseignement robustes. Dans un premier temps, nous le faisons en soumettant notre travail (tel qu'en chaque lieu il réalise une partie du projet global) à la critique des autres équipes, dans le deuxième temps nous le ferons en le rendant public (sous le nom de ses auteurs, avec les critiques associées) et dans un troisième temps en participant (dans un forum dédié à ouvrir, par exemple, sur le site EducMath) aux débats éventuels auxquels ses usages donneront lieu.

Les documents dans le travail ordinaire du professeur

Dans cette partie, nous allons donner quelques éléments sur les relations possibles entre le travail ordinaire du professeur et la prise en compte, dans ce travail ordinaire, de documents ou travaux issus de la recherche de développement. Insistons tout d'abord sur le fait que la situation du professeur n'est pas identique à celle du « professeur d'essai » qui travaille dans le cadre d'une ingénierie, et pas seulement parce qu'elle en serait une sorte de version « imparfaite ». La démarche de l'ingénierie est en quelque sorte une démarche « descendante »³, qui part d'une conception de l'enseignement des mathématiques en général, qui réfléchit à la place de la notion mathématique à enseigner dans un ensemble mathématiquement organisé et cohérent, pour ensuite produire une suite de leçons dont chacune joue un rôle spécifique dans cette organisation d'ensemble.

La démarche du professeur est sans doute rarement celle-ci, notamment parce que la relation au savoir n'est pas le seul déterminant dans la situation du professeur. Par exemple, le professeur peut partir du projet d'un exercice, pris dans un manuel scolaire, par exemple, et chercher à insérer ce problème dans sa construction du thème mathématique et dans ses pratiques didactiques. Ou bien il peut partir de ce qu'il a observé de l'activité des élèves dans des situations antérieures, qu'il s'agisse des mêmes élèves ou d'une autre classe pour chercher à modifier son projet de leçon voire à le construire, parfois en perdant de vue la construction du thème mathématique, et donc le savoir. Il peut aussi se reposer entièrement sur un manuel pour penser les projets didactiques et imaginer son rôle seulement à partir de la forme de la relation pédagogique de l'institution scolaire.

Reprenons maintenant l'une des questions posées aux intervenants et participants de ces journées :

- *Quelles situations mathématiques concevoir, quels dispositifs construire dans la classe, quelles ressources pédagogiques construire par et pour les enseignants et quelle mutualisation ?*

La question qui est posée oriente la réponse vers « la classe », ce qui risquerait d'être compris comme « l'ici et maintenant de la classe ». Or cet ici et maintenant est conditionné par la situation du professeur dans son ensemble, même si on ne s'intéresse qu'au professeur dans sa dimension didactique, ce qui est déjà une restriction. En effet, le professeur agit au contact avec ses élèves,

3 En utilisant ce vocabulaire, nous nous référons à des modèles théoriques qui visent à décrire le travail du professeur d'une façon organisée et hiérarchisée. Plusieurs solutions (compatibles) de cette question existent. Le modèle développé par Claire Margolinas est une conséquence du développement de l'analyse de la structuration du milieu (Brousseau, 1990; Margolinas, 1995) . Il vise à décrire des composantes de la situation du professeur et à interroger leurs relations. Les composantes principales qu'elle considère sont les suivantes : +3 Valeurs et conceptions sur l'enseignement/apprentissage : projet éducatif (valeurs éducatives, conceptions de l'apprentissage et de l'enseignement) ; +2 Construction du thème : construction didactique globale dans lequel s'inscrit la leçon (notions à étudier et apprentissages à réaliser) ; +1 Projet de leçon : projet didactique spécifique pour la leçon observée (objectifs, planification du travail) ; 0 Situation didactique : réalisation de la leçon (interactions avec les élèves, prises de décision dans l'action) ; -1 Observation de l'activité des élèves : perception de l'activité des élèves (régulation du travail délégué aux élèves). Dans le modèle de la Théorie Anthropologique du Didactique, TAD (Chevallard, 2002, 2002) , l'échelle des niveaux de co-détermination didactiques (sujet ; thème ; secteur ; domaine ; discipline ; pédagogie ; école ; société ; civilisation) fonctionne comme une base de décomposition des assujettissements du professeur regardé comme sujet de différentes institutions – pour un exemple d'utilisation de cet outil (Wozniak & Chevallard, 2005).

mais cette action est très largement conditionnée par les choix qu'il a fait en amont de la situation de classe : préparation de la leçon, choix de la succession des objets mathématiques introduits dans la classe, etc.

Le problème se déplace donc, la question deviendrait plutôt :

- *Quelles mathématiques, pour quels dispositifs? Les professeurs ont-ils des demandes de ressources, lesquelles?*

Nous allons maintenant nous appuyer sur les résultats d'une enquête⁴ réalisée dans le cadre du groupe de recherche de développement DéMathE en 2003-2004, sous forme d'entretien semi-directif d'une heure auprès de 11 professeurs des écoles non débutants. Ces entretiens portaient sur les ressources utilisées, en mathématiques, par ces professeurs, dans tous les aspects de leur enseignement (conception de leur enseignement des mathématiques, planification de l'année, détermination des dominantes de l'année, programmation et progression selon des thèmes mathématiques et des chapitres, projet de leçon particulière, conduite des situations, observation des difficultés des élèves).

Disons tout de suite que nous pensons a priori que les réponses à cette enquête sont sans doute spécifique des professeurs du premier degré, ou du moins pourraient l'être, à notre connaissance une étude similaire n'existe pas pour le second degré. Nous allons décrire ce qui ressort de l'enquête du point de vue d'une ouverture des professeurs à une transformation de leur pratique, en mathématiques.

Les professeurs considèrent que les valeurs et les conceptions de l'enseignement sont en quelque sorte personnelles, il ne s'agit pas de les discuter, il s'agit d'un déjà-là, très fortement déterminé par le genre professionnel et les doxas les plus audibles depuis la place du professeur – ce qui peut être parfois assez local, différent selon les académies ou les circonscriptions, par exemple. Implicitement, les manuels scolaires et les formes d'enseignement sont choisis en partie en fonction de ces valeurs.

De même, contrairement à ce qui sous-tend parfois la relation entre l'innovation et les professeurs, les professeurs interrogés ne sont pas vraiment demandeurs de nouveaux projets de leçon. Il faut développer un peu cette affirmation. Chaque professeur semble rencontrer, assez tôt dans la pratique, un élément – souvent un manuel et/ou un livre du maître – sur lequel il investit beaucoup de travail pour en adopter les façons et qui façonne sa pratique. Même quand il change de manuel, les « lunettes » adoptées restent en place, ce qui justifie d'ailleurs de changer le moins possible de support, et de ne pas apprécier de changements trop brusques dans l'édition d'un manuel d'une année sur l'autre. Le document « générateur » (Margolinas & Wozniak, soumis) joue un rôle très important dans la façon dont le maître se perçoit par rapport aux autres. Dans ces conditions, le lancement d'un nouveau manuel, ou d'un nouveau type de manuel, passe nécessairement par un travail intense de diffusion via la formation, et ne va pas de soit – les éditeurs le savent bien! Les maîtres peuvent être demandeurs de nouveaux projets de leçon, parce que leur pratique a sans doute besoin de se renouveler, mais toujours dans un cadre suffisamment stable. Dans les marges de leur enseignement principal (introduction de nouvelles notions, travail de la technique), les professeurs organisent toutes sortes de dispositifs qui permettent, notamment, une certaine différenciation. Au delà du document générateur (manuel de la classe ou non) tous les documents sont bons pour permettre aux élèves de s'entraîner, voire tout simplement de s'occuper tout en faisant des mathématiques.

En fait, les besoins mathématiques s'expriment peu dans les entretiens, sauf à deux niveaux : la construction de la progression ou de la planification en mathématiques, l'observation de l'activité des élèves. Commençons par cet aspect d'observation. Tout se passe comme si les professeurs nous disaient : « je sais enseigner, pas de problème... sauf pour 20% des élèves (pourcentage qui peut varier selon les discours) ». « Pour ceux-là, les élèves *en difficulté*, je suis demandeur d'aide, de suggestion, voire je réclame qu'on me fournisse des aides ». L'observation des difficultés des

⁴ Voir (Margolinas et al., 2004; Margolinas & Wozniak, soumis)

élèves, souvent à la fin d'un processus d'enseignement supposé provoquer l'apprentissage, est une réalité douloureuse, qui pousse les maîtres à une demande. Dans le projet DéMathE, nous avons pris très au sérieux cette demande et cette possibilité d'ouverture, en nous centrant toujours sur des difficultés qui persistent, même si c'est seulement pour certains élèves – du moins en apparence. Les professeurs, qui décrivent souvent difficilement les objectifs mathématiques de leurs leçons, par exemple, font souvent preuve d'une grande finesse dans l'observation des difficultés qui résistent. Mais la possibilité de description raisonnée manque, parce que le cadre d'analyse n'est pas connu.

En ce qui concerne la construction d'une progression, la question est toute différente, et ne s'exprime pas de la même manière. Beaucoup de professeurs vivent leur enseignement - des mathématiques, mais sans doute pas seulement - sur un mode de « surlignage des compétences successives ». Ce mode d'organisation – ou plutôt de désorganisation – est sans doute d'autant plus fort que la problématique des « compétences » est forte et légitimée (Schneider, 2006). Les professeurs qui s'expriment sur cette difficulté sont ceux qui ont le sentiment d'avoir à faire des choix, sans bien savoir sur quelle base les faire. Ils nous disent parfois que c'est « le plus difficile ». Cette difficulté ne les empêche pas d'enseigner au quotidien, mais certains d'entre eux ressentent ce que l'observation des classes ordinaires nous révèle, c'est-à-dire un manque d'organisation mathématique, qui conduit à l'impossibilité de choix cohérents, y compris bien dans les projets de leçon et les situations de classe. Le problème qui se pose est de comprendre sous quelle forme il serait possible de mettre à la disposition des professeurs certains savoirs concernant l'organisation curriculaire mathématique.

En guise de conclusion

Les contraintes sont multiples et l'enseignement est déterminé à plusieurs niveaux relatifs aux mathématiques d'un côté, aux professeurs et aux élèves de l'autre, ce qui interdit une intervention directe ; des points d'appui d'une évolution possible peuvent pourtant être identifiés, autour de l'observation des *erreurs persistantes des élèves ordinaires* et des *élèves en difficulté, comme des besoins exprimés des professeurs* : enquête DéMathE, groupes IREM (ateliers, boutiques, forums).

Quelles situations mathématiques concevoir, quels dispositifs construire dans la classe, quelles ressources pédagogiques construire par et pour les enseignants et quelle mutualisation ?

C'était la question qui nous était posée. Nous savons d'expérience qu'il n'y a pas de mutualisation sans théorie commune, pas de ressources produites par les professeurs eux-mêmes en position de professeur, sinon pour eux-mêmes. Produire des ressources pédagogiques est un travail de la noosphère, ce qu'a fait à sa manière le groupe ERMEL. Faute de quoi, les manuels élèves servent au professeur.

Les *dispositifs* dans la classe sont donc à « mettre en place » par le professeur, pour les élèves.

Les *ressources* sont à « mettre à disposition » par l'INRP par exemple, pour les professeurs, ce qui suppose un *suivi des usages* (sur site ou/et à distance : *forum* d'utilisateurs et utilisateurs / concepteurs et *formations*).

Ce qu'il y a à concevoir ce sont donc des *situations* au sens plein de Brousseau, c'est-à-dire à la fois des contenus d'enseignement et les conditions de leur enseignement. Mais le travail des professeurs pour conduire les enseignements décrits ainsi n'est pas simple et ne va pas de soi. L'étude des difficultés que les professeurs rencontrent est aussi l'une de nos questions de travail et c'est sur cette question, un peu en aval de ce qui fait le cœur de notre ligne d'attaque, que s'est centrée l'équipe de l'IREM Paris VII et que travaillent les didacticiens des mathématiques de l'UMR ADEF, à Marseille. On remarquera enfin que l'étude des situations permettant d'enseigner les gestes mathématiques spécifiques des mathématiques que sont : le travail des définitions, l'implication ou les démonstrations, est une question qui ne nous est pas étrangère puisque, un peu en amont de notre problématique centrale cette fois, une équipe de l'IREM de Grenoble travaille autour de « Maths à modéliser » et des situations de recherche, tandis que les autres équipes sont sur des

problèmes d'enseignement semblables à celui que nous avons exposé, ce que l'on peut vérifier en suivant les publications de ces équipes dans la revue *Petit x*.

Références

- ASSUDE, T., MERCIER, A., & SENSEVY, G. (soumis). L'action didactique du professeur dans la dynamique des milieux. *Recherches en Didactique des Mathématiques*.
- BROUSSEAU, G. (1973). Peut-on améliorer le calcul des produits des nombres naturels? *Cahier de l'enseignement élémentaire*, 13, 195-237.
- BROUSSEAU, G. (1990). Le contrat didactique: Le milieu. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9(3), 309-336.
- BROUSSEAU, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage.
- CHEVALLARD, Y. (2002). Organiser l'étude. Ecologie et régulation. In J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot & R. Floris (Eds.), *Actes de la 11ème école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 41-56). Grenoble: La Pensée Sauvage.
- CHEVALLARD, Y. (2002). Organiser l'étude. Structures et fonctions. In J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot & R. Floris (Eds.), *Actes de la 11ème école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 3-22). Grenoble: La Pensée Sauvage.
- DOUADY, R. (1986). Jeux de cadre et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 5-31.
- ERDOGAN, A. (2006). *Le site mathématique d'un objet d'enseignement, outil pour l'aide à l'étude*. Thèse de doctorat, Université Paris 7.
- FLUCKIGER, A., & MERCIER, A. (2002). Le rôle d'une mémoire didactique des élèves, sa gestion par le professeur. *Revue Française de Pédagogie*, 141, 27-35.
- LEBESGUE, H. (1975). *La mesure des grandeurs*. Paris: Librairie scientifique et technique Albert Blanchard.
- MARGOLINAS, C. (1995). La structuration du milieu et ses apports dans l'analyse a posteriori des situations. In C. Margolinas (Ed.), *Les débats de didactique des mathématiques* (pp. 89-102). Grenoble: La Pensée Sauvage.
- MARGOLINAS, C. (2002). Situations, milieux, connaissances: Analyse de l'activité du professeur. In J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot & R. Floris (Eds.), *Actes de la 11ème école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 141-156). Grenoble: La Pensée Sauvage.
- MARGOLINAS, C., CANIVENC, B., DE REDON, M.-C., RIVIÈRE, O., & WOZNIK, F. (2004). Que nous apprend le travail mathématique hors classe pour la formation des maîtres. *Actes de 30ème colloque Inter-IREM des formateurs et professeurs chargés de la formation des maîtres*.
- MARGOLINAS, C., & WOZNIK, F. (soumis). Usage des manuels dans le travail du professeur: L'enseignement des mathématiques à l'école primaire. *Revue des sciences de l'éducation* (Numéro spécial: Les manuels scolaires: réformes curriculaires, développement professionnel et apprentissages des élèves).
- MATHERON, Y., & SALIN, M.-H. (2002). Les pratiques ostensives comme travail de construction d'une mémoire officielle de la classe dans l'action enseignante. *Revue Française de Pédagogie*, 141, 57-66.
- NIN, G. (1992). Le puzzle de Lewis Carroll. Modèle local, modèle régional. *Petit x*, 32, 67-76.
- SCHNEIDER, M. (2006). Comment des théories didactiques permettent-elles de penser le transfert en mathématiques ou dans d'autres disciplines? *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 26(1), 9-38.
- SERFATI, M. (2005). *La révolution symbolique: La constitution de l'écriture symbolique mathématique*. Paris: Pétra.

Intervention collective aux Journées Mathématiques de l'INRP, juin 2006

WOZNIAK, F., & CHEVALLARD, Y. (2005). Niveaux de détermination didactique et enseignabilité de la statistique. Actes de *1er Congrès International sur la Théorie Anthropologique du Didactique. Société, École et Mathématiques: Apports de la TAD.*, Baeza.