



HAL
open science

Travail personnel de l'élève, dispositifs d'organisation de l'étude et d'aide à l'étude Ouverture du débat

Alain Jacques Mercier

► To cite this version:

Alain Jacques Mercier. Travail personnel de l'élève, dispositifs d'organisation de l'étude et d'aide à l'étude Ouverture du débat : Notes pour ouvrir un débat au Séminaire National de Didactique des Mathématiques. 2001. hal-01991837

HAL Id: hal-01991837

<https://hal.science/hal-01991837>

Preprint submitted on 24 Jan 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Notes pour une intervention au Séminaire National de Didactique des Mathématiques

Travail personnel de l'élève, dispositifs d'organisation de l'étude et d'aide à l'étude Ouverture du débat

Le problème que nous avons travaillé durant ces deux jours est, je crois, celui **de l'activité didactique des élèves**.

Comment décrire cette activité ? Telle est bien sûr la question première. Mais aussitôt, trois grandes questions pratiques viennent donner les finalités de la description : **De quelles manières l'étude peut-elle être orientée par le professeur ? Dans quelles directions est-il nécessaire de diriger l'étude d'un champ de savoirs ? Quelles sont les relations entre les dispositifs d'organisation de l'étude ou d'aide à l'étude et les directions possibles de l'étude ?**

La notion d'étude est centrale dans les travaux présentés dans ce Séminaire : l'activité didactique des élèves, c'est l'étude. Il semble que l'on pourrait énoncer l'ensemble des questions traitées durant ces deux jours en termes d'étude et plus précisément, pour les interventions de Samuel Johsua et Yves Chevallard, en termes de *dispositif organisateur de l'étude* ou de *dispositif d'aide à l'étude* ; pour Lalina Coulange, en termes de *gestion d'un dispositif pour l'étude* ; tandis que Yves Matheron s'intéresse aux mécanismes qui fondent les *pratiques de direction d'étude* et Corinne Castela, aux *contenus nécessaires à une étude efficace*. Je crois même que c'est le fil rouge qui a guidé les organisateurs du Séminaire dans le choix des intervenants.

Remarques

Je rappellerai d'abord que l'introduction de la notion d'étude dans les discours de la didactique des mathématiques, date aujourd'hui de près de douze ans, puisque dans un colloque aux Pays Bas qui est je crois resté sans suite, Chevallard¹ définissait sous ce nom mais en anglais (dans une intervention titrée **The student-learner gap**) l'impensé institutionnel des travaux de recherche sur le professeur et l'élève, et faisait ainsi le pont entre l'élève, qui est enseigné, et l'apprenant, qui s'approprie des savoirs. C'est en espagnol hélas et la traduction ne semble pas venir rapidement qu'a été publié l'ouvrage *Estudiar matemáticas* qui est sous-titré **El eslabon perdido entre enseñanza y aprendizaje** et qui reprend l'idée première. *L'étude caractérise le didactique*, elle suppose des temps et des lieux propres, elle s'oppose donc à la simple pratique, immédiate.

Je remarquerai ensuite que cette question semble ne pas se poser dans le cadre de la théorie des situations didactiques, parce que tout semble, dans les usages qui en ont été faits, devoir se dérouler en classe. Je montrerai cependant qu'il n'en va pas nécessairement ainsi et que l'on se situe trop souvent dans une interprétation indûment restrictive de la théorie des situations. Certains usages de la recherche la réduisent à l'intervention de situations adidactiques isolées fonctionnant comme les expériences d'un laboratoire de psychologie scolaire expérimentale, alors qu'elle décrit bien au contraire des processus de très longue durée. Trop peu de travaux ont tenté de décrire le long développement de la suite des 15 modules de Rationnels et décimaux, correspondant chacun à **une situation fondamentale pour l'étude de ces systèmes de nombres**. Nous nous étions engagés, avec Claire Margolinas, dans une collaboration en ce sens : peut être la mènerons nous à son terme, un de ces jours. Mais ce n'est pas l'enjeu déclaré de notre travail d'aujourd'hui. Je pourrais monter, je crois, comment le questionnement que nous avons conduit ici peut être pensé dans le cadre de la théorie des situations ; Yves Chevallard et Marianna Bosch ont œuvré dans ce sens, comme l'attestent leurs dernières publications : le problème est plutôt que ce sont les questions que nous avons travaillées qui sont délicates à produire, dans ce cadre théorique.

¹ The student-learner gap.

Je ferai encore une mise en garde, contre la tentation de voir dans le concept d'étude la clé naturellement efficace d'un mouvement vers une meilleure solution à la question de l'enseignement des problèmes (ceux qui fondent les savoirs enseignés ou mieux, ceux qui peuvent être une cause des savoirs appris.) La notion d'étude n'est pas la clé d'une détransposition systématique et réussie : elle nomme aussi bien l'activité des élèves qu'organise l'enseignement le plus traditionnel. Les notions solidaires *d'étude* et de *direction d'étude* forment un embryon de théorie, un outil de description qui a, comme toute théorie en ses commencements, les propriétés d'une métaphore : il est nécessaire de garder les métaphores sous contrôle pour ne pas les laisser filer au delà de leur domaine de plus grande pertinence. Car (c'est un des points que le travail d'Yves Matheron a éclairés) les métaphores introduisent dans la pensée, avec un système d'outils de pensée pour l'attaque d'un problème, l'ensemble des pratiques associées à ces outils ; et parmi les pratiques routinières, (nous devons cette redécouverte au travail de Nanine Charbonnel) les métaphores introduisent les jugements de valeur préconstruits qui sont attachés au monde du modèle métaphorique. Le contrôle sur les métaphores vient alors du fait que l'on ne perd pas de vue le problème que l'on travaille avec leur aide : c'est ce que nous allons tenter de faire.

OUVERTURE

En nommant “ **étude** ” l'activité didactique, qui consiste à *suspendre l'action pour porter attention au rapport aux objets* qu'elle suppose, nous en faisons la caractéristique du didactique. Lorsque nous parlons d'étude pour les activités scolaires, nous centrons notre attention sur le fait que l'étude est toujours *l'activité collective des élèves* et qu'elle est l'enjeu de l'enseignement. *En dernier ressort, l'action didactique appartient à l'élève* parce que c'est l'étude qui est déterminante et non la direction d'étude. Sans doute, l'action didactique personnelle de chaque élève est-elle fortement déterminée par son insertion dans un dispositif régulateur de l'activité collective, un dispositif organisateur de l'étude ; mais une part de la responsabilité finale de l'apprentissage est dans les mains de l'instance “ élève ” du système didactique.

Le professeur peut, au mieux, diriger l'activité didactique des élèves... c'est-à-dire, l'orienter dans une direction donnée. Il faut alors interpréter les actions didactiques de l'enseignant comme **régulation des activités didactiques des élèves**. Ou encore, si on interprète de manière interventionniste, il faut **que l'enseignant organise les conditions de réussite de l'étude, pour en orienter le cours**. Mais pour ne pas retomber dans l'un des avatars de la métaphore du jardinier (qui ne peut qu'accompagner le développement naturel, pas le produire), il nous faut entrer plus avant dans la théorisation et dire que dans un système d'enseignement, le temps de l'étude est un temps long, qui se développe sur plusieurs semaines, plusieurs mois, et le plus souvent plusieurs années. C'est qu'on n'y étudie pas des questions isolées, **on y étudie des œuvres** c'est-à-dire, pas seulement des techniques localement pertinentes mais **des organisations sociales et techniques pour la pensée et l'action ; l'étude devient alors le moyen d'entrer en rapport à des œuvres**. Les œuvres peuvent être présentées, plus mortes que vives, dans les musées ; mais les œuvres vivent dans des institutions humaines où elles peuvent être **produites, utilisées, transposées, étudiées** parce que les sujets de ces institutions les produisent, utilisent, etc. et ce sont les institutions dans lesquelles nous menons nos activités qui nous attribuent une évaluation de (bonne ou mauvaise) connaissance de ces œuvres, telles qu'elles sont pratiquées dans ces institutions. Ainsi, vous additionnez 3.6 et 4.2 pour trouver 7.8 et l'on vous attribue une connaissance certaine de l'addition des décimaux. Mais voilà que vous répondez 5,114 à une question concernant la somme de 3.51 et 2.63 et que votre connaissance des décimaux est déclarée insuffisante. Ou encore, vous affirmez savoir faire un pot au feu, parce que vous l'avez fait en famille, et vous devez acheter les quantités nécessaires pour soixante personnes, ce qui montre vos insuffisances en cette matière. Pour surmonter ces ignorances, il faut entrer dans un processus qui peut être complexe, l'étude.

Par exemple, on peut, sur internet, trouver en quatre minutes la recette d'un “ pot au feu breton ” pour 10 personnes (site cuisineAZ classé numéro 1 par Copernic), mais ce pot là est centré sur un boudin roulé dans une pâte... assez peu orthodoxe ! En deuxième rang, sur le site servicevie.com, tenu par une revue Québécoise sur la santé, on trouve en 20 minutes une recette... pour quatre personnes. Mais cela ne dit pas encore quelle est la taille d'un récipient pour dix ou vingt et plus, ni la quantité d'eau, de sel, de poivre, et il semble que 0.9 kg d'os et 1.4 kg de rôti de ronde dans 3 litres d'eau pour quatre, cela fasse un beau bouillon, mais pour 60, faut-il vraiment 13 kilos d'os et 22 kilos de rôti

de ronde dans 45 litres d'eau ? Copernic m'apprend en troisième rang que " le pot au feu de l'école Jeanne d'Arc fait recette " puisque 350 personnes ont participé... mais je ne suis pas autorisé à afficher l'article du Télégramme de Brest qui a été publié le 2 novembre 1997... la recette y était-elle donnée ? Une demi heure plus tard, je dispose d'une recette de "beef broth" datant de 1896. Rédigée en anglais, elle ne contient aucune donnée sur les quantités respectives des ingrédients nécessaires. Sur www.qualiteduboucher.ch/pages/francais/rind/r015.htm, on propose un pot au feu pour quatre à six où l'on met 1.5 litres d'eau et où l'on plonge la viande dans l'eau bouillante ! Je me fais l'effet de Pécuchet racontant ses trouvailles à Bouvard : étudier, sans directeur d'étude semble impossible ou presque, même s'il ne s'agit que de la recette du pot au feu.

Changeons de stratégie, vivent les valeurs sûres. *L'Art Culinaire Français*, ouvrage de mille pages publié en 1950 par Flammarion, donne quatre recettes dont un " pot au feu familial ", recette de Pellaprat. C'est un ouvrage de grande vulgarisation : les articles y sont signés, le lexique technique y est présenté, un index alphabétique des recettes permet de s'y retrouver rapidement, une bibliographie des ouvrages de référence le termine. Le chapitre des soupes à la viande ou bouillons s'ouvre par la recette précise de la Petite Marmite Parisienne, qui est un potage de grand restaurant. La recette en est donnée avec toutes les proportions nécessaires, et la recette du pot au feu familial apparaît comme une transposition ménagère (c'est-à-dire, économique) de celle là : on sert alors légumes et bouilli. Pellaprat affirme que les quantités données pour un litre d'eau froide permettent de nourrir quatre personnes, et l'on réalise une préparation sur la base de 5 litres d'eau froide (qui réduit à quatre en cinq heures de cuisson), 1 kilogramme de gîte ou de paleron, 35 grammes de sel gris, etc.

Le *Larousse Ménager* de 1926 pour sa part, donne une définition du pot au feu : " plat de viande bouillie dans de l'eau et accompagnée de légumes " et renvoie à bouillon. Le pot au feu réduit à son bouillon se retrouve alors nommé très techniquement " bouillon gras de bœuf ", et la recette est donnée sur la base de 4 litres d'eau froide, mais on ne dit rien du sort des légumes ou de la viande qui " ont donné leurs principes nutritifs et aromatiques au bouillon " selon les théories de la nutrition de l'époque, exposées encore dans *L'Art Culinaire Français*. Une heure d'enquête et une solide tradition culinaire familiale m'ont été nécessaires pour obtenir une réponse raisonnable et argumentée à la question, mais ce n'est pas encore une réponse professionnelle et je n'ai pas les moyens d'interpréter les recettes que je trouve. *La cuisinière Provençale*, de Jean Baptiste Reboul, qui en est à sa 26^e réédition depuis 1897, s'ouvre sur *Les Potages*, chapitre introduit par une *théorie du pot au feu* qui explique que la cuisson est une opération chimique agissant différemment sur les fibres, la graisse, l'osmazône et l'albumine des viandes, ce qui permet de choisir sa technique : départ à froid et cuisson lente pour un bouillon goûteux (les bouillons gras), à chaud et à feu vif pour une viande parfumée. On y apprend aussi que les os servent à donner du liant au bouillon et qu'il ne faut pas en exagérer la quantité. L'auteur était chef de cuisine dans une grande famille marseillaise, il se présente comme le conservateur d'un art culinaire local et par exemple, vient déposer son ouvrage au musée créé par Mistral : la dimension didactique de l'ouvrage est ici clairement assumée, le "Pot au feu" y est une œuvre et sa préparation ne relève pas d'une description algorithmique.

J'ai pris un exemple non mathématique, mais il n'est ni métaphorique ni anecdotique, car mon intervention ne consiste pas à proposer mes travaux mais à ouvrir le débat, je montrerai que l'étude du pot au feu (que j'ai tenté de mener à titre d'exemple) permet des comparaisons intéressantes.

Une première leçon peut être tirée de cette tentative. **L'étude est chère**, elle coûte toujours en temps (pris sur le temps de l'action : la skholè) et en efforts. L'enquête sur les décimaux que nécessiterait la situation décrite plus haut, est bien plus longue : sa conduite nécessite plus qu'une culture familiale de l'œuvre, c'est-à-dire une institution spécifique, une école. Car, lorsqu'elle est engagée sans la direction d'un professeur, les progrès dans la connaissance demeurent souvent invisibles et les questions peuvent rester très longtemps pendantes, sans réponse. Trouver des éléments de réponse à la question : " Pourquoi faudrait-il, dans certaines recettes, plonger la viande dans l'eau froide et dans d'autres, dans l'eau bouillante ? " nécessite de trouver une institution où se tienne un discours technologique sur le Pot au feu. Dans la pratique il n'y a pas de petite erreur ni d'étourderies et parce que la réussite de l'action vaut évaluation absolument positive. Chaque détail compte et tant que tous les détails ne sont pas réglés, l'ensemble ne convient pas. La *direction d'étude* sert donc d'abord à *orienter les efforts*, de telle manière que les progrès puissent sembler cumulatifs, et ils le sont... le long de la ligne choisie. Aussi, l'étude s'arrête dès que l'institution peut attribuer à l'élève une part de savoir suffisante pour ce qu'il aura à faire de l'œuvre : qu'il s'agisse d'une routine locale fondée sur un algorithme ou d'un simple terme capable de nommer un problème reconnu. Battre le fer ; nommer, dans une figure, un couple de droites parallèles ; résoudre un système de deux équations à deux inconnues ; étudier les variations d'une fonction fraction rationnelle ; etc.

A ce niveau de généralité, il semblerait que l'on puisse avoir perdu les questions étudiées hier et aujourd'hui. Mais il n'en est rien : ainsi, on peut voir dans l'exemple de l'enquête sur le pot au feu les types de contraintes générales identifiées par **Corinne Castela**. Car **l'extension d'une pratique** en principe bien connue sinon totalement routinisée suppose une nouvelle mise à l'étude qui porte sur *la technologie de cette pratique*, considérée dès lors comme un exemple du champ de pratiques que peut contrôler la technologie. On peut voir aussi que dans les recettes des livres de recettes le didactique est dénié : il n'y a généralement rien à savoir, seulement à faire. Mais dans les ouvrages de cuisine où la

dimension didactique est assumée, le discours inaugural sur une classe de recettes peut trouver place, il permet un rapide développement à fonction technologique. Chacun sait que la transmission de recettes correspond à une dénégation de la nécessité d'une activité didactique : nous dirions en mathématiques que c'est le cas des "enseignements" qui se fondent sur la description algorithmique des comportements à obtenir. Mais il peut être étonnant de voir comment ce phénomène se retrouve au cœur même de questions mathématiques scolaires, en Seconde, en Terminale Scientifique, ou même en DEUG. Pour l'observer, il est possible de suivre les questions posées sur les forums d'aide à l'étude des mathématiques. Kadir Erdogan, étudiant en DEA à Lyon sous ma direction et celle de Charles Payan et Denise Grenier, réalise ce travail. Sans préjuger de l'ensemble de ce qu'il trouvera sur le sujet, j'évoquerai comment les forums permettent justement de rencontrer des sujets qui tentent d'étudier de manière autonome les questions qu'ils rencontrent, à l'insu des institutions d'enseignement et sans l'appui d'un directeur d'étude : des sujets qui sont dans la position didactique décrite tout à l'heure à propos du pot au feu alors que, ainsi que **Samuel Johsua** le demande, ils devraient bénéficier, pour ce type d'étude, du soutien d'une école. Mais le développement de dispositifs d'aide à l'étude suppose que l'on aie identifiés non seulement les objets de l'étude, mais les gestes nécessaires à l'entrée en rapport à ces objets. La question de la construction d'une mémoire du savoir, dont **Yves Matheron** a montré qu'elle se fonde sur des systèmes d'ostensifs dont la sémiotité est régionale mais qui appellent des pratiques incorporées pour les travailler à nouveau à l'occasion de l'étude d'une nouvelle classe de problèmes semble en revanche bien spécifique des activités mathématisantes. Son identification dans le cadre des TPE pourrait être sans doute l'un des enjeux de la formation d'une culture de l'activité scientifique que pourraient assumer ces dispositifs et peut-être même, l'un des moyens du travail didactique que la gestion des TPE demande : il faudrait le demander à Yves Chevallard. .

PREMIER TEMPS

Diriger l'étude, sans doute, mais quels sont les gestes d'étude attendus

Je prendrai un exemple mathématique cette fois, venu d'un de ces forums d'aide à l'étude qui sont nés spontanément, dans la mesure où je n'e suis pas encore arrivé à convaincre le responsable du département à l'INRP de l'intérêt de faire fonctionner un forum régulé par des didacticiens, et ce, malgré le soutien des IREMs qui seraient impliqués. J'espère que cette intervention leur permettra d'ajouter leurs moyens de pression aux miens, qui sont faibles. **Question venue sur le Forum de Polytechnique, le 22 octobre 2000, à 15 :33 :48 d'un élève de classe de DEUG SM 1^{ère} année**

LA QUESTION CONSISTE EN L'ÉNONCÉ DU PROBLÈME SUIVANT

Soit p un nombre premier et k un entier tels que p et k sont premiers entre eux ;

a- Déterminer une relation entre $C(p,k)$ et $C(p-1,k-1)$

b- En déduire que p divise $C(p,k)$

c- En déduire que pour tout a,b de Z , $(a+b)^p$ est congrue à a^p+b^p (modulo p)

d- Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$, n^p est congrue à n (modulo p)

e- En déduire que si p ne divise pas n alors n^{p-1} est congrue à 1 (modulo p)

f- Quel est le reste de la division euclidienne de 61843^{2403} par 13 ?

RÉPONSE FOURNIE PAR LE FORUM, LE 22 OCTOBRE 2000 À 17:43:08

a- Déterminer une relation entre $C(p,k)$ et $C(p-1,k-1)$

Utilise le fait que $C(p,k) = \frac{p!}{k!(p-k)!}$ et que $(k-1)-(p-1)=k-p$

$C(p,k) = \frac{p}{k} C(p-1,k-1)$

b- En déduire que p divise C_p

Tu as $k \cdot C(p,k) = p \cdot C(p-1,k-1)$: théorème de Gauss (p et k premiers entre eux)

- c- En déduire que pour tout a, b de \mathbb{Z} , $(a+b)^p$ est congrue à $a^p + b^p$ (modulo p)
Utilise le développement de $(a+b)^p$ avec les coefficients binomiaux, et ce qu'on vient de montrer.
- d- Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$, n^p est congrue à n (modulo p)
Par récurrence : si $n^p = n [p]$, alors $(n+1)^p = n^p + 1 = n+1 [p]$
- e- En déduire que si p ne divise pas n alors $n^{(p-1)}$ est congrue à 1 (modulo p)
Si p ne divise pas n , alors n est inversible dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (compte tenu du fait que p est premier) donc, en divisant la relation précédente par n : $n^{(p-1)} = 1 [p]$
- f- Quel est le reste de la division euclidienne de 61843^{2403} par 13 ?
 $61843 = 13 \cdot 4757 + 2$
donc $61843^{2403} = 2^{2403} [13]$
Remarque que $2^4 = 16 = 3 [13]$
 $2^6 = 2^4 \cdot 2 = 12 = -1 [13]$
 $2^{12} = 1 [13]$
or $2403 = 12 \cdot 200 + 3$
donc $2^{2403} = 2^3 [13] = 8 [13]$ Le reste de la division est 8.

ANALYSE DES QUESTIONS ET DES RÉPONSES

L'organisation de l'ensemble des questions nous montre d'abord par la consigne "en déduire" qu'il faudrait se servir de la question précédente comme hypothèse, dans la résolution de la question qui la suit. On pourrait en plus remarquer que cette organisation se propose de faire un passage de la combinatoire scolaire au traitement algébrique de questions d'arithmétique savante, et c'est grâce à ce passage que l'ensemble des questions posées sera résolu sans que les relations- par exemple- entre les théorèmes à démontrer et les classes de congruence soient vraiment construites. Avant d'explicitier et d'analyser les résolutions proposées à ces questions par le site, donnons d'abord deux définitions et un théorème que nous allons admettre pour l'instant sans démonstration :

Définition-1 : Soit a, b deux entiers relatifs et $a \neq 0$, s'il existe un x entier relatif tel que $b = ax$ on dit que a divise b ou b est divisé par a et nous allons l'écrire $a|b$.

Définition-2 : Etant donné des entiers relatifs a, b, m et $m > 0$, si $m|(a-b)$ on dit que a est congru à b selon le modulo m et nous allons l'écrire $a \equiv b \pmod{m}$

Théorème-1 : Soit a, b et c des entiers relatifs et $a \neq 0$, si $a|bc$ et a ne divise pas b alors $a|c$.

Note : Nous allons écrire le fait que a et b sont premiers entre eux $(a,b) = 1$

La première question suppose la mise en œuvre des connaissances de base sur les combinaisons dont l'étude ne poserait pas de problème, telle qu'elle est formulée, à ce niveau. Mais si cette question n'avait pas été posée et si la première question avait été "montrer que, soit p un premier et k un entier tels que p et k sont premiers entre eux, p divise $C(p,k)$ " la recherche aurait pu être celle-ci :

$$C(p,k) = \frac{p!}{(p-k)!k!} = \frac{p(p-1)!}{((p-k)(p-k-1)!k!)} = \frac{p(p-1)!}{(p-k)(p-1-k)!k!} \\ = \frac{p}{p-k} C(p-1,k)$$

Donc le travail aurait pu être interrompu tout au début de la question. Car ce que l'on vient d'obtenir ne permet pas de conclure. Cela nous montre déjà qu'il ne s'agit pas d'étude des questions en jouant sur deux 'registres' ou plutôt en 'changeant de cadre', mais qu'il s'agit plutôt **d'entrer dans une organisation mathématique permettant de démontrer certains théorèmes en vue d'élaborer une ou des technique(s) pour un certain type de problèmes.**

Nous allons tenter de conduire l'étude correspondante, afin de retrouver toute la dimension didactique de la question en retrouvant la classe de problèmes derrière l'exercice. A cet effet, nous allons étudier la réponse fournie.

ETUDE DE LA RÉPONSE

Question b)

On peut écrire, grâce à la relation obtenue " par le répondant " dans la première question :

$k \cdot C(p,k) = p \cdot C(p-1,k-1)$ c'est-à-dire p divise $k \cdot C(p,k)$ et comme p et k sont premiers entre eux, on peut conclure (grâce au théorème-1) que p divise $C(p,k)$

Question c)

Le passage délicat dont nous avons parlé se réalise dans la troisième question, qui engage à travailler au niveau des congruences ;

$$(a+b)^p = \sum_{k=0,p} C(p,k) a^{p-k} b^k = a^p + C(p,1) a^{p-1} b + \dots + C(p,k) a^{p-k} b^k + \dots + C(p,p-1) a b^{p-1} + b^p$$

Compte tenu de la question précédente ; pour tout $0 < k < p$ p divise $C(p,k)$

D'où $(a+b)^p \equiv a^p + b^p \pmod{p}$

Question d)

Pour $n=1$, $1^p \equiv 1 \pmod{p}$ (p est un premier)

On suppose que pour $n = k$, $k^p \equiv k \pmod{p}$

Pour $n = k+1$, $(k+1)^p \equiv (k^p) + (1^p) \pmod{p}$ (compte tenu de la question c)

$$(k+1)^p \equiv k+1 \pmod{p}$$

donc pour tout $n > 0$ entier relatif $n^p \equiv n \pmod{p}$

Question e)

Nous pouvons formuler aussi l'explication technologique donnée par le répondant de la manière suivante :

Si tout $n > 0$, $n^p \equiv n \pmod{p}$ alors $p / (n^p - n)$

donc $p / (n(n^{p-1} - 1))$ et comme p ne divise pas n compte tenu du théorème-1, $p / (n^{p-1} - 1)$

D'où $n^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Question f)

La dernière question demande la mise en œuvre d'une technique - pour laquelle les théorèmes précédents existaient - pour un certain type de tâches que l'on pourrait désigner ainsi : **Comment trouver le reste de la division euclidienne d'un (grand) nombre, écrit sous la forme 'exponentielle d'un nombre premier' ?** Regardons d'abord la réponse proposée à cette question par le répondant du site ;

$$61843 = 13 \cdot 4757 + 2$$

Donc $(61843)^{2403} \equiv 2^{2403} \pmod{13}$

$$2^6 = 2^{4 \cdot 1 + 2} = 2^4 \cdot 2^2 = 16 \cdot 4 = 64 \equiv 12 \equiv -1 \pmod{13}$$

$$2^{12} \equiv 1 \pmod{13}$$

$$\text{or } 2403 = 12 \cdot 200 + 3$$

$$\text{Donc } 2^{2403} \equiv 2^3 \pmod{13} \equiv 8 \pmod{13}.$$

Il est important de souligner que le résultat de la première étape, qui découle en fait de la question c) et qui n'est vrai que si p est un premier, a été trouvé, ici, sans explication comme si c'était naturel de le faire directement et comme si l'on n'avait pas à disposer d'une technique à cet effet ;

en outre, $2^{12} \equiv 1 \pmod{13}$ a été trouvé par décomposition de 12 bien qu'un théorème ait été démontré en question e). On aurait donc pu répondre en se servant systématiquement des théorèmes déjà démontrés :

$$\begin{aligned}
 \text{f- i)} \quad 61843^{2403} &\equiv (13 \cdot 4757 + 2)^{2403} \equiv (13 \cdot 4757)^{2403} + 2^{2403} \pmod{13} \\
 &\equiv (13 \cdot 4757)^{2403} \pmod{13} + 2^{2403} \pmod{13} \\
 &\equiv 2^{2403} \pmod{13} \equiv 2^{(184 \cdot 13 + 11)} \pmod{13} \\
 &\equiv (2^{184})^{13} \cdot 2^{11} \pmod{13} \equiv 2^{184} \cdot 2^{11} \pmod{13} \\
 &\equiv 2^{195} \pmod{13} \equiv (2^{15})^{13} \pmod{13} \equiv 2^{15} \pmod{13} \\
 &\equiv 2^{13} \cdot 2^2 \pmod{13} \equiv 2 \cdot 2^2 \pmod{13} \equiv 8 \pmod{13}
 \end{aligned}$$

Le reste de la division est 8.

RECONSTRUCTION DE L'OEUVRE MATHÉMATIQUE ÉVOQUÉE

Nous pouvons écrire dans l'ordre d'apparition les éléments théoriques de ce que nous venons de faire :

Soit a, b, c, d, m des entiers relatifs, $m > 0$ et $p > 0$ premier

$$(a+b)^p \equiv a^p + b^p \pmod{p}$$

$$(a+b) \pmod{m} = a \pmod{m} + b \pmod{m}$$

$$ab \pmod{m} = a \pmod{m} b \pmod{m}$$

$$\text{Pour tout } n > 0 \text{ et } p \text{ premier } n^p \equiv n \pmod{p}$$

Cela donne une manière nouvelle d'envisager la réponse à la question f, qui est l'exemple générique du champ de problèmes étudié

(Il semble que l'on aie ici une technique d'enseignement répandue à l'université, consistant à **faire produire par l'étudiant une séquence didactique 'telle que le professeur aurait pu la proposer, dans une séance d'étude dirigée'** : sans développer ici une argumentation en ce sens, nous qualifierons ce geste d'enseignement en disant qu'il relève d'un "contrat didactique universitaire" traditionnel en ces lieux).

f- ii) Nous savons que pour tout $n > 0$ et p premier $n^p \equiv n \pmod{p}$ et lorsque p ne divise pas n

$$n^{(p-1)} \equiv 1 \pmod{p} :$$

$$\text{alors } 2^{13} \equiv 2 \pmod{13} \text{ et comme } 13 \text{ ne divise pas } 2 \quad 2^{12} \equiv 1 \pmod{13}$$

$$61843^{2403} \equiv 2^{2403} \pmod{13} \quad (\text{f-i})$$

$$\equiv 2^{(12 \cdot 200 + 3)} \pmod{13}$$

$$\equiv (2^{12})^{200} \cdot 2^3 \pmod{13}$$

$$\equiv 2^3 \pmod{13}$$

$$\equiv 8 \pmod{13}$$

Ou encore :

f-iii) $61843^{13} \equiv 61843 \pmod{13}$ et 13 ne divise pas 61843 alors $61843^{12} \equiv 1 \pmod{13}$

$$61843^{2403} \equiv 61843^{(12 \cdot 200 + 3)} \pmod{13}$$

$$\equiv (61843^{12})^{200} \cdot 61843^3 \pmod{13}$$

$$\equiv 61843^3 \pmod{13}$$

$$\equiv (13 \cdot 4757 + 2)^3 \pmod{13}$$

$$\equiv (13 \cdot 4757)^3 + 2^3 \pmod{13}$$

$$\equiv 2^3 \pmod{13}$$

$$\equiv 8 \pmod{13}$$

Commentaire

Nous avons vu dans ce qui précède que *le but de l'ensemble de ces questions était de permettre d'élaborer une certaine technique pour une classe de problèmes* et nous avons également vu que *la rencontre du type de problèmes à étudier se réalisait en dernière étape*. Ce qui est en effet une entorse au contrat habituel du secondaire mais un cas caractéristique des contrats universitaires.

Nous pouvons l'expliquer ainsi : en général, dans le fonctionnement du contrat secondaire, vient d'abord la rencontre du problème puis celle de la technique qui est justifiée et "souvent formalisée" par une explication technologique qui la suit ; enfin viennent les exercices - souvent assez semblables à ceux qui ont été faits en cours - laissés à la charge des élèves. Pour un exemple de ce contrat il suffit de voir, par exemple, comment un sujet mathématique est traité dans un manuel de 6^{ème}.

Mais en ce qui concerne le contrat relatif à cet exercice, que nous avons qualifié *de contrat universitaire*, nous pouvons dire que l'organisation mathématique met souvent en jeu d'abord les démonstrations de certains théorèmes qui permettent à leur tour l'élaboration d'une (ou plusieurs) technique, et celle-ci prend sens avec quelques applications. Il en va de même pour ce contrat que les exercices proposés aux élèves supposent une production et la mise en œuvre de certaines relations entre certains résultats et certains théorèmes. Nous pouvons dire que la réponse proposée à la dernière question, du point de vue de ce contrat, ne serait pas celle qu'un professeur de mathématiques de Ter S ou de l'université aurait pu attendre ou aurait le droit d'attendre. Analysons encore un peu cette réponse ; pour la résolution de ce type de problèmes, trouver le nombre qui est congru à 1 se révèle souvent comme la méthode la plus connue. Et la suite des opérations se fait sans justification et d'une manière tellement algorithmique que la mise en œuvre des résultats des théorèmes échappe même au répondant, bien qu'il les ait démontrés un peu plus haut.

Reconstruction du champ de problèmes

Dans ce qui suit nous allons d'abord tenter de construire une autre organisation afin de démontrer les mêmes théorèmes et ensuite nous allons chercher des réponses aux questions qui pourraient être soulevées à partir de ces deux organisations autour de la même problématique.

Nous allons d'abord donner quelques définitions et théorèmes (donc les démonstrations de certains entre eux) qui seront utilisés pour les théorèmes que nous voulons démontrer. Mais tout au long de cette organisation nous serons restés dans le même 'champ' de travail. C'est - à - dire dans la divisibilité des nombres et dans les classes de congruences :

Théorème-2 : Soit a, b, c des entiers relatifs et $a \neq 0$, si $a|b$ et $a|c$ alors pour tout x, y entiers relatifs $a|(bx+cy)$

Démonstration : Si $a|b$ et $a|c$ il existe p, q entiers relatifs tels que $b = ap$ et $c = aq$
donc pour tout x, y $bx = (ap)x$ et $cy = (aq)y$
alors $bx+cy = a(px)+a(qy) = a(px+qy)$
d'où $a|(bx+cy)$

Définition-3 : Soit x, y, m des entiers relatifs et $m > 0$, si $x \equiv y$ (modulo m) on dit que y est un reste de x selon modulo m .

Soit x_1, x_2, \dots, x_t des entiers relatifs et $1 \leq i, j \leq t$. Si ;

Pour $i \neq j$ x_i n'est pas congrue à x_j

Pour tout a entier relatif il n'existe qu'un seul i tel que $a \equiv x_i$ (modulo m)

Alors on dit que l'ensemble de $\{x_1, x_2, \dots, x_t\}$ est un "système de reste" et à partir de maintenant nous allons désigner ce système par "SR"

Dans ce cas, $x_1^*, x_2^*, \dots, x_t^*$ (pour $1 \leq i \leq t$ $x_i = \{n : n = x_i + mk, k \text{ entier relatif}\}$) constituent toutes les classes de reste selon le modulo m . Il est clair que l'on peut constituer chaque SR en choisissant un seul élément dans chaque classe de reste.

Définition-4 : Soit $r_1, r_2, \dots, r_t, m > 0$ des entiers relatifs et pour tout $1 \leq i \leq t$ $(r_i, m) = 1, (1 \leq r_i)$

Si ;

i- Pour $i \neq j$ r_i n'est pas congrue à r_j (modulo m)

ii- Pour tout y entier relatif et $(y, m) = 1$, s'il existe un j ($1 \leq j \leq t$) tel que $y \equiv r_j$ (modulo m)

Alors on dit que l'ensemble de $\{r_1, r_2, \dots, r_t\}$ est un "système de reste réduit" selon le modulo m . Et à partir de maintenant nous allons désigner ce système par "SRR"

Résultat-1 : Si on prend dans SR $\{0, 1, 2, \dots, (m-1)\}$ ce qui est $(r_i, m) = 1$ on obtient un SRR.

Résultat-2 : Le nombre d'éléments de deux SRR est égal.

Définition-5 : Si on définit une fonction \emptyset de \mathbb{N}^+ dans \mathbb{N}^+ , $m \rightarrow \emptyset(m)$

(Il est possible de montrer que : i) pour tout x de \mathbb{N}^+ x est de \mathbb{N}^+ et ii) si $x_1 = x_2$ $\emptyset(x_1) = \emptyset(x_2)$)

Alors $\emptyset(m)$ donne le nombre d'éléments dans SRR.

Par exemple ; $\emptyset(1) = 1$, $\emptyset(2) = 1$, $\emptyset(3) = 2$, $\emptyset(4) = 4$, $\emptyset(5) = 4$, $\emptyset(6) = 2$

Résultat-3 : Si p est un nombre premier alors $\emptyset(p) = p-1$.

Résultat-4 : Si $(m, n) = 1$ alors $\emptyset(mn) = \emptyset(m)\emptyset(n)$

Théorème-3 : Soit $\{x_1, x_2, \dots, x_t\}$ est un SR selon le modulo m , $0 \neq a$ un entier relatif et $(a, m) = 1$. Alors $\{ax_1+b, ax_2+b, \dots, ax_t+b\}$ constitue un SR selon le modulo m .

Démonstration : Comme $x_1^*, x_2^*, \dots, x_t^*$ constitue toutes les classes de reste selon le modulo m , il suffit de démontrer que pour tout $i \neq j$ ax_i+b n'est pas congrue à ax_j+b (modulo m)

Supposons que pour tout $i \neq j$ $ax_i+b \equiv ax_j+b$ (modulo m), alors $m \mid ((ax_i+b) - (ax_j+b))$

$$i \neq j \quad ax_i \equiv ax_j \pmod{m}, \text{ alors } m \mid a(x_i - x_j)$$

donc, selon le théorème-1 $m \mid (x_i - x_j)$

$$i \neq j \quad x_i \equiv x_j \pmod{m} \text{ ce qui contredit l'hypothèse}$$

Donc pour $i \neq j$ ax_i+b n'est pas congrue à ax_j+b (modulo m)

Alors toutes les classes de restes selon le modulo m sont $(ax_1+b)^*, (ax_2+b)^*, \dots, (ax_t+b)^*$.

Finalement comme on peut obtenir un SR en choisissant un élément dans ces classes $\{ax_1+b, ax_2+b, \dots, ax_t+b\}$ est un SR selon le modulo m .

Théorème-4 : Soit a, m des entiers relatifs, $m > 0$ et $(a, m) = 1$, si $\{x_1, x_2, \dots, x_{\emptyset(m)}\}$ est un SRR selon modulo m alors $\{ax_1, ax_2, \dots, ax_{\emptyset(m)}\}$ est un SRR selon le modulo m .

Démonstration : Soit $\{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ est un SR, on peut dire (du théorème-3) que $\{ay_1, ay_2, \dots, ay_m\}$ est un SR. Donc aucun élément de $\{ax_1, ax_2, \dots, ax_{\emptyset(m)}\}$ ne divise pas m . Si non ;

Si $ax_i/m = u(ax_i) = a(x_i)$, alors a/m ce qui contredit l'hypothèse.

D'où $\{ax_1, ax_2, \dots, ax_{\emptyset(m)}\}$ est un SRR selon modulo m .

Théorème-5 : Soit a, m des entiers relatifs, $m > 0$ et $(a, m) = 1$, alors $a^{\emptyset(m)} \equiv 1 \pmod{m}$

Démonstration : Soit $\{r_1, r_2, \dots, r_{\emptyset(m)}\}$ est un SR selon le modulo m . Alors on peut dire

(du théorème-4) que $\{ar_1, ar_2, \dots, ar_{\emptyset(m)}\}$ est un SRR selon le modulo m .

On peut écrire (selon la définition de SRR) ; pour tout $1 \leq i \leq \emptyset(m)$ il y a un $1 \leq k \leq \emptyset(m)$ tel que

$ri \equiv a^*rk$ (modulo m). Alors,

$$(\prod_{i=1}^{\emptyset(m)} ri) \equiv \prod_{i=1}^{\emptyset(m)} a^*rk \pmod{m} \quad (\prod_{k=1}^{\emptyset(m)} rk)$$

$$(\prod_{i=1}^{\emptyset(m)} ri) \equiv a^{\emptyset(m)} \prod_{i=1}^{\emptyset(m)} rk \pmod{m} \quad (\prod_{k=1}^{\emptyset(m)} rk)$$

(il résulte du théorème-1) $1 \equiv a^{\emptyset(m)} \pmod{m}$

Théorème-6 : (théorème de Fermat) : Soit p un premier, a un entier relatif et $(a, p) = 1$,

alors $a^{(p-1)} \equiv 1 \pmod{p}$

Démonstration : Selon le résultat-3 ; si p est un nombre premier alors $\emptyset(p) = p-1$ et selon le théorème-5) $a^{\emptyset(m)} = a^{(p-1)} \equiv 1 \pmod{p}$

Théorème-7 : Soit p un premier et $a > 0$ un entier relatif, alors $a^p \equiv a \pmod{p}$

Démonstration : Si p est un premier $p > 1$ alors $p-1 > 0$ et $a^p = a * a^{(p-1)}$

Si $p \mid a$ alors $p \mid (a^p)$ donc $a^p \equiv a \equiv 0 \pmod{p}$

Si p ne divise pas a alors $(a, p) = 1$ et on peut écrire selon le théorème de Fermat ;

$$a^{(p-1)} \equiv 1 \pmod{p}$$

$$a * a^{(p-1)} \equiv a \pmod{p}$$

$$a^p \equiv a \pmod{p}$$

Théorème-8 : Soit p un premier et a, b des entiers relatifs, alors $(a+b)^p \equiv (a^p) + (b^p) \pmod{p}$

Démonstration : Selon le théorème-7 ;
 $a^p \equiv a \pmod{p}$
 $b^p \equiv b \pmod{p}$
 et $(a+b)^p \equiv (a+b) \pmod{p}$
 D'où $(a+b)^p \equiv (a^p) + (b^p) \pmod{p}$

A partir de ces deux organisations, il convient de remarquer que la technique élaborée dépend du choix du diviseur et la portée de la technique est limitée au cas où ce diviseur est un nombre premier.

S'il était agité par exemple, la division de 61843^{2403} par 14 ;

$61843 = 14 \cdot 4417 + 5$ on ne pourra pas écrire

$61843^{2403} \equiv (14 \cdot 4417)^{2403} + 5^{2403} \pmod{14}$

Car cela n'est vrai que lorsque p est un premier. Donc si on ne connaît pas d'autres manières de faire, on n'aurait pas d'autres choix que de chercher - par des essais - une puissance de 61843 qui est congrue à 1 selon le modulo 14.

Par contre nous avons la possibilité de trouver, dans ce que nous avons proposé comme une organisation alternative, **des éléments théoriques permettant d'élaborer une technique** (dont la conformité sera discutée) pour ce deuxième type de problèmes :

$\emptyset(14) = 1^*, 3^*, 5^*, 9^*, 11^*, 13^*$ c'est-à-dire $\emptyset(14) = 6$

Ou bien comme $(2,7) = 1$ on peut écrire " du résultat-4 " ; $\emptyset(14) = \emptyset(2 \cdot 7) = \emptyset(2) \cdot \emptyset(7)$

et " du résultat-3 " $\emptyset(7) = 6$ et $\emptyset(2) = 1$, donc $\emptyset(14) = 6 \cdot 1 = 6$

En plus $(61843, 14) = 1$, alors il résulte " du théorème-5 " que

$61843^{\emptyset(14)} = 61843^6 \equiv 1 \pmod{14}$

Alors $61843^{2403} \equiv 61843^{(400 \cdot 6 + 3)} \equiv 61843^{(400 \cdot 6)} \cdot 61843^3 \pmod{14}$

$\equiv 61843^3 \pmod{14}$ etc.

On peut s'apercevoir qu'il reste à trouver 61843^3 . C'est-à-dire quand le diviseur n'est pas un nombre premier, la résolution de ce type de problèmes ne va pas ainsi.

Conclusion

Ce que nous venons de construire nous permet d'une part, de mieux comprendre les relations entre les théorèmes à démontrer pour la mise en œuvre d'une technique et les classes des congruences sur lesquelles on travaille et d'autre part, peut permettre l'élaboration de différentes techniques autour d'autres problèmes.

Bien que l'on rencontre souvent dans une institution donnée (on peut considérer par exemple, relativement à la question posée, la classe de DEUG SM 1^{ère} année comme cette institution) une seule organisation connue et parfois reconnue des élèves et des professeurs, *toutes ces analyses nous montrent qu'il peut exister d'autres organisations "praxéologiques" autour du même type de problèmes.*

Il est donc nécessaire de s'interroger sur une partie du travail des élèves qui est considérée la plus part du temps comme allant de soi. Nous pouvons dire ainsi : **le travail laissé à la charge des élèves échappe souvent aux regards didactiques, et pourtant ce travail est souvent considéré par les deux actants du système d'enseignement (élèves – enseignant) comme un enjeu institutionnel.**

Nous pouvons dire aussi que pour être un bon sujet de son institution, un élève doit avoir un rapport conforme à l'objet d'enseignement et pour avoir un rapport conforme, doit comprendre le contrat. Mais dans ce cas il devient nécessaire de poser cette question : **Comment comprendre un tel contrat ?** Puisque dans la vie ordinaire de la classe, le travail individuel des élèves consiste, en quelque sorte, à reproduire une réponse déjà produite pour un certain type de problèmes.

DEUXIÈME TEMPS

Aider les élèves, est-ce si simple ? le cas de “ L’aide individualisée ”

INTRODUCTION

Le premier texte qui parle officiellement d’une **aide individualisée** est du 7 janvier 1999. C’est une circulaire adressée aux Recteurs et intitulée **Rentrée 1999**. Ce texte est organisé en trois titres : I - L’école pour tous ; II - **Les grands axes de la politique éducative** ; III - Mobiliser l’ensemble de la communauté éducative sur les démarches de projet et de contrat. C’est dans le titre II sous-titre **A - Recommandations Générales**, que l’on trouve les trois sous-titres 1 - Savoirs fondamentaux et diversité des parcours ; **2 - Aide individualisée** ; 3 - Education à la citoyenneté ; 4 - Orientation. Ainsi, le dispositif mis en place pour les classes de Seconde apparaît-il comme un élément d’une pièce essentielle de la politique éducative qui vise à assurer “ ... la lutte contre l’échec scolaire, la réduction des taux de redoublements, la réussite aux examens, en somme la qualité des apprentissages des élèves... ”, mais ce n’est pas le seul ou plutôt, il se décline en de nombreuses variantes : “ aide méthodologique, études encadrées ou surveillées, permanences, aide aux devoirs et leçons, etc. ” sont des dispositifs du Collège qui sont repensés sous l’appellation nouvelle ; mais le texte poursuit : “ **La réforme des Lycées a précisément pour objet de dégager le temps nécessaire pour que les enseignants apportent aux élèves, selon des formules variables, toute l’aide dont ils ont besoin pour mener à bien leurs études.** ”

Il est alors intéressant de revenir au premier paragraphe du titre II, A, 2, qui nous intéresse : nous aurons ainsi cité en entier ou presque le texte concernant notre sujet “ Les évaluations nationales des élèves en classe de CE2, Sixième et Seconde doivent constituer, plus qu’aujourd’hui, des outils précieux pour les enseignants : vous prendrez toutes les initiatives nécessaires pour qu’une exploitation pédagogique des résultats soit effectuée, permettant aux enseignants de remédier aux difficultés rencontrées par leurs élèves [...] Plus généralement, l’aide individualisée, en faveur des élèves qui en ont le plus besoin, doit constituer une préoccupation majeure des établissements... ”. Le problème qui est ici abordé est donc celui **de l’exploitation pédagogique des résultats des évaluations nationales**, et c’est là que peut commencer une réflexion technique sur l’injonction ministérielle. En effet, les textes publiés dans les BO du 27 mai 1999 et du 24 juin 1999, sur la réforme des lycées en Seconde reprennent l’idée pour donner **des manières de procéder**. Ces manières relèvent de techniques connues dans le cadre de discours théoriques identifiés, dont on peut interroger la pertinence dans le traitement des problèmes d’enseignement qui ont été désignés précédemment. En effet, l’aide **individualisée** va de pair avec l’idée que les élèves sont en fait des personnes venues à l’école dans l’intention d’acquérir un certain nombre de **compétences** : le terme de compétence nomme l’aptitude d’une personne à tenir un poste de travail c’est-à-dire à accomplir une tâche relativement stable et bien identifiée, une compétence est donc une propriété individuelle qui a une valeur sur le marché du travail. *Et c’est là que l’on peut se rendre compte que la question de “ l’aide dont les élèves ont besoin pour accomplir leurs études ”, qui semblait une bonne question, s’est transformée - à l’insu, sans doute, des auteurs du texte - en injonction paradoxale faite aux professeurs : c’est ce que je vais montrer, avant de tenter d’imaginer quelques sorties possibles du “ double bind ” ainsi créé.*

LA CLASSE ET SES ÉLÈVES

Accomplir des études, ce n’est pas seulement acquérir des compétences - ne serait-ce que des compétences à étudier encore - c’est aussi entrer en rapport avec des savoirs. Or, **les savoirs** ne sont pas des situations de travail mais **sont des objets sociaux** d’un type particulier, **des oeuvres humaines** qui expriment la généralité des réponses à un type de problèmes qu’une société a produites ou dont elle s’est rendue maîtresse. **Faire des études, c’est d’abord rencontrer ces oeuvres, de manière plus ou moins approfondie, comme des productions humaines dignes d’intérêt et que chaque génération doit à son tour choisir de faire vivre, de laisser dormir dans un lieu d’archive, ou simplement de laisser mourir avec la génération précédente.** Savoir, c’est entretenir un certain rapport à une œuvre (que l’on nomme parfois, de manière plus

modeste mais moins explicite, un objet de savoir) soit, connaître une oeuvre. Pour qu'on ne pense pas que je tiens un discours métaphysique ; je citerai deux exemples relatifs à l'enseignement des mathématiques de la scolarité obligatoire. D'abord, *le système des nombres décimaux et les pratiques de mesure des grandeurs qui lui sont associées*, suivant en cela Lebesgue (production de nombres, par fabrication d'une suite illimitée convergente d'opérations, qui approche la grandeur mesurée (il suffit que ce soit décimale par décimale)), mais je pourrais citer aussi bien la géométrie de Thalès avec *la première généralisation des techniques de l'arpentage à la détermination des longueurs inaccessibles* (par la construction de triangles égaux ou semblables à un triangle donné c'est-à-dire, le report des angles par report de longueurs) : les hauteurs et les distances *en mer lorsqu'on en a une ombre ou une projection accessibles* (il suffit de tracer, sur la base donnée par l'ombre ou la projection, un triangle semblable au triangle inconnu (il faut encore multiplier le résultat par le rapport de l'ombre à l'objet, qui peut être 1)).

Or, la différence entre compétences (aptitudes personnelles) et savoirs (oeuvres humaines dont la connaissance est partagée par les membres d'un groupe) n'est pas sans conséquence, parce que c'est à elle que l'on doit l'existence de deux formes différentes d'apprentissage que l'on peut, en première approche, nommer ainsi :

- **l'apprentissage scolaire** (qui a été inventé spécifiquement, dans sa forme actuelle, il y a deux siècles environ, c'est un dispositif efficace de *transmission* des rapports aux oeuvres humaines) **et**
- **l'apprentissage par frayage** (plus anciennement connu et dont une forme achevée est le compagnonnage, c'est un dispositif de *reproduction* de personnes capables de manifester par elles-mêmes les mêmes compétences que leurs prédécesseurs).

Ce dernier se situe *sur le lieu même de l'activité* qu'il s'agit d'apprendre à mener, son contenu est nommé par le produit de l'activité, qui est l'objet unique de l'évaluation ; *l'apprenti n'a donc pas droit à l'erreur*, qui est coûteuse et parfois, risquée et dangereuse. L'apprentissage par frayage ne fait pas l'impasse sur la question de l'irréversibilité des actions sur le monde et l'évaluation du risque que comporte l'activité de production est, de ce fait, la première dimension de l'entrée dans la position d'*apprenti*.

L'apprentissage scolaire en revanche se fait, comme son nom l'indique, *à loisir* (skholê), c'est-à-dire *dégagé de la nécessité de produire* le résultat de l'activité (on peut simplement *lire* un poème). Celle-ci peut y être seulement évoquée, l'accès à son contenu peut passer d'abord par son nom et se poursuivre par l'étude de systèmes de notations qui rendent compte des manipulations concrètes auxquelles ils se substituent (on peut étudier les fractions comme des points marqués sur des segments gradués et en déduire des manières d'additionner les fractions (Adjage, publié chez Pierron) sans pour autant que l'élève doive se demander en quoi les fractions sont des nombres ni ce qu'elles mesurent). L'accès à une oeuvre mathématique peut être évalué par la simple reconnaissance des formes que sont les notations (on peut *réciter* un poème, *reconnaître* un décimal à la virgule) et l'exécution d'une manipulation normalisée (pour multiplier deux décimaux on les multiplie sans tenir compte des virgules avec lesquelles ils sont écrits et on place une virgule de telle manière que le nombre des décimales soit la somme des nombres de décimales de chacun d'eux ; pour ajouter une somme de relatifs à un entier, on enlève les signes d'addition et la parenthèse et on calcule une après l'autre les opérations indiquées ; mais pour la retrancher, on change tous les signes des relatifs de la somme). Ainsi, *l'élève peut recommencer à loisir, sans risquer autre chose que de devoir recommencer, la manipulation dont il vise la maîtrise* (ce type de manipulation est d'ailleurs, en général, le seul geste d'étude que la plupart des logiciels d'enseignement proposent et il en va de même, à peu de choses près, des divers simulateurs de conduite ou d'action).

Mais il ne suffit pas que les élèves aient rencontré les oeuvres qu'on leur propose d'étudier, **il faut encore**, pour que la vie de ces oeuvres ne soit pas limitée à quelques souvenirs de leur existence, si leur étude doit aboutir à l'usage des outils de pensée qu'elles peuvent être, **que**, au terme de l'étude, **des oeuvres aient été produites à nouveau**. On a ainsi pu dire que, à chaque génération, les mathématiciens réécrivaient les mathématiques et parfois même, qu'ils les réinventaient. C'est par exemple ce que fait Descartes quand il écrit *La Géométrie* selon la méthode algébrique qu'il développe à partir des *Regulae ad directionem ingenii*. Mais c'est aussi bien ce que décrit Bachelard lorsqu'il dit que l'élève cartésien qui étudie un cours *le repasse* c'est-

à-dire le réécrit pour lui-même. Les exemples de la réussite de telles activités sont exceptionnels, parce qu'en fait ça n'est pas là une tâche à la mesure d'un individu ordinaire. C'est ici que mon exposé rencontre les théories didactiques et en particulier *la théorie des situations didactiques* produite par Guy Brousseau et ses étudiants. Car la suite des situations que décrit Brousseau (Action bien sûr, au fondement, mais ensuite Formulation, et Validation) est en effet la suite des conditions d'une nouvelle production de l'œuvre étudiée, et Brousseau montre que **cette reproduction artificielle nécessite le travail collectif d'une institution, la classe, et la direction de l'activité de la classe par un maître qui produit les conditions favorables à la genèse d'un savoir** - ce que Brousseau nomme un milieu pour ce savoir. Ainsi, la raison d'être de l'école comme institution d'étude des savoirs tient justement à la dimension sociale des savoirs, qui nécessite leur que le résultat de l'étude soit leur genèse collective. Il y a donc en ce point une limite fonctionnelle à l'individualisation de l'enseignement qui a eu pour conséquence la disparition de l'éducation par précepteurs, même dans le cas des groupes sociaux qui pourraient s'en permettre l'emploi : de nos jours, les rois eux-mêmes sont allés étudier, collectivement, à l'école.

RETOUR AUX TEXTES

La lecture des textes généraux qui décrivent les dispositifs nouveaux accompagnant l'aide individualisée montre qu'ils sont clairs : il s'agit toujours **d'aider les élèves à réaliser ce que j'appellerai les gestes personnels d'étude qui doivent être associés aux gestes d'étude collectifs menés en classe, durant le temps d'enseignement**. Les dispositifs mis en place à ce sujet sont multiples, au point d'ailleurs que leur multiplicité nuit à leur lisibilité si on ne l'interprétait pas comme l'effet d'une insistance persistante qui n'arrive pas à trouver les voies de sa réalisation.

L'ÉTUDE ET LA DIRECTION D'ÉTUDE

Cependant, si l'enseignement des savoirs ne saurait être individualisé, cela ne signifie pas que la direction de l'étude ne puisse pas s'intéresser à chacun de ceux qui étudient ensemble, dans une classe, des savoirs qu'ils ignorent en commun, et que la direction d'étude se fonde pourtant sur les savoirs qu'ils ont précédemment produit en commun. Le problème est ouvert.

TROISIÈME TEMPS

Puisque je suis en position d'ouvrir le débat, je terminerai sur trois questions qui sont, pour moi, aujourd'hui, des questions vives de la recherche nécessitant des recherches comparatives entre les différentes didactiques disciplinaires :

Quels sont les rapports entre les cultures sociales
et les cultures scolaires de l'étude ?

Peut-on appuyer le développement d'une culture scolaire de l'étude
sur une meilleure connaissance des cultures sociales ?

La conversion scolaire des cultures sociales de l'étude
est-elle un déterminant essentiel de certains échecs scolaires ?