



HAL
open science

Gestes d'instrumentation didactique de calculatrices graphiques dans l'étude de classes paramétrées de fonctions

Maryza Krysinska, Alain Jacques Mercier, Maggy Schneider

► To cite this version:

Maryza Krysinska, Alain Jacques Mercier, Maggy Schneider. Gestes d'instrumentation didactique de calculatrices graphiques dans l'étude de classes paramétrées de fonctions. REF Réseau Education Francophone, Sep 2003, Genève, Suisse. hal-01994188

HAL Id: hal-01994188

<https://hal.science/hal-01994188>

Submitted on 25 Jan 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Gestes d'instrumentation didactique de calculatrices graphiques dans l'étude de classes paramétrées de fonctions

M. Kryszynska, A. Mercier, M. Schneider¹

L'usage des calculatrices graphiques modifie en profondeur les organisations mathématiques scolaires actuelles: c'est là un des points d'achoppement de leur introduction généralisée. Nous avons donc cherché une *organisation mathématique* pour l'étude des fonctions du programme de Seconde qui rendrait cet usage efficace, un choix de transposition qui rendrait manifestement l'usage des calculatrices économique pour le professeur comme pour les élèves. Nous étudions, du point de vue du caractère instrumental des calculatrices, quelques *situations didactiques* relatives à l'étude des classes paramétrées de fonctions, qui nous semblent répondre aux contraintes que nous nous sommes donnés. Nous appuyons nos analyses sur le concept d'*instrumentation didactique* de la calculatrice graphique et nous décrivons quelques gestes relatifs à cette instrumentation par l'enseignant, pour montrer comment ils permettent aux élèves de mobiliser des techniques à forte composante épistémique.

1. Contexte institutionnel, cadre théorique et objet de l'étude

L'usage des calculatrices graphiques dans l'enseignement francophone belge est devenu obligatoire depuis 1996 dans les programmes officiels. Et encore cette obligation ne concerne-t-elle que les classes de la filière scientifique (programmes à 6 heures de mathématique par semaine). En outre, elle s'exprime sur le mode mineur par l'injonction : " l'élève disposera d'une calculatrice graphique ou d'un logiciel ou, à tout le moins, d'une calculatrice scientifique ", selon le souhait de certains auteurs du programme de préserver la " gratuité " de l'enseignement. L'absence d'évaluation externe du type baccalauréat laisse au professeur toute liberté d'intégrer ou non les calculatrices graphiques dans l'évaluation dont il est le maître d'œuvre et ce fait peut influencer fortement l'usage de ce matériel au cours de l'enseignement, pour des raisons faciles à imaginer et selon des mécanismes semblables à ceux exhibés par L. Trouche (2002), à propos des calculatrices symboliques. En bref et à première vue, une entrée somme toute modeste des calculatrices graphiques dans l'enseignement belge francophone.

Mais là n'est pas notre principal propos, même s'il précise l'environnement institutionnel de notre démarche. Celle-ci relève d'une posture particulière vis-à-vis de l'emploi des calculatrices graphiques que nous situons, dans cette section, par rapport à d'autres attitudes observées chez les professeurs en formation continuée. Sans chercher à être exhaustifs, nous distinguerons :

- Le refus pur et simple de l'usage des calculatrices graphiques dans l'enseignement, revendiqué au nom de la liberté pédagogique et pour des raisons d'incompatibilité avec une réelle formation mathématique.
- Un usage axé sur la critique systématique de l'outil visant à montrer aux élèves qu'il faut s'en méfier, par exemple parce que le graphique affiché peut laisser croire à l'absence

d'asymptote verticale là où il y en a une. Cet usage peut déboucher sur l'abandon de la machine, revenant ainsi à un refus "motivé" par référence toujours à la formation mathématique qui se doit d'aller au-delà des apparences.

- Un usage effectif et non pensé lequel consiste à utiliser les calculatrices graphiques par obligation, pour être tout simplement "pédagogiquement correct" ou encore pour changer d'habitude, ce qui revient souvent à l'utiliser au hasard des circonstances.

- Un usage opportuniste et pensé en fonction d'un projet d'enseignement, quelle que soit la forme que prend cet usage : par exemple, à des fins d'illustration ou de résolution de problèmes. Les calculatrices sont là, on les utilise le plus "intelligemment" possible, au prix d'une transposition spécifique de l'enseignement projeté pour l'adapter aux possibilités de l'outil, mais sans changer aucunement le matériel disponible ou même sans le choisir vraiment.

- Un usage construit qui relève de ce que Y. Chevallard (1992) appelle l'ingénierie didactique des objets informatiques : il s'agit cette fois de modifier l'outil en fonction d'un projet d'enseignement, par exemple bloquer certaines fonctionnalités du logiciel *cabri-géomètre* pour obliger l'élève à valider l'usage d'une transformation géométrique dans un problème de construction.

Du point de vue de l'intention didactique, la calculatrice demeure presque au stade d'artefact jusqu'au troisième des usages décrits ci-dessus, son emploi n'étant pas subordonné à un projet d'enseignement sinon l'exercice de l'esprit critique. Dans les deux derniers, elle devient par contre instrument au service d'une intention didactique. Nous parlerons alors **d'instrumentation didactique**, empruntant le concept d'instrumentation à Leplat (1985 ; 2001), , Vygotski (1985), Mercier (1994), Rabardel (1995), et l'adaptant au cas d'un professeur qui fait d'un artefact telle que la calculatrice, un instrument pour étudier des mathématiques. Comme précisé par Trouche dans ce même ouvrage, l'instrumentation est constituée des schèmes d'utilisation par lesquels un sujet fait d'un artefact ou outil, un instrument au service de la réalisation d'une tâche. Ici le sujet est professeur et enseigner est la tâche qui lui est assignée. Cette instrumentation didactique s'accompagne **d'une instrumentalisation didactique** pour désigner le dispositif didactique que son introduction permet de constituer. L'instrumentalisation est plus nette lorsque les fonctionnalités de la calculatrice font l'objet d'une "personnalisation" à des fins didactiques, que ce soit dans le sens d'un enrichissement ou d'un appauvrissement. Ces concepts d'instrumentalisation et d'instrumentation sont les deux dimensions (côté outil et côté rapport à l'outil) d'une **genèse instrumentale**. Dans le cas d'une intention didactique, on peut imaginer un processus d'instrumentalisation minimal en regard de celui d'instrumentation. C'est le cas lorsque la personnalisation de l'outil est à charge des élèves, tout l'apprent didactique étant situé dans l'accès à l'organisation mathématique visée, accès que l'artefact permet de viabiliser. C'est le cas qui nous intéresse ici : il relève plus du quatrième usage décrit ci-dessus que du dernier.

La notion d'instrumentation didactique rejoint celle d'orchestration instrumentale de Trouche (2002), soit "un dispositif, partie prenante du système d'exploitation didactique, qu'une institution (l'institution scolaire en l'occurrence) organise dans le but d'orienter l'action instrumentée des élèves". La première notion nous semble cependant plus large, relevant tout simplement d'une certaine intention initiale, sans forcément impliquer un des types de dispositifs par lesquels Trouche illustre l'orchestration instrumentale : soit une modification de l'artefact pour changer les schèmes d'utilisation (par exemple jouer sur l'interface d'une calculatrice pour favoriser chez les élèves le passage d'un point de vue

cinématique du concept de limite d'une fonction à un point de vue "approximation"), soit un dispositif d'organisation du travail des élèves, pour faciliter la socialisation de leurs actions et productions (le choix d'un "élève-sherpa" qui pilote une calculatrice "rétroprojetée" ou l'agencement des élèves en binômes et l'instauration d'un "cahier de recherches" lors de travaux pratiques). En outre, la notion d'instrumentation didactique est suffisamment large pour recouvrir tantôt une "utilisation fonctionnelle" de l'artefact (pour faire des mathématiques), tantôt une "utilisation pédagogique" (pour aider les étudiants à comprendre les mathématiques), telles que distinguées par Kendal et al. (2002), ou encore indifféremment un fonctionnement "boîte blanche" ou "boîte noire" (Elbaz-Vincent (2002)), selon que l'on cherche ou non à en éclairer le fonctionnement.

Notre tentative relève de l'instrumentation didactique de calculatrices graphiques dans le cadre d'un projet d'enseignement des fonctions en tant qu'outil de modélisation. Elle se situe de manière très souple par rapport aux distinctions précédentes. Nous visons ici une instrumentation didactique opportuniste, en inféodant l'usage des calculatrices graphiques aux principes organisateurs d'un projet didactique préalable, sans forcément construire une orchestration instrumentale particulière. Cette position repose sur une conviction *a priori*, qui consiste à lier la viabilité d'un artefact à la fois à sa simplicité d'utilisation, qui en donne l'économie, à la multiplicité de ses usages et aux catachrèses qu'il permet, ce qui en définit les habitats potentiels, l'écologie.

Chemin faisant, nous avons pu observer quelques phénomènes liés à l'articulation des trois dialectiques fondamentales par lesquelles la théorie des situations modélise la production des connaissances mathématiques : action, formulation, validation. L'étude différenciée de ces phénomènes, fortement liés au contenu mathématique étudié auquel ils sont fort sensibles, montre la nécessité d'outiller l'instrumentation didactique d'un travail conséquent, tant mathématique que didactique. En particulier, nous montrerons l'intérêt d'orienter l'instrumentation des calculatrices par les élèves au moyen de gestes d'enseignement particuliers et d'une organisation mathématique pensée à cet effet.

1.1. Un enseignement des fonctions, classe par classe, qui favorise le processus de modélisation ; la portée *a priori* d'une pratique instrumentée par les calculatrices graphiques

Notre enseignement des fonctions, tel que pensé dans AHA, (1999) et DQQ (1996 et 1997), vise essentiellement leur disponibilité en tant qu'outils de modélisation. Dans cette perspective, il nous apparaît important d'étudier les fonctions par classes comme modèles de standardisation de divers phénomènes. Par exemple, les mouvements libres sur des plans inclinés sont modélisés par la classe des fonctions polynomiales du deuxième degré tout comme le sont les aires de rectangles isopérimétriques ; les mouvements harmoniques sont modélisés par la classe des sinusoides ; différents phénomènes de croissance ou de décroissance sont modélisés par la classe des fonctions exponentielles, etc. Nous développons ailleurs (Krysinska, à paraître) que ce processus de modélisation suppose, entre autres : - l'a détermination de l'identité graphique associée à chaque classe sous forme d'idéogrammes (par exemple : droite, parabole, sinusoides) ; - l'interprétation graphique du rôle des paramètres intervenant dans les formules (ils spécifient le comportement particulier de telle droite, parabole, etc.)

En effet, l'allure graphique à laquelle conduisent quelques résultats expérimentaux, dans

un contexte donné, peut induire l'idée de chercher la fonction "modèle" à l'intérieur d'une classe paramétrée particulière. Mais c'est la détermination des valeurs numériques des paramètres qui doit rendre pertinent le modèle eu égard au problème étudié. En bref, il s'agit, pour l'élève, de maîtriser les règles de correspondance entre la variabilité d'un ensemble d'ostensifs graphiques et celle des ostensifs algébriques associés. Cette maîtrise ne va pas de soi, plusieurs difficultés étant liées au fait qu'un graphique est une des multiples représentations possibles d'une expression algébrique en même temps qu'on peut lui associer des formules différentes. Cette "ambiguïté" est relative, dans les deux cas, au choix du repère. Par exemple, la fonction $y = x^2$ peut être représentée par plusieurs paraboles dont l'apparence dépend du choix des unités sur les axes ; réciproquement, à une parabole, on peut faire correspondre autant d'équations du second degré que de choix de ces unités. Par contre, étant donné un repère, on peut identifier la classe de toutes les paraboles dont l'axe de symétrie est parallèle à l'axe des ordonnées à la classe des formules $y = ax^2 + bx + c$. Mais le rapprochement global de ces deux types d'ostensifs est peu opérationnel car il ne permet pas de faire des associations fécondes et de réaliser le travail de modélisation qui suppose d'ajuster les paramètres, à l'intérieur d'une classe paramétrée appropriée de fonctions, aux particularités du problème étudié. D'où l'intérêt *a priori* de faire étudier par les élèves tant les effets graphiques d'un changement algébrique que les effets algébriques d'un changement graphique.

Une telle étude suppose, en l'absence de théorie préalable et avec le seul support "papier-crayon", une expérimentation ample et fastidieuse. L'outil "calculatrice graphique" nous semblait en revanche jouir là d'une valence pragmatique certaine. C'est pourquoi, nous l'avons testé en tâchant de diversifier les tâches demandées aux élèves, aux seules fins d'une première investigation didactique. Ci-dessous, nous relatons des observations réalisées à deux occasions : l'exploration graphique des fonctions du second degré ; la détermination d'une fonction du second degré "sous contraintes". Mais nous nous appuyons également sur d'autres expériences que nous ne pouvons relater ici, en particulier, la détermination d'une fonction du troisième degré sous contraintes, impliquant son approximation affine autour de 0. Ces observations n'ont pas de caractère exhaustif ; elles sont choisies pour alimenter l'analyse qui suit, laquelle leur confère en même temps le statut de "fait didactique", n'étant falsifiée par aucune de nos autres observations : là se situe notre prudence méthodologique. Au titre d'une première interprétation, cette analyse débouche ainsi sur des hypothèses didactiques qui ne demandent qu'à être étayées par d'autres voies.

2. Expérimentations dans les classes

2.1 Exploration de l'identité graphique de la classe paramétrée des polynômes du second degré et du rôle graphique des paramètres

Contexte de l'expérimentation

Dans une première phase d'expérimentation, nous proposons à des élèves d'explorer la classe paramétrée des fonctions du second degré au moyen d'une calculatrice Casio 30 ou Casio 35. Il s'agit de trois classes d'élèves de 4^{ème} année de l'enseignement secondaire (environ 15 ans). Leur seule expérience d'étude d'une classe paramétrée est relative aux

fonctions du premier degré. Par ailleurs, la fonction $y = x^2$ a été dessinée, point par point, au cours de l'année scolaire précédente, parmi d'autres fonctions de référence et, dans une classe, la parabole a été étudiée comme lieu géométrique quelques semaines auparavant et son équation établie dans un système d'axes choisi de manière à faire apparaître une fonction du type $y = kx^2$.

La question posée est : « A quels types de graphiques conduisent les fonctions du second degré $y = ax^2 + bx + c$ lorsqu'on fait varier a , b et c ? Essayez de dégager les rôles des paramètres a , b et c . »

Pour faire comprendre l'enjeu aux élèves de deux des classes concernées, nous leur rappelons en quoi a consisté, lors de l'année scolaire antérieure, l'étude de la classe des fonctions du premier degré $y = ax + b$, paramétrée par le coefficient angulaire et l'ordonnée à l'origine : la racine est $-b/a$ et l'allure du graphique dépend du coefficient angulaire, droite croissante si a est positif et droite décroissante si a est négatif ; ces propos sont accompagnés de dessins. Dans la troisième classe, le professeur se contente d'évoquer les représentations graphiques des fonctions du premier degré. Les élèves parlent alors de droites croissantes et de droites décroissantes sans évoquer la recherche de la racine. Cette omission n'est pas relevée par le professeur.

Parmi les fonctionnalités offertes par les calculatrices, plusieurs sont déjà familières aux élèves et peuvent être mobilisées pour la recherche présente. Il s'agit de

- dessiner les graphiques à partir des formules
- faire des “ zoom in ”
- faire des “ zoom out ”.

Les élèves sont invités à travailler par groupe de quatre, à consigner toutes leurs réactions et à rédiger un rapport qui traduit le travail de leur groupe. Selon les moments, nous sommes trois ou quatre observateurs à passer d'un groupe à l'autre pour observer les élèves au travail et pour les inviter au besoin à préciser et à argumenter leurs pensées. Nous leur suggérons aussi de temps à autre d'utiliser l'ensemble des fonctionnalités de la calculatrice. Une de leurs grandes difficultés est de laisser une trace écrite de leurs essais infructueux.

Une identité graphique forte

Instantanément, tous les groupes introduisent des formules du deuxième degré en choisissant des valeurs numériques simples pour les paramètres a , b et c , valeurs entières et ne dépassant pas 10 en général. Les élèves retirent rapidement de leurs essais la conviction qu'il s'agit toujours d'une parabole, au point de dire qu'ils se sont trompés lorsqu'ils voient un segment de droite ou une courbe d'une autre forme (par exemple une courbe du troisième degré programmée par erreur). De cette première investigation, certains concluent que a doit être choisi non nul. Plusieurs élèves s'en tiennent à parler de parabole en un sens d'une courbe en U, courbe qu'ils ont rencontrée à l'occasion du graphique de la fonction $y = x^2$ l'année précédente, comme nous l'avons dit, et qu'ils reconnaissent ici dans tous les cas dessinés. D'autres distinguent concavité vers le haut et vers le bas en parlant maladroitement de croissance et de décroissance de la courbe et, dans les classes où le professeur a parlé de la racine d'une fonction du premier degré, les élèves parlent plus volontiers soit de racine, soit d'intersection des courbes avec les axes. Après une brève phase d'exploration, des stratégies plus systématiques sont apparues lors d'une “ phase d'épuration ” pour étudier le rôle des coefficients :

- fixer deux paramètres et faire varier le troisième ;
- fixer un paramètre et faire varier les deux autres.

La première stratégie a été déjà observée par Trouche (2002) en de semblables circonstances. La deuxième stratégie est apparue dans les classes que nous avons observées, quoique moins fréquemment que la première.

Des stratégies efficaces qui débouchent sur des conjectures

Ces deux manières de faire permettent à certains élèves de dégager le rôle d'un paramètre donné. Pour une même valeur de celui-ci, ils observent ce qui ne change pas et, pour des valeurs différentes du même paramètre, les autres étant fixés, ils regardent ce qui change. Ils conjecturent ainsi deux théorèmes, l'un étant la contraposée de la réciproque de l'autre, établissant ainsi, d'une manière pragmatique, une "équivalence-en-acte" entre un paramètre et le phénomène graphique correspondant. Par exemple, dans les cas des paramètres a et c , ces stratégies induisent les schèmes d'action suivants :

Ces derniers donnent lieu aux conjectures 2 et 4 citées ci-dessous et relatives au paramètre a et aux conjectures 3 et 5 en ce qui concerne le paramètre c . Comme on s'en doute, ces stratégies sont peu efficaces pour cerner le rôle du paramètre b . Plusieurs conjectures incorrectes sont formulées, comme la conjecture 1 ci-dessous.

Après deux heures consécutives dans deux des classes et après une heure dans la troisième, les groupes d'élèves consignent dans leurs rapports respectifs des conjectures, souvent quatre ou cinq, sur lesquelles ils se sont mis d'accord.

Au total, nous recevons une quinzaine de conjectures dont nous ne retenons ici que cinq pour alimenter notre analyse :

1. *Lorsque b varie dans les positifs, il y a un déplacement de la parabole vers la gauche. Lorsque b varie dans les négatifs (devient plus négatif) il y a un déplacement vers le bas à droite.*
2. *Plus " a " va être grand, plus la courbe va être pointue. Plus " a " est petit, plus la courbe va être plate ou plus " a " est grand, plus la parabole est étroite ; plus " a " est petit, plus la parabole est large.*
3. *(Le paramètre) c fait glisser la parabole sur l'axe des y suivant le signe de c (monter ou descendre). C'est le coefficient de translation.*
4. *Pour une même valeur de a , les paraboles ont toutes la même forme.*
5. *La courbe passe par le point $(0, c)$. (Le paramètre) c est l'ordonnée à l'origine.*

Une difficulté à valider ces conjectures

Les conjectures formulées dans les groupes sont rassemblées et soumises à la sagacité de tous : quelles sont celles qui sont correctes, incorrectes, celles que l'on peut valider ou invalider ; quelles sont les conjectures peu claires ? Comme on s'en doute, ce sont les conjectures relatives au rôle de b qui posent le plus de problèmes car imprécises, voire incorrectes, telle la conjecture n° 1 ci-dessus. Nous y reviendrons.

En ce qui concerne cette étape de l'expérimentation, nous rapportons, la grande difficulté éprouvée par la plupart des élèves de deux classes à comprendre notre demande de validation. En particulier, ils ne repèrent pas qu'ils peuvent facilement prouver que le point $(0, c)$ appartient à la parabole ou que les courbes $y = x^2 + bx$ passent par les points $(-b, 0)$ et $(0, 0)$. Plusieurs ne savent même pas comment vérifier que tel point donné par des coordonnées

numériques appartient ou non à telle parabole particulière. En général, les élèves se réfèrent aux essais réalisés et proposent de prendre des exemples supplémentaires de triplets de paramètres pour observer le graphique affiché par la calculatrice. L'un d'eux dit ainsi : “ Il faut prendre une dizaine d'exemples et c'est bon ”. Une observation nous a paru significative à cet égard : pour contrôler que les courbes passent par $(0, c)$, un groupe propose de remplacer par 0, non pas x , mais a et b et exhibent le graphique de la droite d'équation $y = c$ affiché par la calculatrice suite à cette programmation.

Les élèves de la troisième classe – celle dans laquelle les paraboles ont été préalablement étudiées comme lieux de points – s'en sortent plus aisément. Par exemple, pour prouver la conjecture n° 5, les élèves proposent des arguments corrects : *il faut remplacer x par 0 et l'on obtient $y = c$* . Ainsi, pour les autres, la dialectique graphique/algébrique n'est pas en place au début du travail, soit que l'usage de la formule ne fasse pas preuve pour un phénomène graphique, soit que le lien de la formule au graphique n'existe que par l'entremise de l'artefact qu'est la calculatrice.

Une difficulté à passer d'une perception visuelle à une conceptualisation en termes d'affinité pour interpréter le rôle du paramètre a

Dans deux des trois classes, nous posons la question suivante : Dessinez, dans un même système d'axes, la parabole d'équation $y = x^2$ et la parabole d'équation $y = 3x^2$. Décrivez la transformation géométrique qui fait passer de la première à la seconde et justifiez-la en associant un point quelconque de la première à son image sur l'autre par cette transformation.

Contrairement à ce que nous pensions *a priori*, cette question suscite de grandes difficultés. Notre intention initiale était de faire dépasser par les élèves une première perception du rôle de a en termes de mouvement ou d'allure globale : “ la parabole se resserre ou elle est plus pointue ”. Pour interpréter ce qui se passe, il faut d'abord penser à mettre en correspondance des points de la première parabole et des points de la seconde, ce qui est induit par la question même. Il faut ensuite se faire correspondre sur les deux paraboles des points respectifs ayant même abscisse (à moins, comme nous le montrerons à la section 3.3., de penser à une affinité dont l'axe est l'axe des y et dont le rapport est $1/\sqrt{3}$ en écrivant la fonction sous la forme $y = (\sqrt{3}x)^2$, mais cela n'est visiblement pas à la portée des élèves). Il faut enfin interpréter l'ordonnée d'un point d'une courbe comme la longueur du segment qui joint ce point à sa projection orthogonale sur l'axe des abscisses afin de pouvoir réinvestir des connaissances antérieures sur les affinités et leur impact sur les longueurs et les surfaces. Aucun élève ne fournit d'interprétation valable, soit qu'ils privilégient les liens horizontaux en faisant correspondre d'une parabole à l'autre des points ayant même ordonnée sans parvenir à conclure, soit qu'ils ne perçoivent pas une ordonnée comme mesure d'un segment.

Une autre difficulté tient bien sûr au fait que la question porte sur l'interprétation de ce que la calculatrice affiche. Il n'est pas donc possible aux élèves d'instrumenter celle-ci pour contrôler le résultat. C'est que les *fonctions* dont nous parlons, auxquelles d'ordinaire nous associons sans autre forme de procès des *équations* de courbes, devraient ici être comprises comme des *formules* de calcul de coordonnées permettant d'obtenir des points des courbes transformés les uns des autres par une transformation ponctuelle. Ce jeu de cadres n'est pas habituel, faute de la notion de *formule de calcul* dont le manque, ici, est manifeste (Mercier, 1995).

Dans la troisième classe, nous formulons donc la question de la manière suivante : *Quelle*

transformation géométrique faut-il faire subir à la courbe d'équation $y = x^2$ pour obtenir la courbe d'équation $y = 3x^2$? Ici, la question n'induit pas la technique de correspondance point à point. Peu d'élèves y songent d'eux-mêmes et ceux qui le font ne parviennent pas à interpréter ce qui se passe en termes de transformation faite, à nouveau, de penser à une ordonnée comme longueur d'un segment.

2.2. Détermination d'un polynôme du deuxième degré " sous contrainte "

Dans les trois classes, nous proposons ensuite une tâche qui inverse en quelque sorte la problématique, puisqu'il s'agit de déterminer l'expression analytique d'une parabole donnée : « On translate de trois unités vers la droite la courbe donnée par $y = x^2$. Quelle est l'équation de la courbe traduite ? » Voici des techniques efficaces exploitées par les groupes d'élèves pour réaliser cette tâche :

Technique par ajustement

Les élèves travaillent par anticipation et par inférence en situation. Ils essaient d'abord $y = x^2 + 3$ ou $y = x^2 - 3$ et constatent alors que la courbe " monte " ou " descend " de trois unités. Ils essaient alors $y = x^2 + 3x$, mais la parabole n'est pas " du bon côté de l'axe des y ". Alors ils changent en $y = x^2 - 3x$ et voient que la parabole se trouve du bon côté de cet axe mais qu'elle est trop basse et pas assez à droite. Certains remarquent qu'il faut en fait doubler le coefficient associé au terme en x parce qu'on n'a que " la moitié de ce qu'on veut ". Sans doute veulent-ils dire que la parabole obtenue a subi une translation de $3/2$ unités vers la droite et pas de 3 unités. Ils arrivent alors à $y = x^2 - 6x$. Ensuite ils font remonter la parabole en jouant sur le paramètre c , parfois en une étape, parfois en plusieurs, par ajustements successifs. Ils parviennent finalement à l'expression $y = x^2 - 6x + 9$. Quelques élèves font remarquer qu'il s'agit d'un carré parfait et écrivent l'équation de la courbe sous la forme $y = (x - 3)^2$. Un groupe d'élèves va plus loin pour prouver que c'est la bonne formule en montrant que le point $(3, 0)$ appartient à la parabole (" si $x=3$, alors $y=0$ "); c'est, disent-ils, le sommet de la parabole traduite. D'autres élèves encore, après avoir essayé $y = x^2 + 3$, affirment que " c'est en fait le tout qui doit être au carré ". Ils essaient d'abord $y = (x + 3)^2$ pour le modifier en $y = (x - 3)^2$ sans pour autant pouvoir expliquer ce résultat.

Technique numérique

Cette technique consiste à comparer les abscisses des points respectifs des deux paraboles ayant même ordonnée. Les élèves utilisent, pour cela, les expressions telles que *si $x=...$, alors $y=...$* , ou les tableaux numériques de la forme

On trouve, par exemple

ou

si $y = 1$, alors $x = 4 = 1+3$ ou $x = 2 = |1-3|$

si $y = 4$, alors $x = 5$ ou $x = 1$

Dans les deux cas, une régularité apparaît et les élèves proposent l'équation de la courbe translatée sous la forme $y = (x - 3)^2$. La vérification de la réponse se fait pour quelques points, à l'aide de la calculatrice.

Technique graphique

Cette technique est utilisée seulement par quelques élèves sur tous ceux des trois classes. Par des gestes sommairement commentés, ces élèves envisagent un circuit comme celui de la figure suivante (Fig. 1) : on considère le point A sur la courbe translatée ; on retranche trois à son abscisse ; on élève ensuite au carré cette différence et on propose le résultat obtenu comme ordonnée du point A .

Le rôle de la calculatrice est, de nouveau, réduit au contrôle du résultat mais ce contrôle est l'effet du lien enfin construit entre monde graphique et monde algébrique.

Fig. 1

Technique par changement de variable

Cette technique est induite par certains observateurs lorsqu'ils proposent aux élèves de prendre un point quelconque de la parabole translatée, de noter ses coordonnées par (x', y') et de rechercher une relation entre elles. Certains élèves font alors spontanément des associations et combinaisons heureuses entre les coordonnées (x', y') du point A' et celles (x, y) du point A dont il est l'image par la translation.

$$y' = y = x^2 \text{ et } x' = x + 3$$

$$\text{d'où la formule pour } A' : y' = (x' - 3)^2$$

D'autres y arrivent en profitant de l'idée que leur suggère un des observateurs de comparer ordonnées et abscisses des points correspondants sur les deux paraboles. Cette mise en correspondance ne pose aucun problème, les élèves percevant d'emblée quels points associer.

Cela ne signifie pas forcément que les élèves acceptent que l'écriture $y = (x - 3)^2$ puisse être aussi représentative de la parabole translatée. L'un ou l'autre d'entre eux exprime un malaise à ce propos, au moment de la synthèse collective, en s'attachant à l'idée qu'il faut conserver les "primes". Ils abandonnent cependant ces appendices d'eux-mêmes lorsqu'ils recourent à la calculatrice pour tester leur réponse par la programmation de $y = (x - 3)^2$.

3. Analyse des faits observés

3.1. Une identité graphique inégalement identifiable selon la classe de fonctions étudiée

Des idéogrammes qui définissent une identité graphique

L'identité graphique d'une classe de fonctions se définit par l'ensemble des graphiques-idéogrammes représentant toutes les fonctions de la classe. Le mot "idéogramme" est à prendre au sens de Chauvat (1997) qui s'inspire du point de vue de Lacasta (1995) et qu'il exprime ainsi : "Le mode idéogrammatique, c'est l'idéogramme au sens de Lacasta [ou signe graphique qui représente une idée (une expression algébrique, une fonction affine, quadratique,)]. C'est une courbe non repérée, contenant les points singuliers et tous les éléments caractéristiques d'un type de fonctions, y compris, par exemple, les branches

infinies. ”

Comme nous l’avons observé, cette identité graphique, telle que perçue par les élèves, peut prendre en compte ou non certains critères, suivant leur “ culture ” ou tout simplement en fonction de connaissances liées au contrat didactique dont la teneur peut implicitement transparaître au travers de séances de rappels. Ainsi, une seule forme en “ U ” peut symboliser, pour eux, les graphiques des fonctions du second degré, qu’ils l’appellent ou non “ parabole ” en fonction de leurs connaissances relatives à ce lieu ou au graphique de la fonction $y = x^2$. D’autres distinguent deux paraboles : l’une dont la concavité est tournée vers le haut et l’autre, vers le bas, sans forcément être sensibles au nombre de racines. Par contre, les six idéogrammes classiques sont nécessaires pour combiner le critère de concavité et celui du nombre de points d’intersection avec l’axe x.

Prenons un autre exemple significatif : celui des fonctions homographiques à propos duquel un seul idéogramme peut émerger : une hyperbole équilatère dotée d’asymptotes parallèles aux axes. Ou, à partir de là, peut être faite une spécification qui tienne compte de la position des asymptotes par rapport aux axes et/ou de la position des branches de l’hyperbole par rapport aux asymptotes.

Une identité graphique plus ou moins marquée, eu égard aux transformations en jeu

Modulo cette latitude dans la modélisation en idéogrammes des fonctions d’une même classe, l’identité graphique est plus ou moins “ marquée ” suivant la classe des fonctions étudiées, en ce sens qu’elle est plus ou moins réductible à un petit nombre d’idéogrammes. Ainsi, la “ parabole ” d’axe parallèle à Oy peut être paradigmatique des fonctions du second degré et l’hyperbole équilatère des fonctions homographiques parce que, dans tous les graphiques obtenus, on reconnaît soit le graphique de $y = x^2$ dans un cas, soit celui de $y = 1/x$ dans l’autre, éventuellement “ déplacé ”, “ resserré ”, “ renversé ” comme disent les élèves. Par contre, on peut difficilement “ représenter ” tous les graphiques des fonctions du troisième degré au moyen de celui de la fonction $y = x^3$. Trois “ formes ” peuvent être *a priori* identifiées, en prenant comme critère le nombre de points en lesquels s’annule la dérivée, comme c’est fait dans une revue destinée à des élèves (Math-Jeunes 2002). Mais on ne tient pas compte alors ni de la position du graphique par rapport aux axes, ni d’une contraction ou d’un étirement qui n’altérerait pas cette forme, ni d’un “ renversement ” par rapport à un axe. Ces trois formes peuvent être aussi perçues différentes en un sens naïf pourvu que les cas rencontrés se distinguent suffisamment d’un point de vue perceptif, quoique cela n’aille pas de soi, ainsi que nous l’avons pu l’observer, les élèves amalgamant fonctions monotones strictement ou non. De ces cas de figures, on passe à beaucoup plus en combinant cette dernière caractéristique avec le nombre de racines et le signe du coefficient du terme du 3^e degré.

Cette identité graphique plus ou moins marquée peut être rapprochée d’une distinction mathématique : le passage de la fonction de base ($y = x^2$, $y = 1/x$ ou $y = x^3$) à toutes les fonctions de la classe correspondante s’effectue sur base de modifications graphiques réductibles ou non, suivant les cas, à des transformations du plan pouvant être identifiées sur l’écran de la calculatrice, c’est-à-dire des translations et des affinités orthogonales d’axe Ox ou Oy . C’est le cas des fonctions du deuxième degré et des fonctions homographiques. Ce ne l’est plus pour les polynômes du troisième degré. On peut bien passer d’une telle fonction à

une fonction du type $y = x^3 + kx$ d'abord au moyen d'une translation qui applique le point d'inflexion sur l'origine du repère, puis par le biais d'une affinité orthogonale d'axe Ox qui réduit à 1 le coefficient du terme du 3^e degré. Mais la "réduction" globale à la fonction $y = x^3$ suppose au moins une affinité non-orthogonale qui, elle, ne peut être identifiée sur l'écran de la calculatrice. En effet, on peut passer de cette dernière fonction à une fonction générale du troisième degré au moyen d'une transformation affine du type $y' = cy + d$ et $x' = ax + b$ et donc aller de l'une à l'autre en sens inverse au moyen de la transformation affine réciproque. Or, si cette transformation conserve le caractère fonctionnel, elle fait correspondre un système d'axes affins à un système d'axes orthogonal, ce qui fait qu'il faut imaginer une perspective affine particulière de l'écran pour le percevoir, la calculatrice ne travaillant qu'avec des systèmes d'axes orthogonaux.

Comme le montre cette brève analyse, le passage d'un idéogramme "de base" à tous les idéogrammes modélisant la classe de fonctions concernée ne s'effectue pas toujours sur base de transformations facilement identifiables, d'un point de vue perceptif, sur la calculatrice graphique. Et encore, n'avons-nous pas fait de distinction, de ce même point de vue, entre les translations et les affinités orthogonales dont l'axe est un des axes du repère. Or, nous avons tout lieu de penser *a priori* qu'il y en a une et qu'elle est, de plus, relative à la classe de fonctions étudiées. Nous y revenons plus loin.

Cette analyse permet de rendre compte de la diversité des réponses données par les élèves à qui l'on demande d'explorer l'identité graphique d'une classe paramétrée de fonctions. Diversité liée tant à leur culture mathématique, comme le montre l'identification des idéogrammes des Fig. 8 et 9 par des élèves qui ne connaissent pas le concept de dérivée, qu'à ce qu'ils pressentent de la demande de l'enseignant à travers une séance de rappels, comme illustré par l'exploration des fonctions du second degré. D'où l'intérêt *a priori* de gestes d'instrumentation didactique canalisant une exploration "sauvage". Nous y reviendrons.

3.2. De l'espace " triplets de paramètres-courbes " à l'espace " expressions analytiques-lieux de points " : problèmes de validation

Comme nous l'avons relevé plus haut, les élèves rentrent avec une grande facilité dans le jeu de variation des paramètres. On peut évoquer bien sûr le rappel du travail fait avec la classe des fonctions du premier degré. Mais, au-delà, il nous a semblé que l'accès à une calculatrice, par la variété *a priori* qu'elle autorise, met d'emblée l'accent sur la variation des paramètres au point d'occulter la variation en jeu dans chacune des fonctions elles-mêmes. Expliquons cela plus avant en distinguant deux types de fonctions en jeu dans l'exploration de la classe des fonctions du second degré :

-- Le premier type est constitué des fonctions du second degré elles-mêmes qui à x font correspondre ax^2+bx+c pour un triplet (a, b, c) donné. Leurs graphiques sont des lieux de points dont les coordonnées (x,y) vérifient précisément l'équation $y = ax^2+bx+c$.

-- La fonction qui, soit à chaque valeur du triplet (a, b, c) , soit aux expressions du type ax^2+bx+c , fait correspondre un graphique tel qu'affiché sur l'écran de la calculatrice.

Le premier type cadre un univers que nous appellerons " expression analytique - lieu " et le second que nous appellerons " triplet de paramètres – courbe ". On retrouve ces deux types mis en correspondance dans certaines approches des élèves.

Nous avons tout lieu de penser que la première tâche proposée (l'exploration de l'identité graphique par le biais de la calculatrice de la classe des fonctions du second degré) a tendance à cantonner les élèves au deuxième univers, bien que certains d'entre eux s'en dégagent par des propos concernant le premier univers. Et c'est d'autant plus manifeste, comme nous l'avons vu, pour ceux qui n'ont pas été plongés au préalable dans l'univers " expression analytique – lieu ", par le biais par exemple d'une étude préalable des paraboles comme lieux de points. Ainsi, nous avons été étonnés de constater que peu d'élèves savaient contrôler que les fonctions passaient par le point $(0, c)$ en remplaçant x par 0 et y par c jusqu'à, pour certains, de rester dans le jeu des paramètres en remplaçant a et b par 0 pour faire afficher par la calculatrice le graphique de la droite $y = c$.

Cette situation engendre de sérieux problèmes dès que le professeur cherche à engager les élèves dans une dialectique de validation. Il lui faut alors imaginer un cours organisé autour de la validation des conjectures, en s'écartant éventuellement du dispositif didactique " canonique ", ainsi que nous l'illustrerons plus loin (section 3.5.), ce qui mobilise une forte mémoire didactique dans la classe. Dans la section 3.4., nous développerons l'idée qu'une entrée en matière par la recherche de fonctions sous contraintes change la donne en matière de validation, pourvu que ces contraintes soient choisies et travaillées en fonction d'une théorie préalable adaptée tant à la classe paramétrée de fonctions étudiée qu'aux connaissances préalables des élèves. Mais auparavant, nous analysons les difficultés éprouvées par les élèves à conceptualiser en termes de transformations géométriques des " mouvements " perçus sur la calculatrice.

3.3. D'une première idée de mouvement à l'étude d'une variabilité conceptualisée

Nous avons distingué plus haut deux types de fonctions en jeu dans les tâches proposées : les fonctions de la classe paramétrée étudiée et celle qui, à des valeurs précises des paramètres en jeu, fait correspondre un graphique particulier affiché sur la calculatrice. Les graphes des premières fonctions sont constitués d'une infinité de couples $(x, f(x))$ dont l'ensemble s'appréhende en une seule image fournie par la calculatrice : c'est précisément le graphique cartésien. Tel n'est plus le cas du graphe de la fonction qui va des paramètres à un graphique particulier. En effet, le graphe de cette fonction est composé de couples dont les premières composantes sont des triplets ou quadruplets de paramètres, suivant les cas, et les secondes composantes, des courbes. L'infinité de ces couples ne peut donc pas être représentée par une seule image. Pensons au cas des fonctions du second degré, a , b et c variant tous les trois : cette image serait composée de toutes les paraboles possibles et imaginables dont l'axe de symétrie est parallèle à l'axe des y . On peut, par contre, réaliser une coupe de ce graphe, c'est-à-dire une image partielle, par une suite temporelle d'images. Ainsi, dans un cas de figure lié au second degré, quand on se cantonne au cas où a seul varie pendant que b et c sont fixes, on peut avoir une idée de ce graphe au moyen d'une image dynamique où l'on verrait la parabole se transformer au fur et à mesure que l'on fait varier a . Certains logiciels suggèrent cette succession temporelle d'images et créent ainsi une impression de mouvement à la manière des dessins animés. C'est le cas de la calculatrice utilisée ici, mais, par choix organisationnel, nous n'avons pas utilisé cette fonctionnalité avec les élèves. Tout d'abord parce que cela introduit une difficulté de gestion et que, de plus, les élèves ne connaissent pas la présence de cette fonctionnalité. Qu'à cela ne tienne, ces derniers peuvent reconstituer cette image dynamique, soit en affichant simultanément plusieurs graphiques sur l'écran, soit, comme

certaines le font, en dessinant plusieurs de ces paraboles dans un même système d'axes sur support "papier-crayon". Même s'il n'est possible de dessiner qu'un nombre fini de paraboles, ils peuvent concevoir l'infinité potentielle, soit parce qu'il y a une idée de mouvement, soit par des propos comme " au plus..., au plus...".

Les conjectures 1, 2, et 3 trouvées dans les feuilles des élèves et citées ci-dessus nous font penser qu'ils ont en tête un vocabulaire dynamique pour parler des transformations. C'est cette disponibilité d'une sorte de mouvement qui fait apparaître certaines régularités, en particulier liées au jeu d'influence de chacun des paramètres. Trouche (1992) l'avait déjà observé dans des circonstances analogues : " Cela traduit l'importance du mouvement pour la perception, puis pour la description des objets apparaissant sur l'écran (ce qui est retenu, c'est d'avantage la déformation des images successives, que les propriétés d'une image donnée. "

Mais d'une description en termes de mouvement à la conceptualisation en termes de transformations du plan, il y a de la marge, comme le montrent les difficultés observées chez les élèves à interpréter le " passage " de la fonction $y = x^2$ à la fonction $y = 3x^2$. C'est d'ailleurs ce que laissait penser l'analyse de ces questions conduite par Chevallard, Jullien (1990), qui montraient que l'épistémologie des transformations ponctuelles ne comprenait pas le monde du mouvement mais appartenait à celui des relations fonctionnelles entre points de l'espace. A ce propos, il nous semble devoir faire une grande différence entre, d'une part, la translation et, d'autre part, des affinités d'axe orthogonal à l'un des axes du repère. Nous le développons ci-dessous.

Dans le cas d'une translation, tous les points de la courbe paraissent effectuer un même mouvement (un déplacement). Ce dernier peut donc être précisé par un point de la courbe et son image et il n'y a aucune ambiguïté à déterminer l'image d'un point. En effet, une fois repéré le sommet S de la parabole et son image S' , on a une idée de la variation de position que l'on peut appliquer à n'importe quel autre point A pour déterminer l'image A' (Figure 2). Nous avons relevé plus haut une observation qui va dans le sens de cette interprétation.

Fig. 2

Passons aux affinités, et examinons de ce point de vue $y = x^2$ et $y = 2x^2$. le point de vue le plus naïf consiste à percevoir $y = 2x^2$ comme la déformation de $y = x^2$ un peu comme si l'on resserrait un fil de fer matériel. Dans cette déformation, A devient A' , les deux points étant les extrémités de deux arcs de courbes de même origine, celle du repère, et de même longueur, l'un sur $y = x^2$ et l'autre sur $y = 2x^2$. Ce point de vue fort intuitif ne conduit pas à la conceptualisation du mathématicien. Ce dernier fera correspondre au point A le point A' de même abscisse et d'ordonnée double en passant à l'affinité orthogonale dont l'axe est celui des x et de rapport 2 (Fig. 3).

Dessin erroné :

A' ne doit pas avoir l'abscisse de A Fig. 3 Fig. 4

Un troisième point de vue consiste à associer à A le point A'' de même ordonnée et dont l'abscisse est celle de A divisée par $\sqrt{2}$ (Fig. 4). Ce dernier point de vue peut être aussi celui

du mathématicien qui décide de regarder la fonction $y = 2x^2$ sous la forme $y = (\sqrt{2x})^2$, c'est-à-dire comme l'image de $y = x^2$ par une affinité orthogonale d'axe Oy et de rapport $1/\sqrt{2}$. Notons que la fonctionnalité "trace" de la calculatrice privilégie le deuxième point de vue : le point courant peut se déplacer verticalement d'une courbe à l'autre. Peu d'élèves la connaissent.

Tout donne lieu à penser que le point de vue naïf est celui des élèves qui parlent de mouvement comme si la parabole était un objet matériel : "la parabole se resserre" ou qui dessinent une flèche exprimant ce mouvement sans que la flèche puisse clairement symboliser le mouvement horizontal ou vertical. Notons toutefois que la variation des courbes ne s'exprime pas toujours chez les élèves en termes de mouvement. Certains disent "la parabole est plus pointue ou moins pointue".

Des deux autres interprétations, nous ne pensons pas, *a priori*, que le mouvement horizontal soit plus ou moins naturel que vertical. Mais nous avons pu observer que les élèves privilégient les liens horizontaux sans parvenir à interpréter quoi que ce soit, vraisemblablement parce qu'ils ne pensent pas à l'écriture $y = (\sqrt{2x})^2$.

Ajoutons à cela que l'ambivalence d'interprétation de la "variation" des courbes en termes d'affinités est propre à certaines fonctions. En effet, comme on l'a vu plus haut, la formule $y = 2x^2$ peut s'écrire sous la forme $(\sqrt{2x})^2$ et cette double écriture est porteuse d'une double interprétation. De même pour la fonction $y = 1/3x$ dont la représentation graphique est soit l'image de $y = 1/x$ par une affinité d'axe Ox , de rapport $1/3$ lorsqu'on écrit son équation sous la forme $y = (1/3)(1/x)$, soit l'image de $y = 1/x$ par une affinité d'axe Oy , de rapport $1/3$ lorsqu'on écrit son équation sous la forme $y = 1/(3x)$. Cette ambivalence disparaît par exemple avec la fonction sinus : la périodicité des racines est inchangée dans un type d'affinité et modifiée dans l'autre. Et ce seul fait permet de différencier clairement ces deux types d'affinités au moyen de dessins parlants.

Nous compléterons cette analyse de deux autres éléments :

- La difficulté des élèves à percevoir une courbe, non pas comme un "bloc", mais comme un lieu de points (cf. l'analyse faite à la section 3.2) : dans ce cas, il leur est forcément difficile d'associer des points de la parabole initiale et de sa transformée et donc d'interpréter le mouvement en termes de transformations.). En effet, pour comprendre l'enjeu de la transformation algébrique de l'équation, les élèves devraient bien maîtriser les équations comme contraintes.
- La difficulté (déjà évoquée plus haut) à percevoir l'ordonnée (positive) d'un point d'une courbe comme la longueur du segment qui joint ce point à sa projection orthogonale sur l'axe des abscisses. En d'autres circonstances liées à la modélisation de grandeurs géométriques au moyen d'intégrales définies, Schneider (1988) a mis en évidence des difficultés comparables qu'elle interprète en termes d'obstacle didactique. Or, les affinités et leurs effets ont été étudiées préalablement par les élèves dans l'univers des grandeurs géométriques. On peut donc bien imaginer les difficultés de transfert qu'ils rencontrent ici.

Après coup, nous pensons judicieux de proposer la question suivante, en lieu et place de celle reprise à la section 2.1 : « Imaginez une transformation du plan qui transforme un carré en un rectangle de même base et de hauteur 3 fois plus grande (Fig. 5). Que devient la parabole $y = x^2$ après une telle transformation et quelle est son équation ? » Cette

nouvelle formulation permettrait peut-être aux élèves de mettre en place les techniques instrumentées par leurs fonctions pragmatiques (de vérification) et épistémiques (par la traduction de la transformation sur des formules) analogues à celles qu'ils exploitent dans la recherche d'une fonction du second degré sous contraintes que nous analysons dans la section qui suit.

Fig. 5

3.4. Un schème d'instrumentation didactique qui augmente la valence épistémique des calculatrices graphiques : la recherche d'une fonction " sous contraintes "

Analysons à présent la tâche qui consiste à associer une expression analytique à l'image de la parabole par une translation de 3 unités, parallèle à l'axe des abscisses. Voici quelques éléments d'une analyse *a priori ante* (au sens de Mercier, Salin, 1988 ; Mercier, 2001) susceptibles de justifier le choix des variables didactiques et d'éclairer les stratégies utilisées par les élèves.

Tout d'abord, il s'agit de déterminer l'équation d'une parabole ayant un seul point d'intersection avec l'axe Ox. Lors d'une exploration de la classe paramétrée des fonctions du second degré, de telles paraboles ont moins de chances d'apparaître que les autres, hormis la parabole d'équation $y = x^2$. En effet, ces courbes correspondent au cas des fonctions $y = \alpha(x - \beta)^2$, c'est-à-dire à celui de fonctions du type $y = ax^2 + bx + c$ dont les coefficients sont liés par deux conditions : $-2\beta = b$ et $\beta^2 = c$

Elles correspondent donc au cas de fonctions du deuxième degré dans l'expression desquelles deux paramètres, soit α et β , peuvent être choisis, ce qui donne deux degrés de liberté. Alors que dans le cas des fonctions dont l'écriture $y = ax^2 + bx + c$ peut s'écrire sous la forme $\alpha(x - \beta)^2 + \gamma$, il y a trois paramètres à choisir et par conséquent trois degrés de liberté. On peut expliquer autrement cela, en évoquant le fait que la condition $b^2 - 4ac = 0$ qui correspond aux graphiques des fonctions ayant une seule racine est une condition plus forte que celles exigées pour les autres cas : $b^2 - 4ac > 0$ ou $b^2 - 4ac < 0$. La première définit une surface de l'espace (a, b, c) et les deux autres déterminent les deux parties en lesquelles cet espace est divisé par la surface en question.

Ensuite, la translation impliquée est parallèle à l'axe Ox et donc plus difficile à traiter qu'une translation parallèle à l'axe Oy. En effet, lors des premières réactions, nous nous attendons aux réponses suivantes : $y = x^2 + 3$, $y = x^2 - 3$. Si l'écriture $x^2 + \beta$ nous paraît plus disponible que l'écriture $(x \pm \beta)^2$, c'est parce que les élèves peuvent avoir le sentiment qu'étant donné le fait que la parabole translatée est une sorte de transformation de la parabole initiale, l'expression correspondante à la première doit être une sorte de correction de l'expression correspondante à la seconde. D'où l'idée de prendre comme point de départ la formule $y = x^2$ et de la modifier en y ajoutant un terme (ou éventuellement en la multipliant par un facteur), tout en gardant la présence de l'ostensif x^2 . Alors que pour arriver à l'expression $y = (x - 3)^2$, il faut penser d'abord à la translation et partir de $x - 3$ et puis seulement récupérer l'idée du carré. De plus, le fait que l'expression $y = (x - 3)^2$ contient

l'ostensif x^2 n'apparaît qu'au prix d'une transformation algébrique. La multiplication de x^2 par le facteur 3 n'est pas une idée à exclure, mais nous pensons qu'elle ne sera pas proposée par les élèves ayant préalablement perçu le rôle du coefficient a. Cette proposition peut être aisément réfutée par un test graphique sur la calculatrice.

Enfin, une translation parallèle à l'axe Ox induit généralement une erreur de signe. Pour une translation de 3 unités vers la droite, les élèves sont enclins à proposer la fonction $y = (x + 3)^2$. Cette réponse est crédible dans la mesure où la translation induit le parcours du graphique initial au graphique translaté et l'idée selon laquelle on doit transformer en $x + 3$. Le cas échéant, les élèves pourraient alors tester cette hypothèse et s'apercevoir que le graphique est translaté vers la gauche. De manière primaire, ils pourraient songer que, puisqu'en ajoutant 3 à x , on translate le graphique 3 unités vers la gauche, il faut soustraire 3 pour le translater de 3 unités vers la droite. Ainsi la fonction serait donnée par $y = (x - 3)^2$. Hypothèse qu'un test pourrait valider de manière pragmatique mais, selon toute vraisemblance, suffisamment probante pour les élèves.

A priori, plusieurs stratégies de résolution du problème peuvent être envisagées dont certaines peuvent être induites par la formulation de la question. La toute première stratégie qui peut apparaître consiste à constituer le tableau des valeurs de la fonction représentée par le graphique translaté pourvu que les élèves soient habitués à traiter les fonctions à partir des tableaux numériques associés. Cette stratégie a été effectivement observée. Elle semble efficace dans la mesure où les élèves font le lien entre ce tableau numérique et celui associé à la parabole initiale, par le biais des points ayant même ordonnée sur les deux paraboles. Ce rapprochement induit une forme de validation qui s'appuie conjointement sur les deux données initiales : l'équation de la première parabole et l'information relative à la translation.

La deuxième stratégie consiste à exploiter des résultats antérieurs établis à propos de la classe des fonctions données par $y = ax^2 + bx + c$. On sait que la valeur de a pour effet de translater le graphique vers le haut ou vers le bas ce qui conduit à tenter une valeur nulle pour a . On sait aussi que le changement de la valeur de b modifie l'ouverture de la parabole ou la renverse, ce qui conduit à conclure que, ici, $a = 1$. Dans ces circonstances, les élèves chercheraient la solution dans la classe des fonctions $y = x^2 + bx$, en essayant de trouver une valeur adéquate de b . Mais quel est l'effet de b , s'il n'est pas nul ? Le graphique a deux points d'intersection avec l'axe des abscisses : $(0, 0)$ et $(-b, 0)$, ce que fait apparaître la mise en évidence de x dans l'expression de la fonction, soit $y = x^2 + bx = x(x + b)$. Des essais graphiques peuvent alors faire apparaître que la parabole se translate bien vers la droite pour $b < 0$, mais aussi vers le bas. Le dessin suggère que $b = 6$ et que l'abscisse du sommet est $x = 3$. Comme on sait qu'on peut remonter la parabole en agissant sur c , il suffit de déterminer c pour que le sommet de la parabole $y = x(x - 6)$ soit translaté verticalement sur le sommet de la parabole donnée. La valeur de $x(x - 6)$ en $x = 3$ étant égale à -9 , la translation vers le haut correspond à $c = 9$. Cela donne la formule de la parabole translatée :

$$y = x(x - 6) + 9 = x^2 - 6x + 9$$

Une partie de cette stratégie a pu être observée (technique par ajustement). Elle n'a pas forcément conduit les élèves à une validation autre que pragmatique, mais nous pensons qu'ils auraient pu y être conduits si on leur avait demandé de travailler avec des valeurs non entières (par exemple, une translation de 3,15 unités), ou mieux si on leur avait demandé de

généraliser leur procédure à une translation de m unités.

Une troisième stratégie possible est la technique graphique décrite à la section 2.1 qui contient en elle-même une validation sémantique : on envisage la manière de trouver l'ordonnée d'un point d'une abscisse donnée du graphique translaté, en se servant des valeurs lues sur le graphique initial. Par exemple, pour trouver l'ordonnée du point B du graphique translaté dont l'abscisse est 5, il est logique de se référer au point A du graphique initial dont l'abscisse est $5 - 3 = 2$: A est effectivement envoyé sur B par la translation considérée. Les deux points ont même ordonnée. Or, l'ordonnée du point A est égale à ; donc l'ordonnée du point B est égale et s'écrit $(5 - 3)^2 = 4$ si l'on veut faire apparaître l'abscisse 3. De manière générale, pour calculer l'ordonnée d'un point d'abscisse du graphique translaté, on doit retrancher 3 à x et ensuite calculer le carré du résultat.

Enfin, la technique du changement de variable n'a pas été envisagée lors de l'analyse a priori, et pour cause. Une fois induite par l'idée de "primer" les coordonnées des points de la parabole translatée, elle a cependant donné lieu à une manipulation efficace d'ostensifs s'inspirant d'un traitement algébrique "habituel", que les ostensifs traditionnellement réservés au cadre fonctionnel (utilisant les coordonnées génériques x et y sans les "primes") ne pouvaient permettre.

4. Valence pragmatique versus valence épistémique

Nous pouvons commenter l'analyse *a priori* ci-dessus, ainsi que le déroulement observé à partir des concepts de valence pragmatique versus épistémique, liées aux trois fonctions des techniques instrumentées : pragmatique, épistémique et heuristique. A l'instar de Lagrange (2002), nous reconnaissons la *fonction pragmatique* dans une technique lorsque cette technique permet d'agir, de transformer et de résoudre une tâche, la *fonction épistémique* lorsque la technique permet de comprendre, et la *fonction heuristique* lorsque cette technique permet d'organiser et de contrôler l'action. Comparons les différentes techniques décrites plus haut du point de vue de leur fonctionnement par rapport à la calculatrice. La première technique, par ajustement, fort instrumentée, s'appuie sur l'anticipation, l'inférence et la vérification. Les deux autres techniques, numérique et graphique, sont moins instrumentées ; l'environnement "papier-crayon" porte ici l'instrument principal, l'instrumentation par la calculatrice se limite à la vérification. Cependant, contrairement à la première technique, les deux dernières contiennent des composantes technologiques dans la mesure où le résultat découle des deux données de départ, l'équation de la première parabole et le fait que la deuxième parabole est la translatée de la première. Cela est évident pour la technique graphique. Ce l'est moins pour la technique numérique, mais pensons que cette technique porte sa propre technologie lorsque les élèves mettent en correspondance appropriée les deux tableaux numériques de la première parabole et de la deuxième parabole, en faisant correspondre les points respectifs de deux paraboles ayant la même ordonnée. La dernière technique, par changement de variable, est en fait, déjà, une technologie pour les autres techniques mentionnées ci-dessus. Mais vues les difficultés de certains élèves à la comprendre, on peut penser que les deux techniques précédentes, numérique et graphique, peuvent, dans beaucoup de cas, jouer le rôle des technologies.

Comparons les quatre techniques au moyen du schéma suivant :

Cette analyse et celles qui ont précédé montrent que la problématique : « proposer aux élèves de trouver l'expression analytique d'une parabole donnée » est un geste d'instrumentation didactique prometteur. Il conduit les élèves à valider leurs résultats et non plus à se borner de constater ce que la calculatrice affiche et, par le fait même, il les pousse à manipuler et à relier de manière raisonnée plusieurs types d'ostensifs emblématiques du concept de fonction : les tableaux numériques, les graphiques et les expressions analytiques.

3.5. Un ajustement de la praxéologie mathématique à partir de contraintes propres à chaque classe de fonctions

Comme l'ont montré les travaux de Brousseau (1998), il importe que toute situation à prétention didactique débouche sur une phase d'institutionnalisation au cours de laquelle le professeur, seul garant dans la classe des savoirs standardisés dans la société, pointe et identifie dans les connaissances engagées par les élèves « celles qui ont un intérêt, un statut culturel ». Seule une praxéologie mathématique en phase avec les tâches proposées aux élèves et les techniques qu'ils auront mobilisées peut assumer cette fonction. Ci-dessous, nous illustrons par la classe des fonctions du second degré et celle des fonctions du troisième degré le travail de transposition à réaliser pour sédimenter dans un ensemble structuré les productions des élèves.

Le cas des fonctions du deuxième degré

La praxéologie « classique » en Belgique relative aux fonctions du second degré, comprend une théorie qui prend appui, d'entrée de jeu, sur les transformations algébriques du trinôme du deuxième degré. Sur cette base, les équations du second degré sont souvent traitées avant les fonctions et les interprétations géométriques des transformations algébriques. Pour les besoins de l'instrumentation didactique étudiée ci-dessus, nous avons ajusté cette praxéologie en nous appuyant d'abord sur les transformations géométriques de la parabole $y = x^2$ pour en déduire les effets sur l'expression analytique et revenir *in fine* à leurs interprétations géométriques. La première étape de cette praxéologie est d'explorer les courbes d'équation $y = ax^2 + bx + c$. Cette tâche permet de conjecturer que toutes les courbes se ressemblent, et qu'il s'agit de paraboles. Les tâches proposées ensuite ont pour objectif d'organiser les arguments pour prouver cette conjecture. Elles sont formulées en termes de transformations géométriques de la courbe de référence $y = x^2$. À ce stade, on interprète géométriquement le rôle du coefficient c . À l'étape suivante, on met en place une technique pour associer à deux affinités du plan (translation horizontale et dilatation verticale d'axe ox) des transformations algébriques, respectivement :

À ce stade, on clarifie le rôle du coefficient a . La preuve que toute courbe d'équation $y = ax^2 + bx + c$ est une parabole s'appuie sur le fait que toute formule du type $ax^2 + bx + c$ est équivalente à une formule du type $a(x - \beta)^2 + \gamma$. **On termine en établissant le rôle du coefficient b .**

4. Conclusion : quelques gestes de l'instrumentation didactique

La calculatrice graphique présente *a priori*, dans l'étude des classes paramétrées de

fonctions, une valence pragmatique élevée. Nous en prenons pour illustration le nombre et la diversité des conjectures faites par les élèves à propos des graphiques des fonctions du second degré. C'est effectivement un outil qui donne "à voir" de nombreux phénomènes graphiques. Mais de les observer à les conceptualiser, il y a loin, comme le montrent les difficultés des élèves à interpréter la "transformation" subie par une parabole lorsqu'on multiplie les images de la fonction associée par un même facteur.

En outre, les élèves pouvant procéder par accumulation d'indices concordants, la valence pragmatique de la calculatrice fait écran en quelque sorte à sa valence épistémique, sans laquelle nous postulons qu'il ne peut y avoir d'apprentissage par adaptation. Une manière de sauvegarder une part de celle-ci consiste à formuler les questions de telle manière que les élèves aient à associer des écritures algébriques à des phénomènes graphiques. C'est tout l'intérêt de les engager à la recherche de fonction "sous contraintes" dont Rogalski (1990) et Bloch (2000) ont déjà souligné l'importance. Nous montrons ici la portée effective de l'instrumentation didactique de la calculatrice graphique dans le contexte précis d'une étude des classes paramétrées de fonctions, en ce sens qu'elle favorise chez les élèves

- la mobilisation de techniques à forte composante épistémique, du moment que le professeur exige cette composante (par exemple, les techniques graphique, numérique pour déterminer l'équation de la parabole-image d'une autre par une translation),
- ou encore, une dimension technologique de leur discours (par exemple, un débat - observé dans une autre réalisation de cette expérimentation - à propos de la négligence de termes en x^2 et en x^3 dans l'étude des fonctions du troisième degré par le biais de la fonction "zoom in" en θ).

Mais quelles contraintes imposer aux fonctions à déterminer? Notre analyse laisse entrevoir l'intérêt de les choisir de manière à faire apparaître les "outils" d'investigation les plus pertinents pour chaque classe de fonctions, c'est-à-dire les outils qui permettent d'obtenir d'emblée les éléments les plus saillants caractérisant son identité graphique. (translations et affinités orthogonales pour les fonctions du second degré, approximation affine ou dérivée pour les fonctions du troisième degré, asymptotes pour les fonctions homographiques, etc.) Mais ce choix doit être apprécié par son coût didactique dans l'organisation globale du cours.

Nous avons vu, par exemple, qu'on ne peut étudier les fonctions du 3^{ème} degré au moyen des transformations géométriques sans étudier les affinités non orthogonales. Mais ces dernières supposent un apprentissage dont le coût est élevé eu égard à l'usage qui en est fait ici, d'autant qu'elles ne sont pas exploitées, en Belgique, en un autre lieu "proche" du même programme scolaire. D'où l'idée d'une autre instrumentation didactique organisée autour des approximations affines ou des dérivées qui sont largement exploitées dans d'autres problèmes d'analyse.

Par ailleurs, l'organisation globale du cours peut favoriser ou non un travail réfléchi avec la calculatrice: ainsi, le fait d'étudier préalablement les paraboles comme lieux de points favorise, comme on l'a vu, une plus grande maîtrise du lien entre les expressions analytiques et les graphiques affichés par la calculatrice.

Au total, le travail fait ici illustre que l'instrumentation didactique des calculatrices graphiques dans l'étude des classes paramétrées de fonctions suppose, non seulement une modification des praxéologies habituelles en Belgique, mais aussi un important travail mathématique et didactique que les professeurs ne pourront mener à bien sans être davantage

outillés, conceptuellement parlant, à l'occasion de leur formation. Mais ce travail n'est-il pas, en fin de compte, le principal et incontournable geste d'instrumentation didactique ?

Nous remercions vivement Hilda Rosseel, professeur au Collège Saint-Paul de Godinne, pour son accueil dans ses classes, sa souplesse pour accueillir nos propositions et ses remarques pertinentes. Nous remercions également Aurélie Noël pour ses observations fines des procédures d'élèves et le travail rigoureux accompli dans le cadre de son mémoire de licence aux Facultés universitaires de Namur.

Bibliographie

AHA, (1999), *Vers l'infini pas à pas*, Manuel pour l'élève. Bruxelles : De Boeck Wesmael.

AHA, (1999), *Vers l'infini pas à pas*, Guide méthodologique. Bruxelles : De Boeck Wesmael.

Bloch, I., (2000), *L'enseignement de l'analyse à la charnière lycée/université. Savoir, connaissances et conditions relatives à la validation*. Thèse de l'Université de Bordeaux I. Bordeaux : Université de Bordeaux II.

Brousseau, G., (1998), *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Chauvat, I., (1997), *Etude didactique pour la réalisation et l'utilisation d'un logiciel de représentations graphiques cartésiennes des relations binaires entre réels dans l'enseignement des mathématiques des DUT industriels*, Thèse de l'Université d'Orléans-Tours. Orléans : Université d'Orléans.

Chevallard, Y., Jullien, M., (1990), Sur l'enseignement de la Géométrie au Collège. Première partie. *Petit x*,

Chevallard, Y., (1992), Intégration et viabilité des objets informatiques, in B. Cornu, (Ed), *L'ordinateur pour enseigner les mathématiques*. Paris : PUF.

DQQ (1996 et 1997) *De question En Question*, 3 et 4. Bruxelles : Didier Hatier.

Elbaz-Vincent, Ph., (2002), Un système de calcul formel comme assistant de "l'instrumentation raisonnée", in D. Guin, L. Trouche, (Eds), *Calculatrices Symboliques ; Transformer un outil en un instrument de travail mathématique : un problème didactique*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Kendal, M., Kaye, S., Pierce, R., (2002), L'influence des environnements de calcul formel sur les modes de travail des enseignants, in D. Guin, L. Trouche, (Eds), *Calculatrices Symboliques ; Transformer un outil en un instrument de travail mathématique : un problème didactique*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Krysinska, M., (à paraître), *Activités de modélisation mathématique*. Namur : FUNDP – Ladimath.

Lacasta, E., (1995), *Les graphiques cartésiens de fonctions dans l'enseignement des mathématiques*, Thèse de l'Université de Bordeaux I. Bordeaux : Université Bordeaux II.

Lagrange, J-B., (2002), Etudier les mathématiques avec les calculatrices symboliques : quelle place pour les techniques ?, in D. Guin, L. Trouche, (Eds.), *Calculatrices Symboliques ; Transformer un outil en un instrument de travail mathématique : un problème didactique*. Grenoble : La Pensée Sauvage Edition.

Leplat, J., (1985), Les représentations fonctionnelles dans le travail, in J. Leplat, (Dir.), (2001, 2^e Ed.), *L'analyse du travail en psychologie ergonomique ; deuxième partie : théorie*

et méthodologie. Toulouse : Octarès.

Mercier, A., (1994), Des études didactiques pourraient-elles aider l'enseignement des savoirs professionnels ? Le cas des mathématiques dans les pratiques professionnelles *Didaskalia*, 4. pp. 7-22.

Mercier, A., (1995), L'algébrique, une dimension fondatrice des pratiques mathématiques scolaires, in M.J. Perrin & alii, *Actes de la VIIIe Ecole d'Eté de didactique des mathématiques*. Paris : IREM, 345-361.

Mercier, A., (2001), L'observation du travail des élèves, in P. Venturini, A. Terrisse, C. Amade-Escot, (Eds.), *Etude des pratiques effectives : l'approche des didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Mercier, A., Salin, M.H., (1998), L'analyse a priori, outil pour l'observation, in Collectif, *Actes de l'Université d'été "Didactique et formation des maîtres à l'Ecole Elémentaire"*. Bordeaux : IREM de Bordeaux, pp. 141-163.

Rabardel, P., (1995), *Les hommes et les technologies, approche cognitive des instruments contemporains*. Paris : Armand Colin.

Rogalski, J., Samurçay, R., (1990), Acquisition of Programming Knowledge and Skills. in Hoc J.M., Green T.R.G., Samurçay R., Gilmore D.J., (Eds.), *Psychology of Programming*, Academic Press.

Schneider, M., (1988), *Des objets mentaux aires et volumes au calcul des primitives*, Thèse de l'UCL, Louvain-la-Neuve.

Trouche, L., (2002), Les calculatrices dans l'enseignement des mathématiques : une évolution rapide des matériels, des effets différenciés, in D. Guin, L. Trouche, (Eds.), *Calculatrices Symboliques ; Transformer un outil en un instrument de travail mathématique : un problème didactique*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Trouche, L., (2002), Genèses instrumentales, aspects individuels et collectifs, in D. Guin, L. Trouche, (Eds.), *Calculatrices Symboliques ; Transformer un outil en un instrument de travail mathématique : un problème didactique*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Trouche, L. (2002), Une approche instrumentale de l'apprentissage des mathématiques dans l'environnement de calculatrices, in D. Guin, L. Trouche, (Eds.), *Calculatrices Symboliques ; Transformer un outil en un instrument de travail mathématique : un problème didactique*. Grenoble : La Pensée Sauvage Edition.

Vigotski, L., (1985), Psychologie de l'instrument, in B. Schneuwly, J. Bronckart, *Vygotski aujourd'hui*. Neuchâtel : Delachaux et Niestlé.