



**HAL**  
open science

**Ce que nous pouvons apprendre des demandes sociales sur l'école, telles que la nécessité de produire des parcours diversifiés au Collège, des enseignements modulaires au Lycée, de former à la citoyenneté dans le cadre d'une Ecole pour tous**

Alain Jacques Mercier

► **To cite this version:**

Alain Jacques Mercier. Ce que nous pouvons apprendre des demandes sociales sur l'école, telles que la nécessité de produire des parcours diversifiés au Collège, des enseignements modulaires au Lycée, de former à la citoyenneté dans le cadre d'une Ecole pour tous. 1994. hal-01994958

**HAL Id: hal-01994958**

**<https://hal.science/hal-01994958>**

Preprint submitted on 25 Jan 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**CE QUE NOUS POUVONS APPRENDRE  
DES DEMANDES SOCIALES SUR L'ÉCOLE**

telles que la nécessité de produire des parcours diversifiés au Collège, des enseignements modulaires au Lycée, ou quant à l'exigence de formation à la citoyenneté et à l'idée d'une Ecole pour tous

*Alain Mercier*

*Notes de travail pour un séminaire invité, sur une question ouverte*

**APOLOGIE et PRESCRIPTIONS, 1  
Pourquoi (encore) faire (faire) des mathématiques à l'école ?**

**Introduction**

C'est une question difficile. En effet, traiter d'une telle question, c'est toujours plus ou moins se placer dans une double perspective, à la fois prescriptive et apologétique, qu'on pourrait résumer de la manière suivante : je vais vous montrer à quel point c'est intéressant de faire (faire) des mathématiques, et vous vous trouverez obligés d'en faire (faire)<sup>1</sup>.

Notre "statut" de didacticiens des mathématiques ne nous donne pas de compétence particulière pour éviter cette détermination, et pour répondre autrement que par l'apologie ou la prescription, à la fois parce que la question en elle-même n'a pas fait l'objet de recherches empiriques précises (même si les travaux récents de Brousseau ou de Chevallard ont ouvert des pistes), et aussi, il faut y insister, parce que quand bien même de telles investigations existeraient, elles ne pourraient donner que des éléments techniques en réponse à une question politique (ceci ne signifiant évidemment pas que de telles recherches ne sont pas souhaitables).

Même si cette première partie rend compte d'un travail mené en commun avec Gérard Sensevy, je ne me détacherai pas complètement de l'apologie-prescription, mais je tenterai de le faire en connaissance de cause, pour vous permettre de vous emparer consciemment, à votre propre usage, d'une argumentation à l'appui de la thèse suivante : *il peut être socialement intéressant de faire (et donc, de faire faire) des mathématiques à l'école, même et surtout de nos jours, mais cet intérêt dépend de la manière dont on les fait faire.*

---

<sup>1</sup> Cette première partie de mon exposé provient d'un travail mené en commun avec Gérard Sensevy, il a abouti au texte d'un article, soumis à la revue *Le Télémaque*.

Tout d'abord, je tenterai de problématiser la question du titre dans un cadre anthropologique, cela signifiera poser un certain nombre d'assertions, qui seraient candidates à devenir hypothèses de recherches, et à proposer l'organisation d'une réflexion dans ce domaine. Ces assertions permettront d'autre part de fournir le cadre de une partie ultérieure, où j'essaierai de montrer *des* raisons d'être de la discipline mathématique, à l'école pour tous.

C'est une première réflexion, modeste et incomplète, destinée à être reprise, et qui n'a d'autre but que de fournir certains éléments d'un débat vaste et complexe.

### **Obsolescence interne et externe**

Si la question du titre se pose, c'est principalement, en raison de l'obsolescence sociale des enseignements scientifiques. Nous ne désignons pas ici le vieillissement interne aux connaissances elles-mêmes (l'évolution des savoirs de référence qui produit la modification des savoirs enseignés), mais cet autre phénomène : les objets d'enseignement s'usent. Qu'entendons-nous par ce terme ?

Considérons tout d'abord le fait suivant : certains objets de savoir, enseignés pendant une certaine période, disparaissent des programmes d'enseignement bien qu'ils demeurent liés aux savoirs de référence. On peut répondre, grâce aux résultats d'un certain nombre de recherches, de la manière suivante : sous la pression de "l'innovation", mot qui peut traduire le poids permanent de la noosphère sur le curriculum. Cette innovation-là a les traits de la mode : son succès amène rapidement sa condamnation. Par exemple, sous la pression d'une sorte de vulgate piagétienne, on va décider que les difficultés de l'enseignement de la "règle de trois" viennent de ce qu'elle ne peut être comprise par les élèves qui n'ont pas atteint le "stade des opérations formelles" et cette technique va disparaître de l'enseignement élémentaire et de l'enseignement tout court. En revanche, les "opérateurs-machines" qui ont remplacé la règle de trois et qui ont commencé d'être enseignés en 1974-75 sont sortis des programmes en 1978 mais sont restés à la mode pendant dix ans encore. Aujourd'hui, un élève "approche la notion de fonction numérique, en particulier dans le cadre de situations de proportionnalité" [...] qu'il "reconnait dans des cas simples (échelles, pourcentages) ;" et traite par "utilisation de tableaux, diagrammes, graphiques". Ces variations ne tiennent pas seulement à la

"dignité mathématique" de ces objets. Pour des raisons semblables mais inverses du point de vue de la dignité mathématique, la notion de valeur absolue d'un nombre, l'implication et l'équivalence logique ont été déclarés "trop complexes" pour les élèves du collège et leurs symboles eux-mêmes en ont été rejetés, comme s'ils étaient les emblèmes de pratiques mathématiques que le Collège, devenu *complément d'études générales de l'Ecole pour tous*, ne pourrait légitimement porter.

Ces phénomènes pourraient ne représenter que des événements mineurs dans l'histoire générale de la vie (ou de la mort) des objets de savoir à l'école. Mais il semble bien au contraire que, pour des raisons d'*écologie mathématique des mathématiques enseignées*, l'obsolescence externe puisse être en partie responsable d'une forme de désagrégation interne des savoirs. En effet, les savoirs qui disparaissent entretenaient des liens avec d'autres, ils pouvaient par exemple justifier la présence des savoirs qui les outillent (c'est ce que l'étude écologique de la transposition a identifié comme "la relation trophique" (RAJOSON, 1989, thèse)), ou inversement, et alors que la relation trophique est "pour vivre, il faut être mangé" ils disparaissent alors qu'ils outillaient des savoirs qui ne trouveront plus à se nourrir. C'est le cas de l'enseignement des éléments technologiques qui faisaient vivre les techniques arithmétiques de réduction des fractions au même dénominateur : étude des nombres premiers, PPCM et PGCD ont disparu des programmes du collège sans aucune forme de procès.

La désorganisation qui s'ensuit fait qu'on rencontre dans le curriculum des objets isolés, qu'on enseigne encore parce qu'ils sont là, mais dont on aurait beaucoup de mal à justifier la présence. Ainsi, ces objets dont on perpétue l'enseignement ne survivent-ils plus que difficilement (ils n'appartiennent pas à un "tout structuré"), comme c'est le cas de la proportionnalité - qui devient à son tour un "concept" dont la connaissance devient hors de portée de l'école élémentaire, renvoyé aux classes de "fin d'études" du Collège ou même, aux études technologiques ou professionnelles des filières du même nom. Lorsque les outils techniques d'attaque efficace des problèmes correspondants disparaît et que les élèves (comme leurs professeurs) s'en trouvent démunis, les problèmes qui donnaient une raison d'être à ces savoirs ne peuvent plus être posés et l'enseignement s'en trouve encore plus "abstrait" et "scolaire", c'est-à-dire "vide de sens pratique" et "vide de sens théorique". S'il semble, aux ignares des questions de muséologie que sont les didacticiens des mathématiques, relativement facile d'imaginer l'approche culturelle des problèmes d'un champ disciplinaire, il n'est pas aisé d'organiser une approche "culturelle" des savoirs qui sont outillés de techniques instrumentées (MERCIER, 1994, article de Didaskalia).

*L'écologie didactique* des savoirs est gravement touchée par les

disparitions de telles techniques. Et lorsque la logique qui pouvait présider à l'organisation d'un curriculum est mise en danger, ce sont les *raisons* pour lesquelles telle ou telle notion étaient enseignée qui tendent à s'estomper. Le travail de ces savoirs perd alors toute substance, ils deviennent comme les rituels démotivés dont ne subsiste plus que la forme vide : la perte de substance menace bientôt de s'étendre à l'ensemble du curriculum.

Les programmes, pourtant, demeurent substantiels. D'autres objets leur sont intégrés, dont les relations avec l'existant échappent parfois aux nécessités de l'organisation interne. La difficulté de l'enseignement et de l'étude de ces programmes, chaque fois "refondus" pour être "allégés", n'en diminue donc pas. Car l'enseignement de la nouvelle organisation mathématique ainsi promue nécessiterait des savoirs dont la pertinence n'a pas été reconnue et qu'une tradition d'enseignement ne peut identifier<sup>2</sup>. Surtout lorsque les réformes se succèdent à un rythme tel qu'il est arrivé qu'une commission nouvelle cherche à repenser la première année du curriculum alors même que l'on commence d'enseigner la dernière. On comprend alors comment des phénomènes d'obsolescence, en apparence anodins, peuvent contribuer à compromettre l'équilibre d'une discipline, parce qu'ils affaiblissent l'ordre *interne* des raisons aux moyens desquelles on peut justifier l'organisation d'une discipline, parce qu'ils affaiblissent en conséquence l'ordre *externe* des problèmes que la discipline peut porter (ce sont les causes de son enseignement) et qu'ils affaiblissent, à terme, l'enseignement de la discipline elle-même. L'ordre interne des raisons d'une organisation de savoirs enseignés constitue la viabilité du curriculum correspondant, mais cet ordre ne peut être travaillé sans qu'on se place du point de vue de chacun des sujets qui l'éprouveront. Soit, du point de vue de l'élève qui les étudie et du point de vue du professeur qui les désigne à l'étude, et du point de vue - *non didactique* c'est-à-dire *social* - des utilisateurs qui rencontrent les problèmes qui sont les causes de l'enseignement qui est donné.

---

<sup>2</sup> Ainsi que le fait explicitement par exemple le projet AHA (approche heuristique de l'analyse) dont SCHNEIDER (à paraître) rend compte.

### **Contre l'obsolescence, le contrat social**

Les disciplines ne sont pas immortelles. Les réflexions récentes<sup>3</sup> montrent que rien ne permet d'affirmer que l'enseignement des mathématiques puisse perdurer : l'exemple du latin, passé en deux décennies de pilier du système éducatif à discipline moribonde, est là pour l'attester. Si l'on veut continuer à enseigner des mathématiques à l'école (de la maternelle à la terminale), il faut donc veiller aux *raisons d'être* (aux causes) de cette discipline

(comme aux autres, d'ailleurs), et faire en sorte que les professeurs se les approprient, les éprouvent, et les instituent au coeur de leur enseignement <sup>4</sup>. Mais cela ne saurait faire l'objet d'un décret (en admettant qu'on puisse trouver quelqu'un pour décréter une telle chose, ce qui semble être possible : la prudence qui faisait nommer "instructions" - et non "décrets" ou "arrêtés" - les textes ministériels sur les programmes semble en voie de disparaître).

Il faut débattre nationalement de ce problème. Il est temps, semble-t-il, de redéfinir le contrat social sur lequel l'école républicaine s'est établie. Quels sont les savoirs qui doivent être enseignés ? Pour le dire négativement, à la manière de CHEVALLARD (1997), quels sont les savoirs dont "on a le droit de ne pas être exclus" ? Une manière de traiter l'obsolescence des savoirs et ses effets pervers, s'il en existe, nous semble résider dans la définition publique des problèmes dont devront traiter les savoirs à enseigner, ce qui supposerait tout d'abord de se rendre collectivement capables de décrire ces problèmes, puis les finalités que nous devons fixer à l'appropriation de ces savoirs (JOHSUA, 1996 sur le contrôle des sciences), ce qui supposerait ensuite que chacune des disciplines, dans le souci d'éclairer le débat, puisse décrire en quoi ses raisons d'être rencontrent ces finalités.

## **OUVERTURE, 1**

### **Instruire, Former, Eduquer,**

### **quelle est la formation de valeurs possible, à l'école ?**

---

<sup>3</sup> CHEVALLARD (1998). , Questions vives, savoirs moribonds : le problème curriculaire aujourd'hui, *Actes du Colloque Défendre et transformer l'école pour tous*, IUFM d'Aix-Marseille, 1998.

<sup>4</sup> Les raisons d'être présentées maintenant sont l'ordre externe des raisons, qui est la cause de l'existant dont nous avons décrit l'organisation interne, qui rend compte de sa forme et de sa niche écologique.

### **Introduction**

Cette partie provient de la tentative de redéfinition de ces objets que j'ai conduite dans le cadre de mon habilitation à diriger des recherches en sciences de l'éducation. Elle tente de montrer comment le travail d'éducation peut (aussi) se fonder sur la tâche primaire des institutions modernes d'enseignement (CHEVALLARD & MERCIER, 1988) qu'est la transmission des savoirs, d'une génération à l'autre. Je partirai de ce constat : l'attribution du nom d'un savoir à une stratégie d'action observée dans un contexte scolaire peut toujours être dénoncée comme un « Effet

Jourdain », une attribution de savoir induite. Or *l'attribution de réussite didactique est une nécessité interne de toute direction d'étude*, dans la mesure où la confiance dans l'institution et la foi dans l'effet du contrat didactique ne s'établissent et se maintiennent que par l'épreuve chaque fois renouvelée de la réussite didactique de l'action d'étude engagée par l'élève (MERCIER, Journées de Montréal, à paraître en 1999). De plus, cette nécessité est manifestement l'élément clé de la production d'un temps didactique, de la production de l'espace didactique pour les élèves, et de toute transposition didactique.

Face à ce problème récurrent, seule l'analyse épistémologique des situations d'usage et d'enseignement des savoirs peut donner - à la société en général et aux producteurs de savoir en particulier - les éléments d'un contrôle technique des savoirs enseignés. Seule, cette analyse peut donner, aux agents du système d'enseignement, des éléments techniques pouvant *rendre compte des choix* qu'ils se proposent de faire. Mais la réussite sociale de la théorie des situations dans cette fonction suppose à la fois que l'organisation de l'enseignement devienne relativement autonome des champs de production des savoirs et que la production de savoirs d'enseignement soit considérée comme un acte de production savante. Pour devenir complémentaires, ces deux exigences nécessitent une institution capable de les porter ensemble, ce qui - dans le cas qui nous intéresse - n'est pas plus, aujourd'hui, le fait de l'institution mathématique que celui de l'institution Sciences de l'Éducation. Faute d'une épistémologie sociale reconnaissant la présence dense du didactique, ce qui aiderait à reconnaître l'autonomie relative du didactique dans les institutions qui portent pour la société le dessein de reproduire les rapports humains au monde, le travail du transfert des savoirs aux situations qu'il instrumente dans les institutions

de production reste de l'ordre aléatoire des compétences personnelles de tel ou telle.

### **L'écologie institutionnelle des savoirs**

Le processus de transposition didactique n'est pas de nos jours sous le contrôle technique d'un groupe de praticiens spécialisés, mais sous le regard aléatoirement critique des producteurs légitimes de savoir (en mathématiques, ce sont des savants ; en réparation navale, ce sont des ingénieurs et des ouvriers ; en ostréiculture, ce sont des biologistes et des techniciens ; etc.). De ce fait, la transposition didactique est un phénomène qui doit demeurer socialement inconscient, pour que les inventeurs d'une organisation de savoirs (qui, dans leur institution, sont les praticiens de ces savoirs) ne dénoncent pas la substitution d'objet dont l'école se rend coupable. Car celle-ci propose aux élèves des situations transposées dans lesquelles les producteurs de savoir ne reconnaissent plus leurs produits, parce que les problèmes que le savoir résout sont tout autres dans la situation de production et dans l'organisation didactique pour sa reproduction<sup>5</sup>.

La fonction de la noosphère est ainsi définie : elle représente aux producteurs de mathématiques des organisations qu'ils reconnaissent. Elle présente aux enseignants ces mêmes organisations, qui doivent leur sembler enseignables : aux extrémités de la chaîne chacun se trouve alors désintéressé des mains sales de l'autre ; mais les organisations noosphériques ne correspondent pas plus aux organisations savantes ou professionnelles qu'aux organisations didactiques, il s'en faut de beaucoup, alors que chaque noosphérique prétend toujours représenter l'une des extrémités de la chaîne. Enfin, c'est le professeur qui transformera ces objets transactionnels en objets enseignés, s'il est possible : cela suppose qu'il travaille en paix et que des manières de faire traditionnelles s'établissent progressivement.

Or, tel est le résultat didactique essentiel auquel mènent les recherches didactiques que j'ai menées : ***l'efficacité d'une organisation didactique faible tient à la structuration solide de l'organisation épistémique qui la fonde***. Cette organisation épistémique est traditionnellement identifiée

---

<sup>5</sup> Ainsi, dans l'exemple princeps étudié par Chevallard et Johsua (1982), la notion de distance est inventée par Fréchet pour donner une mesure de la ressemblance de deux fonctions différentes, tandis que dans l'enseignement actuel de la classe de Seconde, la distance de deux points identiques est la mesure de l'espace qui les sépare.

comme *une discipline*, selon une dénomination qui nous paraît juste dès lors que nous avons identifié la pertinence du travail noosphérique qui transforme tout projet d'enseignement en discipline scolaire : une



discipline est un objet d'enseignement robuste, certes, peu fiable, mais relativement efficace dès que l'on considère son faible coût de production et d'usage. *Pour autant, l'affaiblissement épistémologique d'une discipline n'est pas le meilleur moyen d'assurer l'évolution d'une organisation didactique existante !*

Ainsi peut-être, la recherche d'une meilleure efficacité du système d'enseignement ne passe-t-elle pas seulement par la recherche d'organisations didactiques plus fortes, capables de s'appuyer sur des organisations épistémologiques plus souples, plus vives, telles que les propose la recherche des situations fondamentales pour un savoir. Cette recherche pourrait en revanche s'appuyer sur la recherche d'organisations mathématiques plus visibles, c'est-à-dire donnant lieu à un travail didactique explicite. Prise en ce sens, la théorie des situations est un guide du questionnement épistémologique, parce qu'elle donne à la fois une méthode d'enquête anthropologique sur les savoirs et une méthode de validation expérimentale des analyses épistémologiques produites au terme des enquêtes. Mais c'est le travail de questionnement des présupposés de la théorie qu'a mené Chevallard qui a sans aucun doute permis l'élargissement des pratiques de recherche au questionnement anthropologique et qui, avec les concepts de transposition, puis d'organisation écologique des objets de savoir et enfin de système de praxèmes (nous y viendrons), a donné les outils théoriques capables d'outiller ce questionnement dans les domaines que l'exploration pionnière de Brousseau n'avait pas viabilisés.

### **La force inconsciente de la raison pratique**

Car c'est sans doute en ce point précis que la question du milieu des situations fondamentales pose la question des objets de l'action pratique (qu'il s'agit toujours d'apprendre à mener selon des stratégies identifiables, socialement partageables et validables). Je me propose ici d'indiquer quelques pistes en ce sens - dont je dois cependant dire que le plus souvent, seul l'embranchement sera balisé.

**La première piste** tient à une injonction paradoxale qui s'exprime le plus souvent sous la forme de deux critiques contradictoires souvent faites aux écoles : les écoles, coupées de « la vie », légitimeraient la reproduction de « la noblesse d'état » ou bien, elles aideraient à l'extension aliénante d'un « spectacle technologique ».

- *D'un côté, les écoles n'enseigneraient que des savoirs formels* si inutiles qu'il faudrait aller chercher ailleurs le motif de leur extension presque universelle : ce serait la formation de l'ensemble des habitus sociaux qui fondent la reproduction des asservissements intellectuels affectifs et

physiques, par la soumission à une violence symbolique primitive. En un mot, l'école produirait l'incorporation d'une discipline au moyen de la fréquentation des disciplines. Cet « appareil idéologique » transmettrait ainsi les héritages culturels de telle manière, qu'au terme de son intervention, le pouvoir politique et le pouvoir économique paraîtraient légitimement attribués à leurs héritiers, drapés dans les attributs du savoir.

- *Mais de l'autre côté, les écoles n'enseigneraient que des manières de penser et de faire éloignés de toute pratique effective* au point qu'il faudrait aller chercher le motif de leur extension dans l'aliénation universelle qu'elles installeraient, soutenant ainsi un processus de bureaucratisation généralisée des rapports humains au monde. Et certaines études anthropologiques ne voient dans ces « appareils bureaucratiques » qu'un moyen de dessaisissement des savoirs expérientiels produits par l'action dans le monde. Les écoles justifieraient ainsi le développement sans contrôle de toutes les technologies par lesquelles le rapport au monde se déréalise.

Ces deux critiques, qui semblent se rejoindre parce qu'elles appartiennent toutes deux à des positions contestataires radicales sur l'organisation hiérarchique des sociétés « bureaucratiques occidentales », sont pourtant contradictoires, dans la mesure où l'une affirme que l'école coupe du réel et l'autre qu'elle donne accès au pouvoir. *A moins que le pouvoir ne porte que sur les organisations humaines et que le réel ne soit constitué que des organisations matérielles...*

Il faut donc admettre qu'elles portent toutes deux une part de vérité, ce qui en dénonce dans les deux cas le radicalisme réducteur. Et j'ai pu montrer en effet (Mercier, 1992) que *l'école produisait non seulement l'apprentissage de savoirs disciplinaires qu'il est aisé de nommer mais avec ces savoirs, qu'elle donnait une connaissance identifiable de certaines des situations d'usage de ces savoirs*. C'est ainsi que j'ai écrit qu'*il était impossible de séparer a priori les savoirs des élèves relatifs aux*

*mathématiques de leurs savoirs relatifs au contrat didactique ou au milieu de l'action par lequel ils avaient eu accès aux savoirs mathématiques.*

Cette séparation ne peut être obtenue que par un long et difficile processus d'étude, qui ne peut être mené complètement que sous des conditions didactiques rares (*la suite des situations adidactiques pour ces savoirs en est une description*) et sous des conditions épistémologiques draconiennes (*la constitution de ces savoirs en discipline, qui assure une organisation en "tout structurés"*)<sup>6</sup>. Alors, une école transmet bien des « raisons pratiques » associées aux « savoirs théoriques » explicites qui sont les objets officiels de l'enseignement. Mais les savoirs pratiques ne sont pas mieux reconnus dans le monde scolaire que dans le monde de l'action matérielle, et dans les deux lieux chacun l'affirme haut et fort : « il n'y a rien à dire, ça s'apprend pas ce boulot là », tout en commentant « tu vis là dedans, ça se fait tout seul » et « l'expérience, t'as jamais fini d'apprendre » (Delbos & Jorion, 1984). Les observations de la biographie didactique des élèves l'ont montré : c'est que le savoir est d'abord *rapport à l'ignorance produite par une situation, lorsque la connaissance du milieu de la situation permet de développer une stratégie d'action*. Le savoir qu'est une stratégie d'action est donc lié aux conditions de mobilisation de cette stratégie comme organisation de praxèmes<sup>7</sup>, et ces praxèmes se transmettent par les procédés ordinaires du frayage parce qu'ils sont commandés par des configurations particulières d'objets (Conein, Dodier, Thévenot, 1993). **Ces savoirs sont institutionnellement transparents, c'est-à-dire que les institutions - où ils vivent pourtant - ne les connaissent pas pour ce qu'ils sont : le milieu de l'action doit être naturalisé pour que la conduite des actions partielles soit routinière et que l'évaluation des effets de la stratégie qui a été jugée pertinente puisse donner immédiatement des décisions pouvant orienter l'activité, sans même que l'acteur puisse en rendre compte. C'est le mécanisme de la dénégation du didactique.**

---

<sup>6</sup> Ainsi, dans la seconde partie de cette note j'ai repris du début l'exposé d'une théorisation didactique ; cependant cet exposé suppose, pour être lu, la connaissance didactique exposée dans la première partie. Pour en connaître le sens, on ne peut séparer le savoir qu'il contient de cette connaissance première, sur laquelle il se fonde et qu'en principe il synthétise.

<sup>7</sup> Ils peuvent être analysés de l'un des points de vue développés par les sciences humaines sur la pensée - sauvage, rationnelle, institutionnelle, technologiquement et théoriquement instrumentée -, du point de vue cognitif dans une théorie individuelle ou sociale de l'action, du point de vue ergonomique dans une théorie du didactique ou des institutions ; dès lors ils n'appartiennent plus en propre au didacticien. Ils apparaissent comme des schèmes ou des habitus comportant des réflexes, des procédures, des évaluations de coût, des jugements de pertinence, des attributions de valeur, etc. (Johsua, 1998).

**La deuxième piste** dont je baliserai l'entrée tient à *la conversion didactique des habitus sociaux*, qui est le processus inverse de celui que je viens de décrire rapidement. Elle correspond à ces cas où l'adéquation

scolaire et même, didactique, de certains habitus sociaux les rend aisément disponibles dans l'espace scolaire. C'est par exemple le cas avec les pratiques sociales de l'écrit, ainsi que l'a montré le sociologue Bernard Lahire. Il a travaillé dans un premier temps sur les rapports scolaires à l'écrit (Lahire, 1993), avant d'enquêter sur les rapports sociaux aux pratiques d'écriture et d'interroger l'adéquation de ces dernières aux premiers (Lahire, 1997). Sans doute, sa position de sociologue l'a-t-elle engagé à s'arrêter au moment où la configuration - le tableau de famille brossé du point de vue d'un enfant particulier - montre sa corrélation avec le trajet - le tableau scolaire de cet enfant - sans pour autant que l'on puisse savoir le poids des formes scolaires particulières à telle école, à tel professeur, à telle discipline, dans la formation de rapports scolaires particuliers et dans la manière dont ces rapports s'avéreront ou non déterminants dans le trajet de tel élève. Car inversement, étant donnés les phénomènes de clivage d'objet dont j'ai pu commencer à montrer l'économie didactique et le poids dans les inerties comportementales de certains élèves, la formation scolaire d'habitus pourrait bien s'avérer, en retour, d'autant plus déterminante dans la formation de la biographie sociale ou affective d'un élève que pour un élève, la séparation des deux domaines où ses activités se déploient n'est pas certaine.

**Une troisième piste** tient à la nature des savoirs pouvant donner lieu à un travail didactique, elle est explorée par les didacticiens des mathématiques ou de tout autre savoir qui œuvrent dans le sens proposé actuellement par Chevallard, je me contenterai donc d'en signaler l'existence. C'est en ce point qu'il devient intéressant de nommer ce travail indépendamment de la manière dont l'un des acteurs l'engage (en enseignant) et dont l'autre la réussit (en apprenant), puisque l'engagement de l'un ne garantit pas le résultat pour l'autre. Le terme d'*étude* fait justement le lien entre l'enseigné et l'apprenant, en désignant l'activité propre de l'élève qui cherche à apprivoiser une construction sociale efficace et pour cela, s'exerce pour instrumenter son action en étudiant cette œuvre. L'investissement d'une œuvre particulière peut ouvrir à l'élève qui le réalise une voie que nul autre n'aurait pu s'ouvrir.

**La quatrième piste** tient à la valeur formatrice et éducative de l'étude des disciplines scolaires. C'est une question d'autant plus délicate, que les termes mêmes de formation et d'éducation sont trop souvent les armes du combat contre des savoirs presque obsolètes. Je pense cependant que le lien d'un savoir à une classe de situations caractéristiques peut être enseigné, et qu'il relève de la capacité de juger a priori de la pertinence d'une stratégie, et de la capacité de juger de la valeur relative d'une stratégie pertinente donnée, parmi d'autres. Cette question est d'ordinaire

si peu développée qu'elle mérite je crois quelques commentaires. Lorsque, dans le cadre d'un enseignement fondé sur une suite de situations didactiques dérivées d'une situation fondamentale, des élèves sont amenés à décider a priori de la pertinence d'une stratégie qui a réussi dans une situation d'action précédente, ils ne se contentent pas de s'instruire dans un savoir, mais en travaillant ce que Brousseau appelle "leur sens", *ils se forment* à son emploi à l'extérieur du monde où il est apparu en tentant de juger de sa pertinence, et dans le même temps *ils s'instruisent* de son emploi en s'outillant de ce savoir. C'est alors que la question de la valeur relative des savoirs se pose et que l'étude de l'efficacité d'un outil et de l'intérêt des problèmes qu'il outille apporte des réponses didactiques à la question de *la formation scolaire des valeurs* (il s'agit naturellement des valeurs scolaires c'est-à-dire, relatives aux objets spécifiques à l'école). L'éducation au goût (la possibilité d'apprécier le beau) est à ce prix. On sait depuis GOBLOT (la distinction) que les professeurs ont toujours eu à lutter pied à pied avec leurs élèves sur ces points, on sait comment les élèves des "Grandes Ecoles" se reconnaissent justement à ces organisations de valeurs partagées qui les distinguent.

### **La valeur des savoirs**

Car nul ne doute vraiment de l'existence de plusieurs hiérarchies qui organisent les savoirs. Il y a d'abord une hiérarchie interne des savoirs, elle est complexe et change avec les reconstructions venues du travail des fondements, comme l'a montré la « réforme des mathématiques modernes » dans les années soixante dix. Certains savoirs sont puissants, ils permettent une grande économie de pensée, comme l'algébrisation cartésienne de la géométrie ; certains sont fondamentaux, ils permettent de poser des questions qui échappent à d'autres, comme l'idée selon laquelle le postulat d'Euclide n'est qu'un axiome et qu'on peut imaginer des géométries non euclidiennes ; d'autres sont anecdotiques, comme le théorème «  $384702 \times 74953 = 28834569006$  » ou encore, ils sont communs «  $2 \times 2 = 4$  » même s'ils peuvent servir à poser une question rarement formulée, à l'école «  $2 \times 2 = 2 + 2$ , est-ce le seul cas d'égalité de la somme et du produit de deux nombres ? ». Il existe des hiérarchies externes des savoirs, venues de leur légitimité ou de leur pertinence sociale. Certains outillent des actions qui engagent la survie des individus, du groupe ou même de l'espèce, comme la médecine la voyance ou l'écologie ; d'autres outillent des actions très valorisées, qui tiennent au pouvoir, comme le droit dont les lieux de production et d'enseignement sont en bonne place dans les centres de décision. Il existe des hiérarchies cognitives - dont certaines semblent venues d'une épistémologie qui décalque le social sans

l'interroger - entre les savoirs instrumentés (se brosser les dents, planter deux clous, répondre 56 à la question  $7 \times 8$ ) et les savoirs déclarés (le produit de trois entiers successifs diminué de leur moyenne est un cube), les savoirs formels (les énoncés de la langue française sont composés de mots) et enfin, les savoirs sur les conditions d'usage de ces savoirs « J'ai 9 ans et mon petit frère 6, notre papa a 54 ans, mais ce n'est pas parce que  $6 \times 9 = 54$  », etc. Cette liste en forme de bric à brac vise à montrer la multiplicité des critères de classification possibles.

Mais quelle que soit leur position dans une des hiérarchies, je considère par principe que (quelle que soit leur valeur) *tous les savoirs sont descriptibles par la situation qui les caractérise, jusques et y compris le savoir particulier qui se compose d'un système de valeurs distinctif*. Ainsi la voyance propose un savoir sur l'avenir dont l'utilité ne fait aucun doute pour un choix engageant sa vie sur un long terme, et la prédictibilité des événements physiques est tout aussi utile, par exemple pour décider ou non de rouler sur une autoroute à 36m/s et à 20m du véhicule qui précède, mais elle ne relève pas de la même classe de situations ; cependant, le jugement sur l'inconsistance d'un savoir de la voyance est l'effet d'un savoir sur la formation des savoirs qui correspond à d'autres situations et **pour le formuler, il faut avoir cherché à unifier les savoirs** en les interrogeant systématiquement sur leur cohérence et leur pertinence<sup>8</sup>. La valeur est donc le produit des situations de validation et le cas échéant du procès d'institutionnalisation, qui permet faute de mieux d'attribuer à un savoir la

---

<sup>8</sup> Sans pour autant, si possible, s'engager dans l'aventure de Bouvard et Pécuchet : on ne peut travailler l'épistémologie, dans certaines positions sociales !

valeur de l'institution qui le certifie : "scolaire" par exemple, ou "professionnel", "savant", "expert", etc.

### **Situations d'instruction, de formation, d'éducation**

Si donc, indépendamment de toute classification a priori des savoirs, nous nous intéressons à la possibilité de saisir des savoirs dans une relation didactique, c'est-à-dire à la possibilité de décrire les situations épistémiques correspondantes de telle manière que nous sachions les en proposer une transposition didactique. Ainsi s'énonce en quelques mots le problème de *l'enseignabilité d'un savoir*. La description de la situation épistémique pour un savoir est la clé d'un problème didactique, qui se pose maintenant en termes épistémologiques et didactiques. Comment produire une situation et plus précisément un milieu, artificiels, reproduisant les conditions de vie de ce savoir en réalisant les contraintes dues à un enjeu didactique (par exemple, donnant la possibilité d'agir « pour apprendre »

c'est-à-dire d'agir dans une situation où l'échec de l'action peut être reconnu par l'acteur lui-même et de recommencer en cas d'échec, ce qui ne va pas de soi lorsqu'il s'agit de l'atterrissage d'une navette spatiale) ? Mais la question de l'enseignabilité ne permet pas de décider de la légitimité d'un savoir à devenir objet d'enseignement, ni de la pertinence de l'organisation de l'enseignement. Ainsi, dans les crèches, l'habillement ou dans les écoles maternelles le nouage des lacets, sont des savoirs dont la pertinence n'échappe à personne, mais si de tels savoirs quotidiens sont légitimement enseignés dans les crèches, ils apparaissent peu légitimes à l'école maternelle : leur enseignement est plutôt le fait des auxiliaires maternelles. Ce qui transforme notre question en celle-ci : existe-t-il des situations fondamentales de la formation et de l'éducation, quelles sont ces situations ?

### **Quels savoirs peut-on étudier dans une école ?**

Les savoirs enseignables ceux pour lesquels il est possible d'inventer une situation didactique appropriée. Ce qui pose par exemple la question des savoirs professionnels qui tiennent à l'expérience de situations "en vraie grandeur" et à la gestion du risque que comportent, par exemple, les phénomènes liés à l'échelle de grandeur (ainsi, la force de la pesée nécessaire à l'intervention sur un gros appareil industriel est presque dix fois celle qui aura été éprouvée sur l'appareil moitié plus petit, qui est

familier à l'opérateur, et celui-ci risque de s'engager dans une action dangereuse sans en avoir mesuré les risques).

Mais *une réponse négative à la question de l'enseignabilité d'un domaine vaste amène à laisser l'apprentissage à « l'expérience de terrain »*. Et *une réponse négative sur un objet de savoir particulier lié à une discipline d'enseignement oblige l'école à « produire de l'ignorance » sur ce point, sans pour autant organiser l'étude qui permettra de la dépasser sûrement*. Cela ne signifie pas l'impossibilité de provoquer l'apprentissage d'un tel savoir, mais l'impossibilité d'en faire un enjeu didactique déclaré et de rendre compte de l'action didactique correspondante, puisque ce savoir s'apprendra sur le terrain de la pratique scolaire de la discipline dont il outille l'étude. Ce fut, par exemple, longtemps le cas avec la consultation du dictionnaire, dans l'étude des langues mortes : les latinisants se souviennent de leur difficulté à trouver le bon usage du Gaffiot. C'est ainsi que je propose de développer des études en didactique des savoirs professionnels, dont les premières réalisations existent d'ores et déjà. Plus encore que la didactique des mathématiques, de telles études supposeront une anthropologie des rapports au monde que sont les connaissances et des institutions sociales qui conservent ou renouvellent ces rapports.

Car il faut encore avoir identifié un savoir, pour poser la question de son enseignabilité et c'est le problème que pose JOHSUA (1998, l'année de la recherche en éducation), *a priori*, dans un texte qui a donc le statut d'une théorie tout en étant le guide limpide de toute enquête anthropologique à visée didactique. Il y démontre que *l'enseignabilité d'un savoir tient à l'existence, si ténue soit-elle, de processus d'étude* qui désignent les variables pertinentes de ce que j'ai appelé la situation épistémique. Ainsi, de même que Mauss avait pu définir en quelques pages une technique comme « une manière de faire traditionnelle et efficace », nous aurions une description de ce qu'est l'objectivation à usage didactique d'un savoir comme « des modalités d'étude traditionnelles et efficaces » dont la dimension scripturale tient peut-être plus à la possibilité d'institutionnaliser les manières traditionnelles légitimées qu'à une condition didactique. La notion d'étude - ou plutôt, de gestes d'étude - est donc sans doute le moyen de découper dans l'ensemble des conditions observables de l'environnement d'un savoir, les conditions effectives, pour distinguer et organiser, dans ce qui était un l'environnement informel, les éléments de l'écosystème du savoir qu'est la situation épistémique. C'est sans doute une direction prometteuse pour l'accès des questionnements didactiques à des domaines relevant plus évidemment des problèmes posés par les sciences de l'éducation que les recherches pour l'amélioration de l'organisation didactique des disciplines scolaires. Mais c'est aussi par



exemple une direction prometteuse pour le travail sur les « cours d'études » d'une « école pour tous », à la recherche de questions d'enseignement qui soient socialement vives, tel que Chevallard propose de l'engager (Chevallard, 1997b) et tel que le demandent les textes officiels sur la question des « parcours diversifiés de formation » dans le Cycle central des Collèges.

### **Pourquoi étudier des disciplines ?**

Il semble que, comme Ratsimba-Rajohn le signale dans son DEA en 1977, « ... la conception qui juge que la contradiction entre le concret et l'abstrait est principale s'est perpétuée. Or, cette contradiction n'est principale que dans la mesure où le rapport du sujet et de l'objet nouveau est institué seulement au niveau de la représentation de l'objet présumé indépendant du sujet, et seulement si l'on suppose que la conception de la notion n'est qu'un résultat nécessaire (donc automatique) de sa perception : toucher, voir, modifier.../... Les procédés issus des conceptions précédentes ne permettent que des interactions limitées, superficielles ou familières avec des moyens tels que : image, schéma, graphe, discours, liste de propriétés ou d'axiomes. Les enseignants prétendent ainsi fournir "d'un coup" tous les éléments et les relations constitutifs de la notion visée. Ce sont de tels procédés que nous qualifions d'introduction ostensive et que nous appelons "ostension". » On peut mettre en doute le fait que les professeurs ont tous, dès leur entrée dans le métier, la "conception" décrite comme guide de leur action - je parlerais de technique, c'est-à-dire d'une manière sociale de faire qui montre une efficacité reconnaissable - puisque Ratsimba-Rajohn (1992) démontre par ailleurs que la plupart des gestes d'ostension sont involontaires. Cependant, la question de l'ostension ne peut se régler par la condamnation d'une technique qui, par définition, a fait ses preuves.

**Mail de Pierre Duchet à propos du projet de ce séminaire**

<< PEUT-ON LIER L'INSTRUCTION LA FORMATION ET L'ÉDUCATION ?

>ou,

> Pourquoi faudrait-il encore enseigner des mathématiques ?

>et,

> Quelles mathématiques devrait-on enseigner ? >>

>

>Cher Collegue,

>

>je suis, comme tu t'en doutes, extrêmement séduit par ces questions que tu te proposes d'aborder à ta conférence du 1er Avril à Grenoble.

>Oui, séduit, comme je le fus par un des thèmes de la IXème école d'été ("Analyse didactique et épistémologique de contenus mathématiques

>à enseigner au lycée et à l'université ") avant de comprendre que l'interprétation qui en était faite par les didacticiens était extrêmement restrictive.

>Je pense que ton approche sera plus ouverte, plus dialectique et ... plus révolutionnaire.

>Je réfléchis et travaille sur ces questions depuis une dizaine d'années. Une formulation didactique possible de ma problématique pourrait être la suivante :

> Le concept d'ordre des savoirs mathématiques (telle chose "doit" être enseignée AVANT telle autre) est-il pertinent pour les recherches en Didactique des mathématiques ?

>Vaste question... et nombre de sous-problèmes affluent, comme celui des savoirs "transversaux" (exemples du "parler-lire-écrire-compter", u "raisonnement" et de la "preuve" , de la "démarche scientifique" etc.)

>Les situation-recherches que j'étudie depuis dix ans me montre en tout cas que nombre de préjugés à ce propos ont la vie dure, chez les mathématiciens (ce qui n'est pas étonnant) chez les enseignants (ce qui s'explique aisément) mais aussi chez les didacticiens et les scientifiques de l'éducation, même sérieux (ce qui devient gênant) et chez les politiques (ce qui est lourd de conséquence).

>

>Je n'en suis pas à un degré d'avancement tel que ce que j'observe soit (de)monstrable mais suis en permanence à l'affût de toute piste ou avancée possible.

>

>Malheureusement je suis indisponible le 1er Avril pour aller écouter et discuter de

*vive voix ! Aussi terminé-je ce mot avec deux demandes*

>

*>Demande n°1 : As-tu déjà écrit un ou plusieurs textes sur ces épineux problèmes ? Peux-tu me les faire connaître ?*

>

*>Demande n°2 : Y a-t-il un lieu (communauté scientifique ? commission InterIREM ? Parti(s)? Syndicat ? Associations ? SMF ? GFEN ? Groupe Universitaire ? CNRS ? Commission ministérielle ?) ou une réflexion sérieuse et sans tabous puisse sereinement et efficacement progresser sur le thème des contenus mathématiques, méthodes et programmes (indissociables en première analyse !) ?*

>

>

>

*>Pierre.Duchet*

## Mail de Réponse à Pierre Duchet

*Cher Collègue,*

*Je n'en suis malheureusement qu'en un point très initial du questionnement, si ce n'est quelques années de fréquentation des équipes de Chevallard et quelques travaux personnels à la mesure de ma modeste position de maître de conférences chargé de la formation en didactique des professeurs de mathématiques des Lycées Agricoles, de 1995 à 1997... (25 professeurs)... et puis, les questions que ma position actuelle en Sciences de l'Education m'amènent à poser, et qui rejoindraient sans doute*

*1) celles de notre collègue de Nice (maintenant retraité) Martin Zerner sur la mathématisation en économie ou celles du groupe qui travaille autour de la revue "pénombre"...*

*2) celles que je comprends dans la tentative républicaine de Condorcet mais qui doivent être posées dans les conditions actuelles et dont l'esquisse, pour moi, est donnée dans mon intervention sur l'enseignement de l'algèbre à la VIII Ecole d'Eté, où je commençais à me rendre compte que personne, dans la société, n'utilisait les outils algébriques malgré plusieurs années d'enseignement de l'analyse et de la résolution des équations et systèmes d'équations, faute à la fois de techniques fiables et routinisées (comme par exemple les techniques arithmétiques de la fausse*

position, qui - il me semble - s'avèrent fonder des méthodes d'exploration numérique très générales), mais aussi faute de savoirs venus de l'attitude de modélisation et des procédés associés (comme par exemple l'identification des systèmes de grandeurs, ou les changements de cadre), et enfin faute de moyens théoriques généraux, bien identifiés, proches de l'intuition et puissants, comme l'étaient dans la géométrie plane des années 30 à 50, les cas d'égalité des triangles avec leurs développements dans la notion de similitude et leurs liens techniques avec la trigonométrie.

3) personne à ma connaissance sinon Johsua (en physique) et les travaux exposés à l'occasion du colloque de Marseille sur l'Ecole pour Tous (10/1997) qui hélas se sont arrêtés : instruire quelqu'un, c'est lui donner les moyens de remplir une mission de manière autonome en l'équipant. Ma métaphore, c'est James Bond, ou le bricoleur américain, mais tous deux sont scientifiquement bidons, il nous faudrait plutôt un Maigret de la science, moins superficiel car moins prétentieux que Cohen, qui était bien pour le cas de Thalès et dérape ensuite en ne donnant plus qu'une vision inutilisable des outils mathématiques (un des textes de haut niveau correspondant pour moi à ce critère est "la mesure des grandeurs" de Lebesgue, que l'on devrait et pourrait sans doute étudier dans les Terminales) ; mais aussi la petite tentative que nous avons engagée d'une "boutique de mathématiques" pour les élèves de Lycée, et qui s'est arrêtée au bout d'un an faute de forces militantes, après douze articles, mais qui pourrait être remise à l'honneur avec Internet, à côté du site des élèves de l'X qui est à mon goût trop technique...

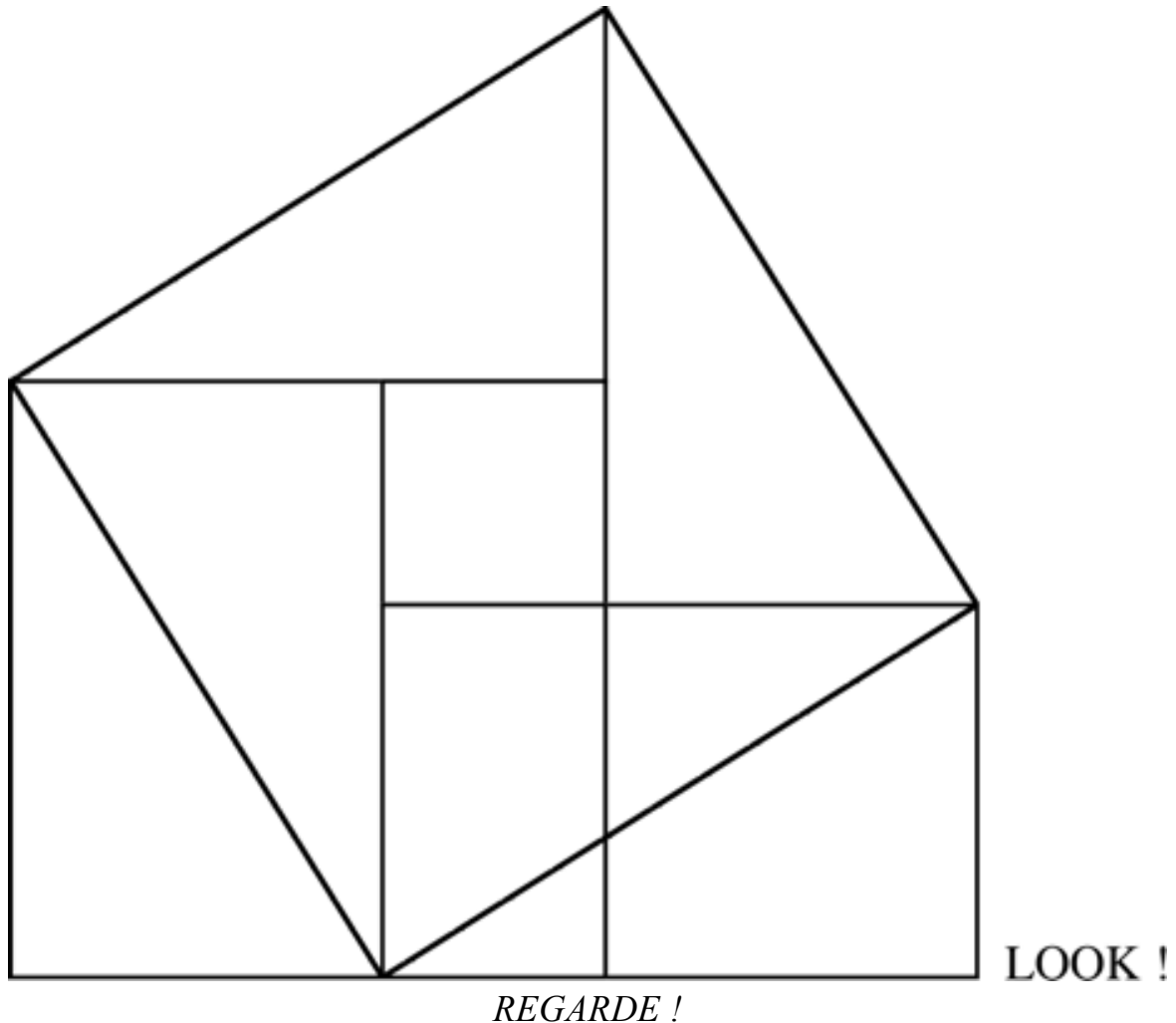
4) enfin, je me pose des questions plus générales encore sur les rapports de l'instruction (dans les savoirs) à la formation (du jugement) et à l'éducation (du goût), et aux réponses que l'on pourrait espérer d'un usage astucieux de la théorie des situations... Mais il ne s'agit encore que de spéculations.

Pour finir, je joindrais un texte proposé à la revue "Télémaque"... (version Word5), mais il est possible que la Commission Inter IREM didactique soit intéressée par un travail sur ces questions, il faudrait le proposer à Noirfalise, à Clermont, en lui faisant suivre ce courrier ?

Telles sont les considérations qui me viennent au fil de la plume, à la lecture de tes questions dont je te remercie.

Alain Mercier

**Quelques fragments de textes ici et là, pour former une réponse construite à Pierre Duchet, ils ne sont pas organisés, mais l'interaction a débouché sur un doctorat dirigé en commun, à Paris VII, soutenu en 2006 par Kadir ERDOGAN**



Cela est manifeste dans cette démonstration célèbre du théorème de Pythagore attribuée au mathématicien indien Bhascara, 1114 a.c. et constituée d'une figure et de l'injonction didactique : Regarde ! (Mercier, 1988b). Ces « démonstrations » rappellent l'adage « Quand le sage montre la lune, l'imbécile regarde le doigt » : l'ostension est bien le procédé didactique du sage.

On peut rappeler aussi que Chevallard (1997a) nomme *étude* l'acte didactique fondamental, considérant ainsi, explique-t-il, qu'il considère, que du point de vue d'une approche théorique du didactique, l'enseignement ne constitue de fait qu'un temps de régulation entre deux périodes d'étude. Enfin, les enseignements pratiques qui se font *par frayage* ne limitent-ils pas l'explication à l'action, supposant que toute action est geste pour qui la regarde, c'est-à-dire, qu'elle parle d'elle-même

(Johsua, 1998) ? Johsua montre d'ailleurs comment il faut dès lors supposer qu'il existe, dans la transmission par frayage du « savoir faire », de l'étude : il rejoint ainsi l'idée de Chevallard. Et si le sage se refuse à enseigner autrement qu'en montrant l'objet à connaître, c'est parce qu'il sait la vanité de l'agitation de celui qui croit pouvoir expliquer : l'élève qui n'a pu étudier par lui-même prendra bientôt l'explication pour l'objet sur lequel centrer son attention, comme l'ont montré les travaux de Mopondi (1995).

Le terme même *enseignement* pose précisément ce problème, puisque enseigner, c'est « mettre une enseigne », « indiquer par signes, pour faire connaître »... Mais, qui montrera le sens du signe ? Quelles sont les conditions pour que l'enseigne ne soit pas prise pour la chose ? Ce phénomène de glissement métacognitif a été dénoncé par Brousseau ; comme par Perrin-Glorian (1992) dans le cas de classes faibles ; j'en ai montré l'importance dans le cas d'élèves en difficulté. Le bon professeur, le sage, devrait alors se refuser d'enseigner aux élèves qui ne peuvent se suffire d'une direction d'étude qui indiquerait la direction, de temps en temps : à en croire leurs étudiants, qui s'en plaignent, c'est la position de la plupart des directeurs d'étude des Troisième Cycles universitaires !

Les autres professeurs ne se trouvent pas dans une position sociale aussi aristocratique et doivent enseigner même à ces élèves-là qui ne savent pas

mener l'étude. C'est alors que le contrat qu'ils ont accepté les engage à toutes les dérives de l'ostension que dénoncent les grands pédagogues<sup>9</sup>, et plus qu'un effet de la recherche d'une légitimité (Chervel, 1998), je voudrais voir dans l'émergence des disciplines scolaires l'effet d'une contrainte didactique interne. Car tout professeur est pris dans un système d'enseignement qui prétend enseigner à tous sans considération pour l'aptitude à étudier et qui déclare l'échec du système lorsque tous n'apprennent pas : un système d'enseignement bureaucratique, selon la caractérisation de Verret (1975). Tel est le problème auquel s'attaque toute didactique ; et si aucune autre technique d'enseignement que l'ostension n'émerge, l'ostension de l'explication continuera à remplacer, un peu plus chaque jour, l'ostension de l'objet à étudier en proposant à l'étude l'acte d'ostension lui-même.

Il y a pourtant une solution, qui ralentit cette obsolescence catastrophique par l'explication : c'est bien sûr une solution pratique, puisque sans elle, l'école que nous connaissons - l'école moderne - n'existerait pas. Cette solution, l'observation montre qu'on pourrait la décrire comme « la fuite en avant pour ne pas tomber » (Mercier, 1996b, lettre du 15 janvier 1990). Autrement dit, la mise en texte du savoir et la mise en temps de l'ostension, qui s'ensuit, donnent une solution pratique à la question. Ce geste fondateur du didactique scolaire moderne a permis les réussites que nous savons, mais il se paie au prix fort d'un phénomène plus important que la transposition initiale ne le laisserait supposer : la transformation des organisations de savoir en disciplines.

La *disciplinarisation* des savoirs enseignés est certes un processus d'obsolescence ralentie, mais c'est une transformation par laquelle bientôt, les savoirs ont l'air moribonds : ils donnent l'impression de ne plus pouvoir donner vie qu'à leur exercice scolaire - et c'est parfois le cas. Je crois avoir montré longuement, dans la première section de cette note, comment la solution est à la fois efficace pour un enseignement ouvert à bien d'autres étudiants que les disciples d'un maître, et comment elle est insuffisante pour un enseignement qui prétend s'ouvrir à la majeure partie des enfants et des adultes d'une classe d'âge.

---

<sup>9</sup> On l'aura remarqué, les injonctions des pédagogues sont comme les injonctions des saints : elles ne sont pas adaptées au monde de ceux qui n'ont pas reçu en partage la grâce divine - qui permet seule d'atteindre à la sainteté.

Les travaux de Chevallard et Bosch sur les ostensifs donnent un fil conducteur pour une reprise de l'analyse du problème. Les objets mathématiques forment des systèmes d'ostensifs associés à la fois à des non ostensifs - qui permettent de régler leur manipulation - et à des actions - qu'ils substituent parce qu'ils en sont « le compte-rendu complet », selon l'expression du mathématicien Henri Lebesgue à propos des nombres, compte-rendus complets des mesures de grandeurs.

Les ostensifs sont donc les enseignes, qui font signe pour les actions : ce sont les objets de l'enseignement, mais ce sont les actions que les élèves doivent chercher à connaître et c'est à ce prix qu'ils atteindront aux non ostensifs qui donnent la maîtrise des manipulations ostensives.

Le *geste didactique fondamental* rencontre le *geste mathématique initial*, ce qui nous donne les éléments pour interpréter cette propriété des mathématiques - elles sont l'outil premier de l'étude des problèmes du monde - par son effet sur les mathématiques elles-mêmes - elles sont constituées par des systèmes d'ostensifs - en donnant le lien de ces deux propositions : *les mathématiques montrent les caractères des variables de l'action sur les problèmes du monde*. Cela explique la propriété d'enseignabilité qui fait leur nom, *mathanein* -> *mathema* : elles sont ce qui s'enseigne, puisqu'elles désignent cela même qu'il faut retenir, dans les problèmes, pour mener une action réfléchie.

Une solution, éternelle dans le système des variables sur lesquelles elle joue et nouvelle par les valeurs d'équilibre qu'elle invente, se dessine maintenant. Car les actions dont il va être nécessaire de rendre compte par des systèmes d'ostensifs peuvent être provoquées, par un enseignant qui par cet artifice se défait enfin de l'ostension pour en donner la responsabilité aux élèves pour qui il organise les conditions d'une action appropriée : l'ostensivité est d'abord une propriété des praxèmes, dont les objets mathématiques rendent compte.

La théorie des situations adidactiques, telle que Brousseau l'a produite, peut donc être interprétée comme la théorie des conditions d'une action (dans la situation adidactique d'action) appropriée à la production d'un système d'ostensifs (dans la situation adidactique de formulation) et du



système de contrôle associé (dans la situation adidactique de validation, où sont examinées la pertinence et la consistance du système d'ostensifs et de non ostensifs qui est, ainsi, produit collectivement par l'étude dirigée que mènent les élèves). *La théorie des situations est la théorie de cette manière particulière de savoir, qui produit des objets ostensifs pour substituer l'action* : la théorie des conditions d'une production technique. Le savoir est ici connaissance commune entre plusieurs sujets, une connaissance partagée (et non pas distribuée), qui a nécessairement une dimension sociale et qui ne peut être produite que par un acte de socialisation des productions individuelles dont l'enjeu est la maîtrise d'une action que l'on étudie à loisir (dans la *skholê*) : un ostensif doit être produit dans le temps de la suspension de l'action, dans des conditions telles qu'il puisse être partagé.

Alors, le professeur peut désigner, après coup, la savoir produit comme ce qu'il fallait apprendre : l'étude initiale en a déjà été conduite et le temps de l'enquête sur les problèmes vivants que le savoir nouveau peut aider à résoudre est venu : c'est ici que pourra se conduire un premier travail sur l'idonéité du savoir nouveau, dans un retour à l'action où le savoir s'éprouve. Au terme de cette reprise de la question des savoirs et du didactique, je peux donc placer un nouveau fil de suture entre l'approche anthropologique et la théorie des situations didactiques. Chacune peut dorénavant servir de *système de questionnement* de l'autre pour élargir son domaine d'emprise et inversement, de *système d'explication* de questions que l'autre soulève sans donner le moyen de les résoudre : ce fonctionnement, que certains parmi nous avaient engagé en faisant confiance à l'idée que les deux formes de théorisation étaient épistémologiquement compatibles, peut aujourd'hui être validé : et l'on peut espérer un élargissement de la théorisation dont nous disposons aux voies qu'ont développé des chercheurs indépendants de ces deux systèmes. Ainsi, le travail sur l'ostension et ses formes sera sans doute à terme la clé de l'analyse des changements de cadre identifiés par Douady (1984), parce que l'on observera comment les changements de systèmes d'ostensifs transforment les systèmes de non-ostensifs en outils de production de métaphores qui travaillent sous le contrôle des pratiques ostensives associées au nouveau cadre.

Car l'un des points délicats de l'écologie didactique des savoirs proposée par Chevallard et Bosch tient à ce que les rapports des sujets aux ostensifs tendent à être mis de côté par l'analyse et avec eux, les conditions de vie des objets dont la fonction est l'aide à l'étude. Mais ces objets-là sont des objets institutionnels bien particuliers puisque ce sont les rapports des

sujets de l'institution aux objets de savoir qui sont l'enjeu de l'institution. L'analyse didactique isole les ostensifs, mais pour réaliser leur potentiel sémiotique, les ostensifs doivent être pris dans des praxèmes. C'est ce que rappelle la théorie des situations. C'est aussi ce que montre sur un point très particulier l'étude de Lerouxel (1994) en montrant comment, faute de savoir travailler les ostensifs mathématiques pour dégager ces objets des ostensifs didactiques associés, l'enseignement ordinaire n'arrive pas à obtenir que l'activité des élèves fasse signe et apparaisse comme étude spécifique des mathématiques : « l'addition en colonnes » est le premier objet mathématique de plein exercice pour les élèves de deuxième année primaire, longtemps après « le cahier rouge » c'est-à-dire, le cahier attribué aux mathématiques. C'est enfin ce qui se dégage de l'ouvrage collectif *Estudiar matemàticas* (Chevallard, Bosch & Gascón, 1997).

### **Savoirs, Institutions didactiques, Education**

L'étude des apprentissages s'est longtemps centrée sur les sujets, la cognition étant située dans leur pensée. Aussi, un des bénéfiques premiers du remplacement de la métaphore de la connaissance par celle du rapport d'un sujet à un objet tient-il au retour des objets et du rapport des sujets aux objets dans les questions de l'apprentissage. En donnant accès à la sémiotité des objets, l'analyse ouvre maintenant sur **une dimension jusqu'ici invisible aux didacticiens : « le jugement sur les propriétés des choses manipulées » (Thévenot, 1993), qui est habituellement invisible, comme jugement de pertinence de l'ostensif à l'action dont il est supposé rendre compte ; « Comment garantir (par exemple) que l'appareil de mesure (du métrologue) porte un témoignage fidèle des propriétés à évaluer ? »** demande-t-il, rejoignant les questions que les statisticiens du goût et de la sensation se posent : ils décrivent un produit alimentaire par les variables séparées que sont sa couleur, sa consistance, son acidité, de manière à se rapprocher de la couleur, de la consistance et de l'acidité respectivement les plus appréciées ; mais ils découvrent, après avoir vérifié qu'ils ont un goût normal sur ces trois dimensions de la satisfaction hédonique, que le yaourt obtenu n'est pas celui qu'ils mangent d'ordinaire et qu'ils ne l'apprécient pas.

Les mathématiques de l'école primaire ont longtemps réglé la question par un processus silencieux, chacun expérimentant - à l'école et ailleurs - quand elles s'appliquent et quand elles ne s'appliquent pas : car les mathématiques du primaire étaient explicitement les mathématiques du quotidien, assumant l'enseignement des jugements de pertinence par l'exploration systématique des classes de problèmes quotidiens

mathématisables. Je dis « quotidiens », mais il faudrait dire « usuelles dans les pratiques des métiers peu techniques ». L'organisation de ces mathématiques-là n'était pas soumise à la logique de l'exposition disciplinaire qui s'était asservie les mathématiques secondaires, sous le prétexte qu'elles ouvraient sur la poursuite des études - et il fallait bien qu'un jour l'enseignement primaire supérieur accepte de perdre ses meilleurs éléments au profit du système qui ouvrait sur les études savantes.

### **L'efficacité, les usages sociaux, les valeurs des savoirs**

Il ne s'agit pas de regretter des temps meilleurs - car bien peu d'élèves du primaire supérieur arrivaient à sortir de ce qui s'avérait n'être pas une culture de plein exercice, mais une culture scolaire fabriquée à l'usage exclusif des enfants du peuple. Il s'agit de montrer comment l'enseignement primaire supérieur traitait la question de la formation du jugement sur les conditions de l'usage efficace d'un savoir : ce qui tente aujourd'hui d'exister sous la forme de « l'étude de la résolution de problèmes ». Mais le procédé d'enseignement explicite utilisé aujourd'hui fait du jugement un objet de savoir qui se rêve aussitôt « transversal aux domaines d'exercice des savoirs particuliers », un savoir universel. Voilà aussitôt que l'ostension du jugement comme objet d'enseignement fait de l'enseignement du « savoir juger » un enseignement disciplinaire à part

entière. Tel est le point où s'opposent radicalement les positions didactiques avec les théories de la compétence, dès lors qu'elle ne se proposent plus la description des actions mais la définition des objets d'enseignement.

C'est actuellement le cas, observable en vraie grandeur, avec les études pluridisciplinaires introduites dans l'enseignement agricole dans les années quatre-vingts. Elles deviennent aujourd'hui interdisciplinaires, parce que la pluridisciplinarité se transforme en discipline d'enseignement autonome - l'interdisciplinarité ne nécessite plus de référence à l'assujettissement initial à plusieurs disciplines identifiées - et nul n'est à l'abri de ce genre de « dérive institutionnelle ». De même, l'enseignement de la résolution de problèmes transforme la résolution de problèmes en discipline (comme l'a montré l'étude de Olivier-Leclair 1995) : ce sera le cas d'un enseignement des jugements de pertinence et celui de tout enseignement de l'attribution de valeur, tant que la question de l'enseignement par ostension ne sera pas résolue.

Pour progresser dans la voie qui se dessine encore vaguement ici, il faut décrire une situation de jugement de pertinence ou une situation d'attribution de valeur - montrer comment ces compétences peuvent être considérées comme des savoirs - puis proposer des transpositions de ces savoirs en décrivant certaines de leurs situations fondamentales. Le premier type de situation est connu, depuis les travaux sur le sens menés par les étudiants de Brousseau, dans le cadre limité des opérations mathématiques (Bola Amboka, 1992) et l'articulation de cette question avec celle des systèmes d'ostensifs algébriques a été engagée par Rossi (1997) et Galas (1995) sous ma direction. Rossi montre par exemple que la modélisation algébrique fait longtemps problème, parce que les types de variables que peuvent nommer les variables d'une formule ne sont identifiés qu'au terme d'une pratique assidue des problèmes faisant intervenir « des grandeurs » : un objet préconstruit dans toute la scolarité obligatoire et souvent bien au delà. En proposant un problème qui n'est pas aisément identifié comme problème de physique, Rossi crée un décalage suffisant pour que des étudiants en licence de « mathématiques et applications aux sciences sociales » n'en identifient pas les variables : ils ne connaissent pas d'emblée la grandeur en jeu (la quantité de matière). Le sens pratique (qui permet de juger d'une situation), acquis par un long frayage dans le domaine des sciences sociales, ne se transfère pas facilement à une physique simple, mais non enseignée.

Pourtant, l'exemple de certaines recherches récentes montre que la voie d'une solution n'est peut-être pas loin de celle qu'ont trouvée les mathématiciens. Dans le cas du « commandement au feu » des pompiers

responsables de la lutte contre les grands feux de forêt, comme dans celui de la « conduite des hauts fourneaux » dans les aciéries lorraines, Rogalski & Samurçay (1993) ont pu, au terme de plusieurs années d'observation des pratiques de terrain, de travail de leur formulation dans le cadre des réunions d'équipe après les interventions, d'analyse ergonomique des décisions prises et de leurs effets sur le terrain, produire à la fois un système d'ostensifs qui modélise les variables que prend en compte un responsable expérimenté, et produire un savoir de référence relatif à « la prise de décision distribuée dans un environnement dynamique » associé à un ensemble de situations didactiques qui en réalisent une transposition en se proposant comme « mises en scène » du savoir produit (Rogalski & Samurçay, 1994).

Les enjeux de la formation professionnelle tiennent sans doute à la capacité de juger du cohérent, du pertinent, et du juste, tous jugements qui permettent la mise en œuvre d'une technique de production du vrai, de l'exact, du consistant. Mais l'examen le plus sommaire montre que si les outils de la didactique des mathématiques peuvent avoir quelque pertinence, leur adaptation à des questions pour lesquelles l'identification des variables de la situation reste hors d'atteinte de l'acteur risque d'être aléatoire. L'ouverture est sans doute prometteuse, elle supposera un travail qui est encore seulement à l'état de projet. C'est pourquoi la question des activités sociales et de leur évaluation, qui donnerait les directions de l'éducation (à la rencontre du bon, du beau, du bien), est aujourd'hui hors de portée de l'approche didactique, quand bien même l'embranchement d'une voie en ce sens peut maintenant se deviner. Ce ne sera pas l'œuvre d'un seul, ni l'effet des travaux dans un seul des domaines de recherche actuels. Car le problème tient aux conséquences de la distribution sociale des savoirs et en particulier à la nécessité grandissante, en toute pratique professionnelle, pour tout acteur, d'outiller son action de dispositifs hautement techniques dont il ne maîtrise pas les principes, tout en identifiant ce qui, dans leur mise en œuvre, est de sa responsabilité.

La coopération entre acteurs capables de décider chacun pour son domaine suppose de la part de chacun d'eux un savoir relatif à l'organisation humaine dans le cadre de laquelle il agit qui était jusqu'à présent l'apanage du pouvoir. Elle suppose aussi que le titulaire du pouvoir ne soit pas aliéné à ce que le système dans lequel il est pris lui donne à voir, et c'est peut être plus difficile encore. Par exemple, dans la formation des médecins généralistes et des médecins hospitaliers à de tels phénomènes, la question a peut-être trouvé des commencements de solution pratique, mais elle est, du point de vue théorique, parfaitement ouverte : la solution commode des hiérarchies militaires ou maritimes, qui ont réduit massivement le nombre

des rapports de coopération possibles en linéarisant le plus strictement possible l'organisation hiérarchique, n'est pas à la portée de tous les systèmes sociaux et n'est pas toujours la plus efficace.

## **QUESTIONS PRATIQUES, 0**

### **Comment faire faire des mathématiques, à l'école**

## **APOLOGIE et PRESCRIPTIONS, 2**

### **Faire faire, encore, des mathématiques à l'école**

Dans ce qui suit, nous allons faire quelques propositions pour ce qui concerne les mathématiques. C'est ici que notre discours va devenir plus nettement apologétique et prescriptif, parce que les travaux sur ces points sont partiels et insuffisants et parce que la décision sur ces questions n'appartient pas aux techniciens mais à la société entière : elle relève du politique.

#### **Les mathématiques de l'école obligatoire : raisons d'être et organisation du curriculum**

Nous distinguerons trois familles de raisons, évidemment à mettre en débat, et d'ailleurs liées entre elles :

- les mathématiques comme outils de modélisation, et donc de compréhension du monde
- les mathématiques comme discipline de l'argumentation
- les mathématiques comme un outil de formation du citoyen

Nous n'aborderons pas directement, ici, un problème pourtant central. C'est celui qui tient à la grande méconnaissance du travail des mathématiciens : ce travail et ses effets sont socialement invisibles, parce que les mathématiques sont cristallisées dans les objets quotidiens (du pèse-personnes à jauge de contrainte au téléphone numérique, et du disque compact à la balance calculatrice du boucher jusqu'à la planche de surf des neiges, etc...). Comme dans l'étude de la chaîne qui mène de l'industrie chimique et de la recherche biologique au pain quotidien, il faudrait pouvoir identifier le travail invisible qui conditionne les formes de la vie sociale la plus banale.

Nous avons utilisé, dans le paragraphe précédent, le conditionnel. Cela

signifie en particulier que la description des mathématiques *scolaires* qui suit est largement utopique : nous ne prétendons pas que les mathématiques soient en général enseignées de cette manière, mais nous pensons qu'elles pourraient l'être, pour le profit des professeurs et des élèves.

### 3.1 Les mathématiques et la modélisation

Les savoirs et connaissances mathématiques peuvent constituer un moyen , comme l'explique Freudenthal, de maîtriser des phénomènes dans la réalité.<sup>10</sup> On pourrait penser que les mathématiques élémentaires échappent à cette caractéristique, mais ce n'est pas le cas. Toute connaissance mathématique peut être perçue comme un modèle de la réalité, qui va permettre à celui qui modélise d'effectuer des prédictions sur cette réalité. La théorie des situations didactiques, telle qu'elle a été conçue par Brousseau,<sup>11</sup> peut ainsi se décrire très souvent comme une manière de poser des problèmes aux élèves en les mettant face à la nécessité de "prévoir ce qui va se passer" : la connaissance mathématique construite permettra alors directement de "maîtriser le futur", et d'introduire de la rationalité dans des phénomènes apparemment erratiques.

Ainsi, considérons le cas de l'élève de CE1 qui connaît l'addition comme compte de la réunion de deux collections d'objets : il a expérimenté le

---

<sup>10</sup> FREUDENTHAL (1983). , *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*, Dordrecht, Reidel, 1983.

<sup>11</sup> BROUSSEAU (1998). *Théorie des Situations didactiques*, Grenoble, La Pensée Sauvage, 1998.

compte du complément d'une réunion dans le cas de petits ensembles (J'ai un bouquet de huit fleurs, composé de tulipes et de roses, il y a trois tulipes dans mon bouquet, combien y a-t-il de roses ?) puis son calcul direct par surcomptage, lorsque le bouquet n'est pas présent et ne peut être commodément dessiné (comme dans le cas de trente fleurs dont vingt-sept tulipes), et par décomptage (dans le cas de dix-sept fleurs dont deux tulipes). Soit un nouveau problème : quarante-sept billes sont comptées et mises dans un sac, on en retire vingt-huit, que l'on compte, combien de billes reste-t-il dans le sac ? Dans cette nouvelle situation, on demande alors à l'élève de parier sur une réponse qu'il ne peut plus déterminer par un de ces procédés. Bien sûr, il sera possible de vérifier le pari, mais comment parier à coup sûr ? L'addition est un modèle pertinent, comme dans les cas précédents, mais elle ne permet que la vérification d'une réponse : pour l'opération directe, il faudra la soustraction. Cette modélisation produira la réponse, c'est à dire la prédiction.

On pourra également étudier les différentes situations qu'un même modèle (ici, par exemple, l'addition) peut caractériser : l'étude, au Cycle 2, de

l'addition comme moyen de partager un travail (pour réaliser neuf "dessins de Père Noël", nous devons en réaliser deux chacun et il en manquera un que le plus rapide d'entre nous pourra faire en attendant les autres.) ; ou encore, au cycle 3, l'étude d'objets dans l'espace, relativement à leur encombrement, leur volume ou leur capacité. Toutes ces études montrent ceci : *un modèle rend compte d'un problème qui se pose dans une situation bien identifiée, elle-même incluse au sein d'une pratique*. Ainsi, le menuisier cherche le cubage du bois nécessaire à la fabrication d'une chaise, le déménageur s'intéresse à son encombrement : et si les cubages s'ajoutent, l'encombrement d'une série de tables gigogne est celui de la plus grande.

Les exemples évoqués supposent d'une certaine manière qu'une culture épistémologique des modèles puisse être construite par/avec les élèves. Inculquer une "culture des modèles", c'est en particulier commencer à faire comprendre qu'un modèle n'est pas la réalité plus ou moins modifiée ou trahie, mais que c'est une sorte de machine "simplifiée" qui permet de produire des résultats pertinents pour certains problèmes posés dans le monde.

Prenons un dernier exemple : si l'on considère un cylindre de hauteur  $D$  égale à son diamètre, on sait que lorsque son volume augmente la mesure de sa surface augmente aussi. Mais le volume augmente davantage que l'aire, puisque celle-ci est  $\pi D^2$  de "degré 2" en  $D$ , alors que celui-là est  $\pi D^3$ , de "degré 3" : quand  $D$  triple, l'aire est multipliée par 9 et le volume par 27.

De cela il suit toute une série de phénomènes que le modèle rapport surface/volume du cylindre peut expliquer<sup>12</sup>. Que dans une espèce donnée, le gigantisme s'accompagne d'une fragilité osseuse, puisque la résistance d'un os est précisément une fonction du rapport entre la section de l'os (proportionnelle à sa surface) et la masse qu'il supporte (proportionnelle à son volume) : plus l'os est grand, plus ce rapport diminue. A l'inverse, ceci explique que les accidents en cours de récréation sont en général plus spectaculaires que graves<sup>13</sup>. Qu'un petit animal soit plus chaud qu'un grand, puisque le métabolisme produit une quantité d'énergie proportionnelle au volume d'un animal, la déperdition d'énergie étant proportionnelle à sa surface<sup>14</sup>. Que la reproduction à petite échelle de la machine de Newcomen (le premier moteur atmosphérique) ne puisse fonctionner puisque il faut en proportion beaucoup plus de vapeur pour réchauffer des parois proportionnellement plus vastes : c'est un problème qui occupa les efforts de Watt, à l'université de Glasgow, et qui se résout par la même modélisation<sup>15</sup>. De même, que la transpiration soit plus efficace chez les



maigres que chez les gros, qui doivent donc transpirer plus pour maintenir leur température.

Assimiler une "culture des modèles", c'est donc se rendre capable de considérer le modèle non dans un rapport mimétique à la réalité (sous le rapport du modèle précédemment évoqué, un os, un animal, et un moteur ne présentent pas de différences, ce qui signifie que le modèle ne saurait s'identifier à aucun d'entre ces "objets" en particulier), mais comme un système de significations susceptible de nous apprendre des choses sur la réalité, et, par-là même, de nous rendre capable d'agir sur elle. *Ainsi, le modèle donne une dimension générale des situations particulières dont il*

---

<sup>12</sup> Modèle connu en mécanique depuis Galilée, Cf J-P Maury, *Petite histoire de la physique*, Paris, Larousse, 1992.

<sup>13</sup> S.J. Gould, *Quand les poules auront des dents*, Paris, Seuil, 1991.

<sup>14</sup> Y. Chevillard, Concepts fondamentaux de la didactique des mathématiques : perspectives apportées par un approche anthropologique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol 12, N°1, pp. 73-112, 1992.

<sup>15</sup> J-P Maury, Opus cité.

*rend compte*, et c'est la pertinence d'un même modèle qui "explique" la similitude de deux situations différentes dont il rend compte également<sup>16</sup>. Mais la pertinence d'un modèle est à étudier cas par cas !

La "culture des modèles" est aussi une "culture de l'expérimental", où l'on apprend en particulier à "négliger ce qui est négligeable", en fonction du modèle qu'on se propose d'utiliser. Tout travail du type modélisation accompli avec des élèves doit donc prendre en compte cette nécessité, en particulier dans la mesure : il s'agit d'apprendre à considérer le monde réel selon l'opposition nécessaire / contingent, opposition non pas intrinsèque, mais relative à un projet de connaissance spécifique.

Une première "raison d'être" des mathématiques pourrait ainsi s'établir : faire des mathématiques, c'est fabriquer des modèles qui permettront de maîtriser des phénomènes dans la réalité. C'est donc apprendre à considérer la réalité non comme quelque chose que le modèle peut épuiser (d'une certaine manière, définition du scientisme), mais comme quelque chose dont les mathématiques présentent une (des) description(s) utile(s). Faire des mathématiques, c'est donc en particulier éprouver leur utilité dans les modélisations qu'elles permettent.

### **3.2 Les mathématiques et l'argumentation**

Si les mathématiques peuvent faire comprendre aux élèves, même aux niveaux les plus élémentaires, la force des modèles et du processus de modélisation, elles peuvent aussi inscrire la singularité de leurs démarches au coeur même du processus d'enseignement-apprentissage.

En effet, on peut travailler cette discipline comme une discipline de la

conjecture, de la preuve, et de la réfutation, et donc comme une discipline érigeant une communauté de construction des savoirs, conçue dans certaines circonstances comme une transposition, sous condition, des communautés scientifiques.

Là encore, la théorie des situations, et les ingénieries auxquelles elle a donné naissance, montrent comment, au cours des phases de formulation et de validation, les élèves élaborent peu à peu des dispositions argumentatives. Le contrat didactique, ce système d'attentes, centré sur les objets de savoir, qui lie professeur et élèves, va ainsi devoir ainsi intégrer

---

<sup>16</sup> Bachelard étudie par exemple la similitude des équations différentielles des vibrations mécaniques et du courant alternatif, qui permet de comprendre la piézo-électricité. G. Bachelard, *La formation de l'esprit scientifique.*, Paris, Vrin, 1938.

des "habitus épistémologiques"<sup>17</sup>, dans desquels l'élève va conjecturer, prouver, réfuter, et construire peu à peu son autonomie didactique.

Dans cette perspective, les mathématiques peuvent apparaître comme une sorte de propédeutique au débat rationnel, non parce qu'elles figureraient la voie royale vers la connaissance, dans une perspective quasi-platonicienne, mais bien plutôt parce que la force modélisatrice des mathématiques, les propriétés qui sont les leurs de décrire de manière prédictive des événements de la réalité, font que conjecturer, prouver, et réfuter, y sont sans doute plus nettement déterminées que dans toute autre discipline. Je suis face à un sac qui contient 47 billes, j'en enlève 28. Le modèle et la technique de la soustraction me permettront de prévoir, donc de conjecturer et de réfuter, grâce à un système de significations partagé par tous et fondé sur l'addition, qui deviendra ainsi une notion considérée comme définitivement acquise. C'est l'accord de la communauté "scientifique" de la classe dans la reconnaissance de la validité du modèle de la soustraction qui permettra au débat et à l'argumentation de se conclure.

La preuve pourra aussi être externe, causale, c'est à dire expérimentale, désignée dans la conformité avec la réalité : il suffira de compter les billes dans le sac. Mais viendra un temps où la "machine soustraction" elle-même, cristallisant d'une manière "rationnelle" ces preuves "causales", suffira à l'établissement de la preuve.

Cette propédeutique au débat rationnel qu'on peut construire dans l'enseignement et dans l'apprentissage des mathématiques constitue alors une inculcation de ce que Putnam appelle des "valeurs cognitives"<sup>18</sup> : par exemple, le fait de ne pas céder à l'argument d'autorité, ou de ne pas l'utiliser, le fait d'admettre qu'on a tort, le fait de se dissocier de son erreur ou de sa réussite, le fait de chercher avec ardeur toutes les manières de réfuter une conjecture que l'on a soi-même posée, etc...

Par-là, on le comprend, le travail mathématique peut acquérir une valeur formative qui dépasse cette seule discipline.

### 3.3 Les mathématiques et la cité

---

<sup>17</sup> Cf G. Sensevy, *Institutions didactiques, Etude et autonomie à l'école élémentaire*, Paris, PUF, 1998.

<sup>18</sup> H. Putnam, *Le réalisme à visage humain*, Paris, Le Seuil, 1994.

#### 3.3.1 La rationalité partagée

Sans doute, les mathématiques permettent-elles de substituer au manichéisme et à l'emporte-pièce l'argumentation contrôlée, et cela, on l'a vu, avec une grande "possibilité de preuve", mais c'est parce qu'à l'école maternelle et élémentaire on les a considérées ici comme "la physique du quotidien". On comprendra donc que l'on puisse étendre à l'ensemble des disciplines enseignées à l'école les procédures argumentatives qu'elles mettent en oeuvre, sans pour cela nier les diverses spécificités.

En effet, un problème crucial sera celui de la vérité : si le professeur renonce, au sein de certaines situations, à exposer de manière directe la vérité socialement produite, il faudra bien que les élèves trouvent (dans "le milieu" que constituent ces situations) des moyens de construire des assertions garanties. Une "expérimentation" en Sciences, un document en Histoire, un texte en Français, une oeuvre en Arts Plastiques, une activité en Education Physique, etc... devront présenter un certain nombre de signes sur l'interprétation desquels on puisse se mettre d'accord pour soutenir telle ou telle argumentation. Le débat fondé sur l'argumentation rationnelle, loin d'être conçu comme une spécificité mathématique éventuellement transférable avec les mathématiques elles-mêmes, pourra alors se concevoir comme une modalité essentielle du processus d'enseignement-apprentissage, dont les mathématiques auront fourni une forme d'idéaltype. Au-delà, la "formation du citoyen", plus que jamais dans les discours à l'ordre du jour, semble supposer un tel rapport construit à l'argumentation et à la vérité : la vérité de la cité, c'est bien celle que tout le monde peut accepter parce qu'elle est fondée sur la rationalité partagée.

#### 3.3.2 Les outils mathématiques de l'argumentation

Dans cette cité où la vérité publique s'établit au moyen de l'argumentation rationnelle, les mathématiques peuvent également jouer un rôle d'outil.

Tout d'abord, dans la contestation du point de vue "expert", véritable argument d'autorité qui consiste à faire appel à elles pour justifier

l'injustifiable. Il existe, par exemple, dans la mathématisation actuelle de l'économie, des dérives scientifiques, qui pourraient faire que le point de vue de l'expert se substitue au débat politique. Les statistiques et les sondages, d'une manière semblable, peuvent fournir une légitimation aux entreprises d'imposition. D'une manière plus générale, c'est le rapport même aux objets statistiques (tels ceux de moyenne, mode, médiane, écart-type, dans une distribution donnée) qui devrait alors devenir objet d'enseignement dans l'école obligatoire<sup>19</sup> : il faut en effet fournir un soubassement épistémologique et technique à l'appréhension de ce que les différents pouvoirs nous présentent comme *l'opinion*.

## **QUESTIONS PRATIQUES, 1**

### **Quelles mathématiques faire faire, comment faire ?**

#### **Quelles modélisations enseigner ?**

Nous retournerons, en conclusion, à la perspective adoptée au début de cet article. Sans aller très loin dans l'argumentation, nous proposerons le débat suivant : il est nécessaire de s'accorder socialement sur la nature des objets mathématiques enseignées. En effet, admettre (éventuellement) l'argumentation qui vient d'être produite ne dispense pas de la définition collective de ce que sont les "questions vives", vivantes dans la société, que les mathématiques peuvent contribuer à problématiser ; il sera d'autre part nécessaire de reconnaître des "questions ombilicales", qui feront vivre les outils de travail de ces questions vives. Restera vivace le problème du contrôle citoyen des "ignorants" sur les propositions techniques des spécialistes, qui suppose une culture du débat argumenté. Mais l'existence d'un enseignement proposant un rapport aux mathématiques qui ne se réduise pas à quelques techniques dites "fondamentales" - l'existence de problématiques mathématiques dans la culture - est sans doute à ce prix.

Les mathématiques, et plus largement les sciences, sont au coeur du projet républicain qui est avant tout un projet d'émancipation, où démocratie et didactique sont indissolublement liées : vivre en démocratie suppose ainsi la connaissance commune des conditions techniques de la reproduction des moyens de la vie sociale et de la production de moyens nouveaux.

Cela suppose l'expérience commune de l'apprendre-ensemble, l'apprendre de l'autre dans la garantie mutuelle des assertions énoncées, ethos dont le travail mathématique peut fournir un prototype.

---

<sup>19</sup> On peut consulter ici le livre de S.J Gould, *L'éventail du vivant*, Paris, Seuil, 1997, où l'auteur montre de façon instructive comment des conceptions épistémologiques très discutables (la croyance au "progrès") reposent elles-mêmes sur des conceptions statistiques fausses.

Alain MERCIER  
IUFM d'Aix-Marseille

*Ce qu'il faudrait dire encore...*

## **Partie 2**

### **Introduction**

#### **Les tentations totalitaires du système d'enseignement**

*Les avantages de l'ostension non déguisée*

*La différenciation des pratiques de direction d'étude*

*Figures du libéralisme, l'autonomie et l'exclusion*

### **Conclusion**

## **Partie 3**

### **Introduction**

**La question des parcours diversifiés et des enquêtes** (de nature culturelle et/ou technique)

*Le mathematical pursuit*

*Le musée scolaire*

*Les techniques de l'étude*

**La question de la citoyenneté**

*Pénombre*

*La boutique de savoirs*

*L'éthique des savoirs scientifiques*

**Conclusion**