



HAL
open science

Estimation H1 pour la solution de l'équation de Lamé avec conditions au bord mixte

Djamel Ait-Akli, Abdelkader Merakeb

► **To cite this version:**

Djamel Ait-Akli, Abdelkader Merakeb. Estimation H1 pour la solution de l'équation de Lamé avec conditions au bord mixte. 2019. hal-01992510v2

HAL Id: hal-01992510

<https://hal.science/hal-01992510v2>

Preprint submitted on 7 Apr 2019 (v2), last revised 14 Feb 2020 (v13)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Estimation H^1 pour la solution du système de Lamé avec condition au bord mixte

Djamel AIT AKLI^a, Abdelkader Merakeb^b

^a*L2CSP, UMMTO Tizi Ouzou, Algérie*

^b*L2CSP, UMMTO Tizi Ouzou, Algérie*

Reçu le *****, accepté après révision le +++++

Présenté par

Résumé

On considère dans cet article le système d'équations de Lamé posé sur un domaine polygonal avec conditions au bord mixtes de type Dirichlet-Neumann. On établit une estimation en norme L^2 explicite pour le gradient de la solution de ce problème. Ce qui permet de majorer explicitement la norme H^1 de cette solution. Noter que les majorations obtenues ne sont pas optimales.

Abstract

In this paper we consider Lamé's system of equations on a polygonal domain with mixed boundary conditions of Dirichlet-Neumann type. An explicit L^2 norm estimate for the gradient of the solution of this problem is established. This leads to an explicit bound of the H^1 norm of this solution. Note that the obtained bounds are not optimal.

1. Introduction

L'équilibre statique d'une structure déformable occupant un domaine Ω du plan \mathbb{R}^2 est régi par les équations de l'élasto-statique linéaire de Lamé, voir ([7], [9]). Dans cette étude, on se restreint à un domaine Ω ayant une forme polygonale et possédant $m + 1$ arêtes avec $m \geq 2$. On désigne par $\Gamma = \cup \Gamma_i := \partial\Omega$ son bord et par $d(\Omega)$ son diamètre. On considère sur Ω le problème de Lamé gouverné par le système d'équations suivant :

Email addresses: d.aitakli@yahoo.com (Djamel AIT AKLI), merakeb_kader@yahoo.fr (Abdelkader Merakeb).

$$\begin{cases} Lu = f & \text{p.p dans } \Omega, \\ \sigma \cdot \vec{n}_i = g_i & \text{sur } (\Gamma - \Gamma_0) \cap \Gamma_i, \quad 1 \leq i \leq m \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_0. \end{cases} \quad (1)$$

Une fonction vectorielle $u = (u^1, u^2)$ vérifiant ce système d'équations modélise un déplacement dans le plan. Dans ce modèle, on impose un déplacement nul sur la partie Γ_0 du bord, ce qui se traduit par une condition de Dirichlet homogène. La composante normale du tenseur des contraintes sur le reste du bord est en chaque point égale à la force extérieure appliquée en ce point, ce qui traduit l'équilibre sur cette partie du bord de la structure. L'égalité sur le bord est comprise au sens de la trace. L désigne l'opérateur de Lamé défini par :

$$Lu := -\operatorname{div} \sigma(u) = -\operatorname{div}[2\mu\varepsilon(u) + \lambda \operatorname{Tr} \varepsilon(u) Id] \quad (2)$$

Les seconds membres f et g vérifient $f \in [L^2(\Omega)]^2$ et $g \in [H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)]^2$. Le vecteur \vec{n}_i représente la normale extérieure à l'arête Γ_i . On désigne par μ et λ les coefficients de Lamé. En se plaçant dans le cadre isotropique, la loi de Hook :

$$\sigma(u) = C_{ijkl}\varepsilon(u)$$

reliant le tenseur d'ordre deux des contraintes σ et le tenseur des déformations ε définie par :

$$\varepsilon(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla^t u), \quad (3)$$

décrit le comportement élastique de la structure où le tenseur d'ordre deux C_{ijkl} est propre à la nature élastique du matériau. Le cadre isotropique permet également d'exprimer l'opérateur de Lamé sous la forme (??). Le problème faible équivalent au problème (1) s'écrit (voir [2], [7]) :

trouver $u \in V; \quad \forall v \in V$

$$a(u, v) := \int_{\Omega} 2\mu\varepsilon(u)\varepsilon(v) + \lambda \operatorname{div} u \operatorname{div} v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx + \int_{\Gamma - \Gamma_0} g v \, d\sigma(x) =: l(v) \quad (4)$$

avec

$$V = \{v \in [H^1(\Omega)]^2 : v = 0 \text{ sur } \Gamma_0\}$$

et

$$\varepsilon(u)\varepsilon(v) := \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^2 \left(\frac{\partial u^i}{\partial x_j} + \frac{\partial u^j}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial v^i}{\partial x_j} + \frac{\partial v^j}{\partial x_i} \right).$$

Le problème d'existence et d'unicité dans V de la solution de (4) est classique, (voir [2]). En effet, on utilise l'inégalité de Korn pour établir la coercitivité de la forme bilinéaire a , ensuite on invoque le lemme de Lax-Milgram.

On pourrait obtenir une meilleure régularité de la solution du problème faible (4) si le polygone Ω satisfait aux conditions (H_2) du *Théorème 2.3* énoncé dans l'article de S. Nicaise [16]. Dans ce cas, $u \in [H^{\frac{3}{2}+\epsilon}(\Omega)]^2$, ce qui implique en particulier, en utilisant les injections de Sobolev, que $u \in [C^{0,\frac{1}{2}+\epsilon}(\bar{\Omega})]^2$. Le domaine polygonal Ω satisfait bien ces conditions.

On note dans ce qui suit :

$$\begin{aligned}\|\varepsilon(u)\|_{0,\Omega} &:= \|\varepsilon(u)\|_{L^2(\Omega)^2} = \left(\int_{\Omega} |\varepsilon(u)|_2^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{\Omega} \varepsilon(u)\varepsilon(u) dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ \|\nabla u\|_{0,\Omega} &:= \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^2} = \left(\int_{\Omega} |\nabla u|_2^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{\Omega} |\nabla u^1|^2 + |\nabla u^2|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

En utilisant la seconde inégalité de Korn, l'inégalité de trace et celle de Poincaré, on obtient aisément à partir de (4) l'estimation suivante :

$$\|\nabla u\|_{0,\Omega} \leq \frac{1}{c_k} \frac{1}{2\mu} (c_p \|f\|_{0,\Omega} + c_{p,t} \|g\|_{0,\Gamma}) \quad (5)$$

où $c_{p,t}$ est une constante qui dépend de la constante de Poincaré et de la constante de l'inégalité de trace. c_k est la constante de l'inégalité de Korn, cette inégalité s'énonce de manière générale pour une fonction $u \in [H^1(\Omega)]^2$ et s'annulant sur une partie de mesure non nulle du bord (voir [10], lemme 1.2.7) :

$$c_k \|\nabla u\|_{0,\Omega} \leq \|\varepsilon(u)\|_{0,\Omega}. \quad (6)$$

Notons que pour un domaine Ω quelconque (et polygonal en particulier), la valeur de la constante c_k apparaissant dans la seconde inégalité de Korn est inconnue et ne peut être explicitement minorée dans le cas général. Par conséquent, il est impossible d'obtenir directement des estimations explicites pour $\|\nabla u\|_{0,\Omega}$. Par contre, la constante c_k vaut $\frac{1}{2}$ lorsque la condition au bord est de type Dirichlet homogène ou bien lorsque Ω est par exemple le demi espace. Si on note par \mathbb{R}^{2+} le demi plan ouvert défini par :

$$\mathbb{R}^{2+} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 > 0\},$$

alors la seconde inégalité de Korn (6) s'écrit (voir [10], Corollaire 1.2.2) :

$$\frac{1}{2} \|\nabla u\|_{0,\mathbb{R}^{2+}} \leq \|\varepsilon(u)\|_{0,\mathbb{R}^{2+}}. \quad (7)$$

Pour plus de détails sur les cas particuliers de domaines pour lesquels la constante de l'inégalité de Korn est déterminée de manière explicite, voir l'article de C. O. Horgan [13]. Il en est de même pour la constante de l'inégalité de trace, qui n'est explicitement connue ou majorée que dans des cas particuliers. On utilisera dans cet article l'inégalité de trace d'une fonction $u \in H^1(\omega)$ dans le cas où ω est un parallélogramme pour lequel on note Γ_i ses arêtes respectives. Alors l'inégalité de trace s'écrit (voir [6]) : pour tout i tel que Γ_i est une arête,

$$\|u\|_{0,\Gamma_i}^2 \leq 2 \left[\frac{|\Gamma_i|}{|\omega|} \|u\|_{0,\omega}^2 + \frac{|\omega|}{|\Gamma_i|} \|\nabla u\|_{0,\omega}^2 \right]. \quad (8)$$

Déterminer explicitement ces constantes est intéressant d'un point de vue numérique. En effet, les estimations d'erreurs d'approximation par éléments finis du type

$$\|u - u_h\|_{0,\Omega} \leq Ch \|\nabla u\|_{0,\Omega} \quad (9)$$

font intervenir la quantité $\|\nabla u\|_{0,\Omega}$. En supposant que C puisse être connue, alors majorer explicitement $\|\nabla u\|_{0,\Omega}$ revient à mieux encadrer $\|u\|_{0,\Omega}$.

Le résultat principal de ce travail réside dans le théorème suivant

Théorème 1.1 *La solution u de (4) vérifie :*

$$\|\nabla u\|_{0,\Omega} \leq \frac{1}{\mu}(1 + c_p\|f\| + c_{tr}\|g\|_{\Gamma}) + 1 \quad (10)$$

et $d(\Omega)$ désigne le diamètre de Ω , $c_p := d(\Omega)$, $c_{tr} := 2\sqrt{d(\Omega)}$.

L'estimation (10) de ce théorème est différente de (5), néanmoins les constantes qui y sont présentes sont les mêmes. Pour aboutir à l'estimation (10), on décompose la solution du problème (1) en des fonctions à support dans des domaines particuliers. Ainsi, on démontre des estimations explicites pour les solutions de ces problèmes partiels, c'est à dire que toutes les constantes apparaissant dans (5) sont déterminées et ce, moyennant des résultats disponibles pour ce type de domaines. Avant de démontrer ce théorème, il est utile de passer par des remarques et des résultats intermédiaires.

Remark 1 *Si on note :*

$$V_i = \{v \in V : v = 0 \text{ sur } \Gamma - \Gamma_i\}, \quad 1 \leq i \leq m \quad (11)$$

On note u_d la trace de la solution u de (4) sur le bord $\partial\Omega$. Pour réaliser la décomposition à laquelle on faisait allusion ci-dessus, on est tenté d'écrire $u = \sum_i u_i$ dans $D'(\Omega)$, où les distributions u_i sont les solutions des problèmes suivants

$$(P_1) \begin{cases} Lu_1 = f & \text{dans } \Omega \\ u_1 = u^d & \text{sur } \Gamma_1 \\ u_1 = 0 & \text{sur } \Gamma - \Gamma_1 \end{cases} \quad (P_i) \begin{cases} Lu_i = 0 & \text{dans } \Omega \\ u_i = u^d & \text{sur } \Gamma_i \quad 2 \leq i \leq m \\ u_i = 0 & \text{sur } \Gamma - \Gamma_i \end{cases}$$

et d'appliquer (2.6) et (2.7) aux fonctions u_i puis de dégager les estimations recherchées. Mais le problème est que les fonctions solutions u_i ne peuvent appartenir à V_i . En effet, dans le cas contraire l'image des solutions u_i par l'opérateur de trace sur le bord $\partial\Omega$ serait une fonction de $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \subset C^0(\partial\Omega)$, ce qui n'est pas le cas ici (les u_i ne sont pas continues au sommet $x_{i-1,i} = (x_{i-1,i}^1, x_{i-1,i}^2)$ reliant Γ_{i-1} à Γ_i et au sommet $x_{i,i+1} = (x_{i,i+1}^1, x_{i,i+1}^2)$ reliant Γ_i à Γ_{i+1}). En effet :

Les éléments de l'espace de Sobolev fractionnaire $H^s(\Omega)$ se caractérisent par, (voir [17]) :

$$W^{s,2}(\Omega) := \left\{ u \in L^2(\Omega); \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^{\frac{n}{2} + s}} \in L^2(\Omega \times \Omega) \right\}.$$

Cet espace est muni de la norme

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} := \left(\int_{\Omega} |u|^p dx + \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} dx dy \right)^{\frac{1}{p}}$$

D'après le théorème (Th. 8.2, page 55, [17]) : il existe une constante $C > 0$ ne dépendant pas de u telle que :

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}} \leq \|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} \quad (12)$$

C'est à dire que, pour $sp > n$, l'injection

$$W^{s,p}(\Omega) \rightarrow C^{s - \frac{n}{p}}(\Omega)$$

est continue.

On montre que les fonctions de l'espace $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ sont aussi continues. La preuve de cette assertion fera l'objet du lemme suivant :

Lemme 1.2 *L'injection*

$$W^{\frac{1}{2},2}(\Omega) \rightarrow C^0(\partial\Omega)$$

est continue.

Comme conséquence de la remarque (1), on ne peut appliquer l'inégalité de Poincaré ou celle de la trace qui sont indispensables pour la suite ; ceci car les distributions en question doivent jouir de la régularité H^1 . Pour remédier à ce problème, on considère une fonction auxiliaire $u_\epsilon \in V$ de u au voisinage des sommets $x_{i-1,i}$ et $x_{i,i+1}$. Pour ce faire, quitte à considérer l'image de u par un opérateur de prolongement à $H^1(\mathbb{R}^2)$, ce qui est toujours possible pour notre domaine lipschitzien Ω . On définit :

$$u_\epsilon(x) = \phi_\epsilon(x)u(x)$$

avec :

$$\begin{cases} \phi_\epsilon(x) & = 0, & \|x - x_i\| \leq \frac{\sqrt{\epsilon}}{2} \\ \phi_\epsilon(x) & = 1 - \exp\left[\frac{(\|x - x_i\|^2 - \frac{\epsilon}{2^2})^2}{\|x - x_i\|^2 - \epsilon}\right], & \frac{\sqrt{\epsilon}}{2} < \|x - x_i\| < \sqrt{\epsilon} \\ \phi_\epsilon(x) & = 1, & \sqrt{\epsilon} \leq \|x - x_i\| \end{cases}$$

La fonction ϕ_ϵ est identiquement nulle sur un voisinage des sommets. La fonction $u_\epsilon \in V$ est l'unique solution du problème suivant

$$\begin{cases} Lu_\epsilon = f_\epsilon & \text{dans } \Omega \\ u_\epsilon = u_\epsilon^d & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

On notera par la suite u_ϵ pour désigner la fonction vectorielle $u_\epsilon = (u_\epsilon^1, u_\epsilon^2)$.

Formulation faible vérifiée par u_ϵ et un lemme d'approximation

Dans cette section, on écrit le problème faible vérifié par u_ϵ . Si on note pour $u_\epsilon \in V$

$$\sigma_\epsilon := 2\mu\varepsilon(u_\epsilon) + \lambda \text{Tr} \varepsilon(u_\epsilon)I,$$

clairement, $Lu_\epsilon = \text{div} \sigma_\epsilon = f_\epsilon$, donc $\sigma_\epsilon \in [H(\text{div})(\Omega)]^2$. Par densité, il existe $\sigma_\epsilon^n \in [C^\infty(\bar{\Omega})]^{2 \times 2}$ tel que : $\sigma_\epsilon^n \rightarrow \sigma_\epsilon$ dans $H(\text{div})(\Omega)$, c'est à dire

$$\|\sigma_\epsilon^n - \sigma_\epsilon\|_{\text{div},\Omega} := \|\text{div} \sigma_\epsilon^n - \text{div} \sigma_\epsilon\|_{0,\Omega} + \|\sigma_\epsilon^n - \sigma_\epsilon\|_{0,\Omega} \rightarrow 0$$

quand $n \rightarrow \infty$. En posant $\text{div} \sigma_\epsilon^n = f_\epsilon^n$ on obtient en utilisant l'intégration par partie contre une fonction test $v \in C^\infty(\bar{\Omega})$ l'expression :

$$\int_{\Omega} \sigma_\epsilon^n \nabla v = \int_{\Omega} f_\epsilon^n v + \int_{\Gamma} \sigma_\epsilon^n \cdot \vec{n} v d\Gamma.$$

En passant à la limite en n , on trouve $\forall v \in C^\infty(\bar{\Omega})$

$$\int_{\Omega} \sigma_\epsilon \nabla v = \int_{\Omega} f_\epsilon v + \langle \sigma_\epsilon \cdot \vec{n}, v \rangle_{[H^{\frac{1}{2}}]'\!(\Gamma) \times [H^{\frac{1}{2}}](\Gamma)}$$

où $\sigma_\epsilon \cdot \vec{n} =: g_\epsilon \in [H^{\frac{1}{2}}(\Omega)]'$ est l'image de σ_ϵ par l'application trace sur le bord. Comme $C^\infty(\bar{\Omega})$ est dense dans $V \subset H^1(\Omega)$ alors en utilisant les définitions (3) pour v et l'expression de σ_ϵ , u_ϵ vérifie : $\forall v \in V$

$$\int_{\Omega} 2\mu\varepsilon(u_{\epsilon})\varepsilon(v) + \int_{\Omega} \lambda \operatorname{div} u_{\epsilon} \operatorname{div} v = \int_{\Omega} f_{\epsilon} v + \langle g_{\epsilon}, v \rangle_{[H^{\frac{1}{2}}]'\!(\Gamma) \times [H^{\frac{1}{2}}](\Gamma)}. \quad (13)$$

En utilisant la définition de ϕ_{ϵ} , on a le lemme d'approximation suivant

Lemme 1.3

$$\begin{aligned} & \bullet \|\nabla u_{\epsilon} - \nabla u\|_{0,\Omega} \rightarrow 0 \quad \bullet \|f_{\epsilon} - f\|_{0,\Omega} \rightarrow 0 \\ & \forall v \in V \quad \bullet \left| \langle g_{\epsilon}, v \rangle - \int_{\Gamma} g v d\sigma \right| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Preuve du lemme On établit sans problème que $\phi_{\epsilon} \in C^1(\overline{B(x_i, \mathbb{R}^2)})$. On montre en utilisant le théorème de convergence dominée de Lebesgue que : $\|\phi_{\epsilon} - 1\|_{p,\Omega} \rightarrow 0$ pour tout $p > 1$, ce qui implique que $\|\phi_{\epsilon} - 1\|_{\infty,\Omega} \rightarrow 0$. D'autre part on a

$$\begin{aligned} \|\nabla u_{\epsilon} - \nabla u\|_{0,\Omega} &= \|\nabla \phi_{\epsilon} u + \phi_{\epsilon} \nabla u - \nabla u\|_{0,\Omega} \\ &\leq \|\nabla \phi_{\epsilon}\|_{0,\Omega} + \|(\phi_{\epsilon} - 1)\nabla u\|_{0,\Omega} \\ &\leq \|\nabla \phi_{\epsilon}\|_{0,\Omega} + \|(\phi_{\epsilon} - 1)\|_{\infty,\Omega} \|\nabla u\|_{0,\Omega}, \end{aligned}$$

on vérifie facilement grâce au théorème de convergence dominée que $\|\nabla \phi_{\epsilon}\|_{0,\Omega} \rightarrow 0$. Ce qui implique :

$$\|\nabla u_{\epsilon} - \nabla u\|_{0,\Omega} \rightarrow 0. \quad (14)$$

• On démontre les deux points restant du lemme simultanément. En choisissant $v = u$ comme fonction test dans (4) et en utilisant le théorème de trace on a :

$$c(\|\nabla u\|_{0,\Omega} + \|u\|_{\frac{1}{2},\Gamma}) \leq c_2(\|f\|_{0,\Omega} + \|g\|_{[H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)]'}) \quad (15)$$

Soit K l'opérateur qui associe à chaque couple de données $(f, g) \in L^2(\Omega) \times [H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)]'$ la solution u du problème (4) correspondant.

$$\begin{aligned} K : L^2(\Omega) \times [H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)]' &\rightarrow H^1(\Omega) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \\ (f, g) &\rightarrow K(f, g) = (u, u^d) \end{aligned}$$

D'après l'existence et l'unicité de la solution de (13), K est bien défini. L'inégalité (15) s'écrit : $\forall (f, g) \in H^1 \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ il existe une unique $u \in V$ telle que :

$$\|K(f, g)\|_{H^1 \times H^{\frac{1}{2}}} \leq c\|(f, g)\|_{L^2 \times H^{\frac{1}{2}}} = c(\|f\|_{0,\Omega} + \|g\|_{\Gamma})$$

C'est à dire K est continu, en plus, il est linéaire et bijectif. Donc toujours d'après le théorème d'isomorphisme de Banach, on déduit que $\exists cst > 0$ tel que :

$$\|f\|_{0,\Omega} + \|g\|_{[H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)]'} \leq cst(\|u^d\|_{\frac{1}{2},\Gamma} + \|\nabla u\|_{0,\Omega}) \quad (16)$$

en réécrivant (4) avec $g \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \equiv D \subset [H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)]'$ et en soustrayant membre à membre (4) et (13), on trouve que la fonction $u - u_{\epsilon}$ vérifie : $\forall v \in V$

$$\int_{\Omega} 2\mu(\varepsilon(u_{\epsilon}) - \varepsilon(u))\varepsilon(v) + \lambda \operatorname{div}(u_{\epsilon} - u) \operatorname{div} v dx = \langle g_{\epsilon} - g, v \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \quad (17)$$

En utilisant (17) avec $u_{\epsilon} - u$, on a :

$$\|f_{\epsilon} - f\|_{0,\Omega} + \|g_{\epsilon} - g\|_{[H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)]'} \leq cst\|\nabla u_{\epsilon} - \nabla u\|_{0,\Omega}$$

en utilisant (14), il découle que $g_\epsilon - g \rightarrow 0$ faiblement dans $[H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)]'$ et comme $g \in L^2(\Gamma)$, ceci implique que

$$\langle g_\epsilon, v \rangle \rightarrow \langle g, v \rangle = \int_{\Gamma} g v d\sigma$$

pour tout $v \in V$. Et

$$\|f_\epsilon - f\|_{0,\Omega} \rightarrow 0.$$

□

On reprend maintenant l'idée de décomposition de la manière qui suit : Pour ϵ fixé on construit $(\Omega_i^\epsilon)_{i=1,m}$ un recouvrement de Ω tel qu'il existe $(\varphi^\epsilon)_i$ une partition C^1 de l'unité subordonnée à ce recouvrement vérifiant les conditions :

$$c1 : \quad \forall i = \overline{1,m}, \quad \Gamma \cap \partial\Omega_i \in D_\epsilon \quad \text{de telle sorte que : } \text{supp } u_{\epsilon,i} \cap \Gamma \subset \Gamma_i$$

$$c2 : \quad i \neq j \quad (2\mu + \lambda) \max_{k=i,j} \|\nabla(\varphi_k^\epsilon u_\epsilon)\|_{\Omega_i \cap \Omega_j} \leq \frac{1}{m}$$

On pose

$$u_{\epsilon,i} := u_\epsilon \varphi_i^\epsilon.$$

Pour démontrer les estimations du théorème (1.1), il suffit de choisir comme fonction test dans (13) la fonction $u_{\epsilon,i}$ à estimer et d'utiliser l'inégalité de Korn ainsi que les inégalités de trace et de Poincaré pour majorer explicitement $\|\nabla u_{\epsilon,i}\|_{0,\Omega}$. Ce qui revient, en utilisant l'inégalité triangulaire et le lemme (1.3), à majorer explicitement $\|\nabla u\|_{0,\Omega}$.

Mais comme nous recherchons des estimations explicites, nous devons utiliser ces inégalités relativement à une configuration géométrique sur laquelle elles sont explicitement énoncées. La configuration qui correspond le mieux à notre domaine Ω polygonal est le demi-plan \mathbb{R}^{2+} contenant Ω pour l'inégalité de Korn, le carré de coté $d(\Omega)$ pour les deux autres inégalités.

Tout ceci suggère de prolonger par zéro la fonction $u_{\epsilon,i}$ en dehors de Ω . La définition des fonctions $u_{\epsilon,i}$ est adaptée pour faire un tel prolongement.

Prolongement des fonctions $u_{\epsilon,i}$

On considère pour chaque i , $1 \leq i \leq m$, le prolongement par zéro $\tilde{u}_{\epsilon,i}$ de $u_{\epsilon,i}$ du domaine Ω au demi-plan \mathbb{R}^{2+} le contenant tel que $\Gamma_i \subset \partial\mathbb{R}^{2+}$. Ce prolongement est défini par :

$$\begin{cases} \tilde{u}_{\epsilon,i} = u_{\epsilon,i}, & p.p. \text{ dans } \overline{\Omega_i \cap \Omega}, \\ \tilde{u}_{\epsilon,i} = 0, & \text{dans } \mathbb{R}^{2+} / \overline{\Omega_i \cap \Omega}. \end{cases} \quad (18)$$

Remark 2 Il est aisé de voir que la fonction $\tilde{u}_{\epsilon,i}$ définie dans (18) vérifie :

$$1) \quad \tilde{u}_{\epsilon,i} \in [H^1(\mathbb{R}^{2+})]^2.$$

$$2) \quad \partial_{x_i} \tilde{u}_{\epsilon,i} = \partial_{x_i} u_{\epsilon,i} \quad p.p. \text{ dans } \Omega, \text{ donc :}$$

$$\|\partial_{x_i} \tilde{u}_{\epsilon,i}\|_{0,\mathbb{R}^{2+}} = \|\partial_{x_i} \tilde{u}_{\epsilon,i}\|_{0,\Omega_i \cap \Omega} = \|\partial_{x_i} u_{\epsilon,i}\|_{0,\Omega_i \cap \Omega}. \quad (19)$$

Il suffit de remarquer que $\text{supp } u_{\epsilon,i} \subset \Omega_i$ et que $u_{\epsilon,i}$ est nulle dans un voisinage des sommets x_i du domaine polygonal Ω .

2. Détermination explicite des constantes des inégalités de Poincaré et de trace

Dans cette section on note S_R l'intérieur du carré d'arêtes de longueur R contenant Ω et on note $\partial S_R := \cup_j S_j$, $1 \leq j \leq 4$ tel que $\Gamma_i \subset S_i$. Les inégalités seront établies pour la prolongée $\tilde{u}_{\epsilon,i}$ de $u_{\epsilon,i}$ définie sur le carré S_R qui est, d'après la remarque précédente, une fonction dans $H^1(S_R)$; on se ramène à la fonction initiale en utilisant (19).

On montre dans le lemme suivant que la fonction $u_{\epsilon,i} \in V_i$ vérifie l'inégalité de Poincaré avec une constante qu'on déterminera de manière explicite. Il est bien connu que pour énoncer l'inégalité de Poincaré, la fonction à estimer doit, entre autres, s'annuler sur une partie de mesure non nulle du bord, les fonctions u_i vérifient bien cette condition.

Lemme 2.1 *La fonction $u_{\epsilon,i}$ satisfait :*

$$\|u_{i,\epsilon}\|_{0,\Omega} \leq d(\Omega) \|\nabla u_{i,\epsilon}\|_{0,\Omega}, \quad (20)$$

la constante $d(\Omega)$ désigne le diamètre de Ω

Il est classique d'utiliser le théorème fondamental de l'analyse pour la preuve de l'inégalité de Poincaré.

Preuve du lemme On établit l'inégalité de Poincaré pour une des deux composantes $\tilde{u}_{\epsilon,i}^l$, $l = 1, 2$ de la fonction $\tilde{u}_{\epsilon,i}$, la même inégalité est vraie pour l'autre.

Soit S_d l'intérieur du carré S_R avec $R = d(\Omega)$. On note $abcd$ ce carré tel que : $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$, $c = (c_1, c_2)$ et $d = (d_1, d_2)$ et tel que $\Gamma_i \subset S_i := [c, d]$. Donc $\tilde{u}_{\epsilon,i} = 0$ sur $\partial S_d - \Gamma_i$.

Comme $\tilde{u}_{\epsilon,i}^l$ est absolument continue sur les lignes parallèles aux axes de coordonnées alors, d'après le théorème fondamental de l'analyse appliqué à $\tilde{u}_{\epsilon,i}^l$ dans S_d pour $l = 1, 2$, on a pour tout $(x_1, x_2) \in [a_1, d_1] \times [a_2, b_2]$

$$\tilde{u}_{\epsilon,i}^l(x_1, x_2) = \int_{a_1}^{x_1} \partial_{x_1} \tilde{u}_{\epsilon,i}^l(s, x_2) ds + \tilde{u}_{\epsilon,i}^l(a_1, x_2).$$

Comme $(a_1, x_2) \in S - \Gamma_i$, alors $\forall (x_1, x_2) \in [a_1, d_1] \times [a_2, b_2]$

$$\tilde{u}_{\epsilon,i}^l(x_1, x_2) = \int_{a_1}^{x_1} \partial_{x_1} \tilde{u}_{\epsilon,i}^l(s, x_2) ds.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy Schwartz on a : $\forall (x_1, x_2) \in [a_1, d_1] \times [a_2, b_2]$

$$|\tilde{u}_{\epsilon,i}^l(x_1, x_2)| \leq |x_1 - a|^{1/2} \left(\int_{a_1}^{x_1} |\partial_{x_1} \tilde{u}_{\epsilon,i}^l(s, x_2)|^2 ds \right)^{1/2}.$$

En élevant au carré et en utilisant la majoration $|x_1 - a| \leq d(\Omega)$: $\forall (x_1, x_2) \in [a_1, d_1] \times [a_2, b_2]$

$$|\tilde{u}_{\epsilon,i}^l(x_1, x_2)|^2 \leq |x_1 - a| \int_{a_1}^{x_1} |\partial_{x_1} \tilde{u}_{\epsilon,i}^l(s, x_2)|^2 ds \leq d(\Omega) \int_{a_1}^{d_1} |\partial_{x_1} \tilde{u}_{\epsilon,i}^l(s, x_2)|^2 ds.$$

On intègre sur S_d par rapport aux variables x_1 et x_2 :

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}_{\epsilon,i}^l\|_{0,S_d}^2 &= \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{d_1} |\tilde{u}_{\epsilon,i}^l(x_1, x_2)|^2 dx_1 dx_2 \leq d(\Omega) \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{d_1} \int_{a_1}^{d_1} |\partial_{x_1} \tilde{u}_{\epsilon,i}^l(s, x_2)|^2 ds dx_2 dx_1 \\ &\leq d^2(\Omega) \int \int_{S_d} |\partial_x \tilde{u}_{\epsilon,i}^l(s, x_2)|^2 ds dx_2 \\ &= d^2(\Omega) \|\nabla \tilde{u}_{\epsilon,i}^l\|_{0,S_d}^2. \end{aligned}$$

Donc par définition de $\tilde{u}_{\epsilon,i}$ et (19) on a :

$$\|u_{\epsilon,i}^l\|_{0,\Omega}^2 \leq d^2(\Omega) \|\nabla u_{\epsilon,i}^l\|_{0,\Omega}^2.$$

On déduit que :

$$\|u_{\epsilon,i}\|_{0,\Omega}^2 = \|u_{\epsilon,i}^1\|_{0,\Omega}^2 + \|u_{\epsilon,i}^2\|_{0,\Omega}^2 \leq d^2(\Omega) (\|\nabla u_{\epsilon,i}^1\|_{0,\Omega}^2 + \|\nabla u_{\epsilon,i}^2\|_{0,\Omega}^2) = d^2(\Omega) \|\nabla u_{\epsilon,i}\|_{0,\Omega}^2.$$

□

En utilisant principalement l'inégalité de Poincaré énoncée dans le lemme (2.1), on établit dans le lemme suivant une inégalité de trace sur le bord Γ pour la fonction $u_{\epsilon,i}$ avec une constante explicite. La démonstration qui sera donnée utilise l'inégalité de trace (8) et donc n'est valable de manière générale que dans le cas polygonal.

Lemme 2.2 *La fonction $u_{\epsilon,i}$ vérifie pour tout i :*

$$\|u_{\epsilon,i}\|_{0,\Gamma_i} \leq c_{tr} \|\nabla u_{\epsilon,i}\|_{0,\Omega} \quad (21)$$

avec $c_{tr} := 2\sqrt{d(\Omega)}$.

Preuve du lemme 2.2 Soit $\tilde{u}_{\epsilon,i}$ définies sur S_d . On établit l'inégalité de trace pour une des deux composantes $u_{\epsilon,i}^l, l = 1, 2$, la même estimation est vraie pour l'autre. L'inégalité (8) appliquée à $\tilde{u}_{\epsilon,i}^l$ sur S_i , donne :

$$\|\tilde{u}_{\epsilon,i}^l\|_{0,\Gamma_i}^2 \leq \|\tilde{u}_{\epsilon,i}^l\|_{0,S_i}^2 \leq 2 \frac{|S|}{|S_d|} \|\tilde{u}_{\epsilon,i}^l\|_{0,S_d}^2 + 2 \frac{|S_d|}{|S|} \|\nabla \tilde{u}_{\epsilon,i}^l\|_{0,S_d}^2.$$

En utilisant le lemme (2.1) on trouve

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}_{\epsilon,i}^l\|_{0,\Gamma_i}^2 &\leq 2 \frac{|S|}{|S_d|} d^2(\Omega) \|\nabla \tilde{u}_{\epsilon,i}^l\|_{0,S_d}^2 + 2 \frac{|S_d|}{|S|} \|\nabla \tilde{u}_{\epsilon,i}^l\|_{0,S_d}^2 \\ &\leq 4d(\Omega) \|\nabla \tilde{u}_{\epsilon,i}^l\|_{0,S_d}^2. \end{aligned}$$

en utilisant la définition de $\tilde{u}_{\epsilon,i}^l$ et (19), on a :

$$\|u_{\epsilon,i}^l\|_{0,\Gamma_i}^2 \leq 4d(\Omega) \|\nabla u_{\epsilon,i}^l\|_{0,S_d}^2$$

En sommant sur $l = 1, 2$ on a :

$$\|u_{\epsilon,i}\|_{0,\Gamma_i}^2 \leq 4d(\Omega) \|\nabla u_{\epsilon,i}\|_{0,\Omega}^2.$$

d'où le lemme. □

Comme nous recherchons des estimations faisant intervenir le gradient de $u_{\epsilon,i}$, il sera utile pour la suite de majorer $\|\varepsilon(u_{\epsilon,i})\|_{0,\Omega}$ et $\|\operatorname{div} u_{\epsilon,i}\|_{0,\Omega}$ par $\|\nabla u_{\epsilon,i}\|_{0,\Omega}$. Ces majorations font l'objet du lemme suivant

Lemme 2.3 *Toute fonction $u \in [H^1(\Omega)]^2$ vérifie :*

$$\|\varepsilon(u)\|_{0,\Omega} \leq \|\nabla u\|_{0,\Omega} \quad , \quad \|\operatorname{div} u\|_{0,\Omega} \leq \sqrt{2} \|\nabla u\|_{0,\Omega} \quad (22)$$

Preuve du lemme D'une part :

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} |\varepsilon(u)|_2^2 dx &= \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u^i}{\partial x_j} + \frac{\partial u^j}{\partial x_i} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u^i}{\partial x_j} \right|^2 + \left(\frac{\partial u^i}{\partial x_j} \frac{\partial u^j}{\partial x_i} \right) dx \\
&\leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\nabla u|_2^2 + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 (|\frac{\partial u^i}{\partial x_j}|^2 + |\frac{\partial u^j}{\partial x_i}|^2)) dx \\
&\leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\nabla u|_2^2 + \frac{1}{2} (|\nabla u|_2^2 + |\nabla u|_2^2)) dx \\
&\leq \int_{\Omega} |\nabla u|_2^2 dx = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2.
\end{aligned}$$

Donc : $(\int_{\Omega} |\varepsilon(u)|_2^2 dx)^{\frac{1}{2}} \leq \|\nabla u\|_{0,\Omega}$. D'autre part :

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \operatorname{div}^2 u dx &= \int_{\Omega} |\partial_{x_1} u^1 + \partial_{x_2} u^2|^2 dx \leq \int_{\Omega} (|\partial_{x_1} u^1| + |\partial_{x_2} u^2|)^2 dx \\
&\leq 2 \int_{\Omega} |\partial_{x_1} u^1|^2 + |\partial_{x_2} u^2|^2 dx \\
&\leq 2 \int_{\Omega} |\nabla u^1|_2^2 + |\nabla u^2|_2^2 dx = 2\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2.
\end{aligned}$$

Donc : $(\int_{\Omega} \operatorname{div}^2 dx)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{2}\|\nabla u\|_{0,\Omega}$. □

Démonstration du résultat principal

On établit d'abord des estimations pour chacune des fonctions $u_{\epsilon,i}$ en utilisant le problème (13). On prolonge les solutions $u_{\epsilon,i}$ par zéro à des demi-plans en utilisant la définition (18), ce qui permet d'appliquer les lemmes (2.1), (2.2) et l'inégalité (7). Par conséquent toutes les constantes sont explicitement déterminées.

Soit ϵ_0 tel que défini par le lemme (1.3) et fixons $\epsilon < \epsilon_0$.

Preuve du théorème 1.1.

Étape 1 :

Dans un premier temps on majore $\|\varepsilon(u_{\epsilon,i})\|_{0,\Omega}$. La solution u_{ϵ} de u_{ϵ} est solution de : $\forall v \in V$

$$\int_{\Omega} 2\mu\varepsilon(u_{\epsilon})\varepsilon(v) + \lambda \operatorname{div} u_{\epsilon} \operatorname{div} v dx = \int_{\Omega} f_{\epsilon} v dx + \langle g_{\epsilon}, v \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}$$

cette fonction s'exprime $u_{\epsilon} = \sum_i u_{\epsilon,i} = \sum_i u_{\epsilon} \varphi_i$. On choisit $v = u_{\epsilon,i}$ ce qui donne

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_i} 2\mu\varepsilon^2(u_{\epsilon,i}) + \lambda \operatorname{div}^2(u_{\epsilon,i}) dx &= \sum_{j,j \neq i} \int_{\Omega_i \cap \Omega_j} 2\mu\varepsilon(u_{\epsilon,j})\varepsilon(u_{\epsilon,i}) + \lambda \operatorname{div} u_{\epsilon,j} \operatorname{div} u_{\epsilon,i} dx + \int_{\Omega_i} f_{\epsilon} u_{\epsilon,i} dx \\
&\quad + \langle g_{\epsilon}, u_{\epsilon,i} \rangle
\end{aligned}$$

En utilisant la dernière approximation du lemme (1.3) on a : $\exists \epsilon_0 > 0, \forall \epsilon, 0 < \epsilon < \epsilon_0$.

$$|\langle g_{\epsilon}, u_{\epsilon,i} \rangle| \leq \left| \int_{\Gamma_i} g u_{\epsilon,i} \right| + \frac{1}{m}$$

L'inégalité de Cauchy-Schwartz donne

$$\int_{\Omega_i} 2\mu\varepsilon^2(u_{\epsilon,i}) + \lambda \operatorname{div}^2 u_{\epsilon,i} \, dx \leq \sum_{j,j \neq i} [2\mu \|\varepsilon(u_{\epsilon,j})\|_{0,\Omega_i \cap \Omega_j} \|\varepsilon(u_{\epsilon,i})\|_{0,\Omega_i \cap \Omega_j} + \lambda \|\operatorname{div} u_{\epsilon,j}\|_{0,\Omega_i \cap \Omega_j} \|\operatorname{div} u_{\epsilon,i}\|_{0,\Omega_i \cap \Omega_j}] + \left| \int_{\Omega} f_{\epsilon} u_{\epsilon} \right| + \left| \int_{\Gamma_i} g u_{\epsilon,i} \right| + \frac{1}{m^2}$$

le lemme (2.3)) permet d'écrire la majoration suivante

$$\int_{\Omega_i} 2\mu\varepsilon^2(u_{\epsilon,i}) + \lambda \operatorname{div}^2 u_{\epsilon,i} \, dx \leq \sum_{j,j \neq i} [2\mu \|\nabla u_{\epsilon,j}\|_{0,\Omega_i \cap \Omega_j} \|\nabla u_{\epsilon,i}\|_{0,\Omega_i \cap \Omega_j} + \lambda \|\nabla u_{\epsilon,j}\|_{0,\Omega_i \cap \Omega_j} \|\nabla u_{\epsilon,i}\|_{0,\Omega_i \cap \Omega_j}] + \left| \int_{\Omega} f_{\epsilon} u_{\epsilon,i} \right| + \left| \int_{\Gamma_i} g u_{\epsilon,i} \right| + \frac{1}{m}.$$

En utilisant (2.20) et (21) on a

$$\int_{\Omega_i} 2\mu\varepsilon^2(u_{\epsilon,i}) + \lambda \operatorname{div}^2 u_{\epsilon,i} \, dx \leq \sum_{j,j \neq i} [(2\mu + \lambda) \|\nabla u_{\epsilon,j}\|_{0,\Omega_i \cap \Omega_j} \|\nabla u_{\epsilon,i}\|_{0,\Omega_i \cap \Omega_j}] + c_p \|f\|_{0,\Omega_i} \|\nabla u_{\epsilon,i}\|_{0,\Omega_i} + c_{tr} \|g\|_{0,\Gamma_i} \|\nabla u_{\epsilon,i}\|_{0,\Omega_i} + \frac{1}{m}$$

la condition c2 de la définition de la partition d'unité

$$\int_{\Omega_i} 2\mu\varepsilon^2(u_{\epsilon,i}) + \lambda \operatorname{div}^2 u_{\epsilon,i} \, dx \leq \frac{1}{m^2} + \left| \int_{\Omega_i} f u_{\epsilon,i} \right| + \left| \int_{\Gamma_i} g u_{\epsilon,i} \right| + \frac{1}{m}. \quad (23)$$

L'estimation (23) devient :

$$2\mu \|\varepsilon(u_{\epsilon,i})\|_{0,\Omega_i}^2 \leq \|\nabla u_{\epsilon,i}\|_{0,\Omega_i} \left(\frac{1}{m} + d(\Omega) \|f\|_{0,\Omega_i} + c_{tr} \|g\|_{0,\Gamma_i} \right) + \frac{1}{m}. \quad (24)$$

Etape 2 :

Dans un second temps, on minore $\|\varepsilon(u_{\epsilon,i})\|_{0,\Omega_i}$ par une expression en $\|\nabla u_{\epsilon,i}\|_{0,\Omega_i}$ pour tout $i, 1 \leq i \leq m$. Comme la déformation est une application linéaire par rapport aux dérivées premières de $u_{\epsilon,i}$, alors avec les mêmes notations de (18), nous avons en utilisant les points 1) et 2) de la remarque (2) :

$$2\mu \|\varepsilon(\tilde{u}_{\epsilon,i})\|_{0,\mathbb{R}^{2+}}^2 = 2\mu \|\varepsilon(\tilde{u}_{\epsilon,i})\|_{0,\Omega}^2 = 2\mu \|\varepsilon(u_{\epsilon,i})\|_{0,\Omega_i}^2. \quad (25)$$

Par suite en utilisant l'estimation (7) appliquée à $\tilde{u}_{\epsilon,i}$ on a :

$$\frac{1}{2} \times 2\mu \|\nabla \tilde{u}_{\epsilon,i}\|_{0,\mathbb{R}^{2+}}^2 \leq 2\mu \|\varepsilon(\tilde{u}_{\epsilon,i})\|_{0,\mathbb{R}^{2+}}^2.$$

Par conséquent en utilisant (25), $\forall i, 1 \leq i \leq m + 1$, on a :

$$\mu \|\nabla u_{\epsilon,i}\|_{0,\Omega}^2 = \mu \|\nabla \tilde{u}_{\epsilon,i}\|_{0,\mathbb{R}^{2+}}^2 \leq 2\mu \|\varepsilon(\tilde{u}_{\epsilon,i})\|_{0,\mathbb{R}^{2+}}^2 = 2\mu \|\varepsilon(u_{\epsilon,i})\|_{0,\Omega}^2. \quad (26)$$

Pour tout i on a en utilisant (24) et (26)

$$2\mu \|\nabla u_{\epsilon,i}\|_{0,\Omega_i} \leq \int_{\Omega} 2\mu\varepsilon^2(u_{\epsilon,i}) + \lambda \operatorname{div}^2 u_{\epsilon,i} \, dx \leq \frac{1}{m} + \|f\|_{0,\Omega_i} + c_{tr} \|g\|_{0,\Gamma_i}, \quad (27)$$

En élevant au carré et en utilisant l'inégalité de Young on a

$$2\mu^2 \|\nabla u_{\epsilon,i}\|_{0,\Omega_i}^2 \leq 2\left(\frac{1}{m} + \|f\|_{\Omega_i}^2 + c_{tr}\|g\|_{\Gamma_i}^2\right), \quad (28)$$

En sommant sur $i = \overline{1, m}$

$$\mu^2 \sum_{i \in I_+} \|\nabla u_{\epsilon,i}\|_{0,\Omega}^2 \leq \sum \frac{1}{m} + c_p \sum \|f\|_{0,\Omega_i}^2 + c_{tr} \sum_i \|g_i\|_{0,\Gamma_i}^2$$

D'après l'identité remarquable

$$\mu^2 \|\nabla \sum_i u_{\epsilon,i}\|_{0,\Omega}^2 \leq 2\mu^2 \sum_{i \neq j} \int_{\Omega_i \cap \Omega_j} \nabla u_{\epsilon,i} \nabla u_{\epsilon,j} dx + \sum \frac{1}{m} + c_p \sum \|f\|_{0,\Omega_i}^2 + c_{tr} \sum_i \|g_i\|_{0,\Gamma_i}^2 \quad (29)$$

L'inégalité de Cauchy-Schwartz donne en utilisant la condition c_2

$$2\mu^2 \int_{\Omega_i \cap \Omega_j} \nabla u_{\epsilon,i} \nabla u_{\epsilon,j} dx \leq 2\mu^2 \|\nabla u_{\epsilon,i}\|_{\Omega_i \cap \Omega_j} \|\nabla u_{\epsilon,j}\|_{\Omega_i \cap \Omega_j} \leq \frac{1}{m^2}$$

L'inégalité (29) devient

$$\mu^2 \|\nabla \sum_i u_{\epsilon,i}\|_{0,\Omega}^2 \leq \frac{1}{m} + \sum \frac{1}{m} + c_p \sum \|f\|_{0,\Omega_i}^2 + c_{tr} \sum_i \|g_i\|_{0,\Gamma_i}^2$$

donc

$$\|\nabla u_{\epsilon}\|_{0,\Omega} \leq \frac{1}{\mu} (1 + d(\Omega)\|f\|_{0,\Omega} + c_{tr}\|g\|_{0,\Gamma}) \quad (30)$$

Le théorème (1.1) se déduit de la première approximation du lemme (1.3). \square

Remark 3 Le résultat de ce lemme est toujours valable si la structure occupe un domaine non convexe. En effet, le caractère convexe du domaine Ω n'influe pas étant donné l'outil essentiel du raisonnement, à savoir, la partition de l'unité.

Enfin, pour conclure la majoration de la norme H^1 de u_{ϵ} , et donc celle de u , il suffit d'utiliser d'un coté, l'inégalité de Poincaré (20) pour majorer $\|u_{\epsilon}\|_{0,\Omega}$ et d'un autre coté, d'utiliser le résultat du Théorème (1.1).

Conclusion

Un fait intéressant dans l'estimation obtenue et qui la rend efficace est qu'elle ne dépend pas des paramètres caractéristiques du domaine polygonal Ω à savoir, la longueur des arêtes, leurs nombres ainsi que les mesures d'angles qu'elles forment. Par conséquent l'estimation est applicable indifféremment à n'importe quel polygone. Noter également la possibilité de généraliser ce résultat à un domaine de classe C^1 vu cette remarque.

Références

- [1] R. A. Adams. J. J. Fournier. *Sobolev spaces*. 2nd ed., Academic Press, 1975.
- [2] G. Allaire. *Analyse numérique et optimisation. Une introduction à la modélisation et à la simulation numérique*. Editions de l'école polytechnique 2004.

- [3] M. Bebendorf. *A note on the Poincaré inequality for convex domains* Zeitschrift Fur analysis und ihre anwendungen. Volume 22. issue 4, 2003, pp. 751-756.
- [4] J. M. Bony. *Cours d'analyse : théorie des distributions et analyse de Fourier* Les éditions de l'école polytechnique. 1996.
- [5] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle : théorie et application*. Collection Mathématiques appliquées pour la maîtrise. Dunod, 1999.
- [6] C. Carstensen, S.A. Sauter, *A posteriori error analysis for elliptic PDEs on domains with complicated structures*, Numerische Mathematik, vol 96, issue 4, pp.691-721, (February 2004).
- [7] R. Dautray , J. Lions. *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques. Volume 1 : modèles physiques*. Masson, Paris, 1987
- [8] P. Doktor, A. Zenisek. *The density of infinitely differentiable functions in Sobolev spaces with mixed boundary conditions*. Applications of Mathematics. Volume 51, Issue 5, pp. 517-547, October 2006.
- [9] G. Duvaut , J. L. Lions. *Les inéquations en mécanique et en physique*. Dunod, Paris, 1972.
- [10] C. Eck, J. Jarusek, M. Krbec. *Unilateral contact problems : variational methods and existence theorems*. Series : Chapman and Hall/CRC Pure and Applied Mathematics (March 2005).
- [11] D. Gilbarg, N. S. Trudinger. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo, 1983.
- [12] P. Grisvard. *Elliptic problems in nonsmooth domains*. Chapman and Hall /CRC Monographs and surveys in pure and applied mathematics, John Wiley and Sons Australia, 1986.
- [13] C. O. Horgan. *Korn's inequalities and their applications in continuum mechanics*. SIAM Review. Vol. 37, No.4, pp 491-511, December 1995.
- [14] X. Liu, F. Kikuchi. *Analysis and estimation of error constants for P_0 and P_1 interpolations over triangular finite elements*. J. Math. Sci. Univ. Tokyo. Vol. 17, pp. 27-78, (2010).
- [15] J. L. Lions, E. Magenes. *Problèmes aux limites non-homogènes et applications*. Vol. 1, Dunod, Paris, 1968.
- [16] S. Nicaise. *About the Lamé system in a polygonal or polyhedral domain and a coupled problem between the Lamé system and the plate equation. I : regularity of the solutions*. Annali della scuola Normale superiore di Pisa, classe di scienze 4^e série, tome 19, n°3, p.p. 327-361, (1992).
- [17] E.D. Nezzaa, G. Palatucci, E. Valdinoci. *Hitchhiker's guide to the fractional Sobolev spaces*. Bulletin des Sciences Mathématiques, Volume 136, Issue 5, (2012), Pages 521-573.