



**HAL**  
open science

## Hyperdeterminant of an $SL_2$ -homomorphism

Jean Vallès

► **To cite this version:**

Jean Vallès. Hyperdeterminant of an  $SL_2$ -homomorphism. Annales Mathématiques Blaise Pascal, 2008. hal-01991169

**HAL Id: hal-01991169**

**<https://hal.science/hal-01991169>**

Submitted on 23 Jan 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Hyperdéterminant d'un $SL_2$ -homomorphisme

JEAN VALLÈS

RÉSUMÉ. Etant donnés  $A_1, \dots, A_s$  ( $s \geq 3$ ) des  $SL_2(\mathbb{C})$ -modules non triviaux de dimensions respectives  $n_1 + 1 \geq \dots \geq n_s + 1$  (avec  $n_1 = n_2 + \dots + n_s$ ) et  $\phi \in \mathcal{L}(A_2 \otimes \dots \otimes A_s, A_1)$  un  $SL_2(\mathbb{C})$ -homomorphisme, nous montrons que l'hyperdéterminant de  $\phi$  est nul sauf si les modules  $A_i$  sont irréductibles et si l'homomorphisme est la multiplication des polynômes homogènes à deux variables.

## *Hyperdeterminant of an $SL_2$ -homomorphism*

ABSTRACT. Let  $A_1, \dots, A_s$  ( $s \geq 3$ ) be non-trivial  $SL_2(\mathbb{C})$ -modules with dimensions  $n_1 + 1 \geq \dots \geq n_s + 1$  (such that  $n_1 = n_2 + \dots + n_s$ ) and  $\phi \in \mathcal{L}(A_2 \otimes \dots \otimes A_s, A_1)$  an  $SL_2(\mathbb{C})$ -homomorphism. We show that the hyperdeterminant of  $\phi$  is null except if the modules  $A_i$  are irreducible and the homomorphism is the multiplication of homogeneous polynomials with two variables.

## 1. Introduction

Soient  $s \geq 3$  un nombre entier,  $A_1, \dots, A_s$  des  $SL_2(\mathbb{C})$ -modules non triviaux de dimensions respectives  $n_1 + 1 \geq \dots \geq n_s + 1$  avec  $n_1 = n_2 + \dots + n_s$  et  $\phi \in \mathcal{L}(A_2 \otimes \dots \otimes A_s, A_1)$  un  $SL_2(\mathbb{C})$ -homomorphisme. On note  $Det(\cdot)$  l'hyperdéterminant introduit par Cayley (cf. [0] et [0] ainsi que le rappel ci-dessous) et  $S_i$  le  $SL_2(\mathbb{C})$ -module irréductible de degré  $(i + 1)$ . Le but de ce papier est de donner une preuve simple du résultat suivant :

$Det(\phi) \neq 0 \Leftrightarrow A_i \simeq S_{n_i}$  et  $\phi$  est la multiplication  $S_{n_2} \otimes \dots \otimes S_{n_s} \rightarrow S_{n_1}$

Le pendant géométrique de ce résultat algébrique est qu'un fibré de Steiner de rang  $n$  sur  $\mathbb{P}^n$  (défini par une matrice de formes linéaires) invariant sous l'action de  $SL_2(\mathbb{C})$  est un fibré de Schwarzenberger (cf. corollaire 4.2).

---

*Mots-clés:* Hyperdéterminant, fibrés de Steiner,  $SL_2$  modules.

*Classification math.:* 14L30.

Sous sa forme géométrique ce résultat est prouvé dans [0] (thm. 5.9) pour les matrices tri-dimensionnelles et se déduit du théorème 1.2 de [0] pour le cas général. Cependant ces preuves sont longues et utilisent de nombreux outils de la géométrie algébrique.

La preuve que je propose ici repose uniquement sur la décomposition (dite de Clebsch-Gordan) d'un produit tensoriel de  $SL_2(\mathbb{C})$ -modules en somme directe de  $SL_2(\mathbb{C})$ -modules irréductibles. Et puis, "*on se persuade mieux, pour l'ordinaire, par les raisons qu'on a soi-même trouvées que par celles qui sont venues dans l'esprit des autres*"(Blaise Pascal).

## 2. L'hyperdéterminant de Cayley

Quitte à fixer une base de  $A_i$ , l'hyperdéterminant de  $\phi \in \mathcal{L}(A_2 \otimes \cdots \otimes A_s, A_1)$ , que l'on notera  $Det(\phi)$ , est un polynôme en les coefficients de la matrice  $\phi$ , apparu la première fois sous la plume d'Arthur Cayley [0]. Au début des années 1990 il réapparaît dans le livre de Gelfand Kapranov et Zelevinski ([0], chap.1 et 14), où les auteurs en donnent une étude complète et détaillée. Ils montrent par exemple ([0], chap.14 thm 1.3) qu'il est défini lorsque  $n_1 \leq n_2 + \cdots + n_s$  et que l'hyperdéterminant d'une matrice multidimensionnelle  $\phi \in \mathcal{L}(A_2 \otimes \cdots \otimes A_s, A_1)$  est nul si et seulement si elle correspond à un hyperplan tangent au Segre généralisé, i.e si et seulement si dans l'espace projectif dual  $\mathbb{P}((A_1^* \otimes \cdots \otimes A_s)^*)$  le point  $[\phi]$  correspondant appartient à la variété duale du Segre, soit en notation abrégée  $[\phi] \in (\mathbb{P}(A_1^*) \times \cdots \times \mathbb{P}(A_s))^{\vee}$ .

Une matrice multidimensionnelle  $\phi \in \mathcal{L}(A_2 \otimes \cdots \otimes A_s, A_1^*)$  est dégénérée s'il existe des vecteurs non nuls  $a_i \in A_i$  pour  $i = 2, \dots, s$  tels que  $\phi(a_2 \otimes \cdots \otimes a_s) = 0$ . Lorsque  $n_1 < n_2 + \cdots + n_s$  toutes les matrices sont dégénérées.

Lorsque  $n_1 = n_2 + \cdots + n_s$  les matrices dégénérées forment une hypersurface qui coïncide avec la variété duale du Segre généralisé. Autrement dit (cf. [0], prop 1.1 page 445)

$$[\phi] \in (\mathbb{P}(A_1) \times \cdots \times \mathbb{P}(A_s))^{\vee} \Leftrightarrow \exists a_i \in A_i, a_i \neq 0 \mid \phi(a_2 \otimes \cdots \otimes a_s) = 0 \Leftrightarrow Det(\phi) = 0$$

Je remercie L.Gruson, M.Meulien et N.Perrin pour leur aide dans l'élaboration de ce texte.

## HYPERDÉTERMINANT D'UN $SL_2$ -HOMOMORPHISME

### 3. Invariance sous $SL_2(\mathbb{C})$

On note  $S_i$  le  $SL_2(\mathbb{C})$ -module irréductible de degré  $i+1$ ,  $(x^{i-k}y^k)_{k=0,\dots,i}$  une base de  $S_i$  et  $\{\lambda(t), t \in \mathbb{C}^*\} \subset SL_2(\mathbb{C})$  le sous-groupe à un paramètre agissant de la manière suivante sur cette base :  $\lambda(t).x^{i-k}y^k = t^{i-2k}x^{i-k}y^k$ .

**Théorème 3.1.** *Soient  $A_1, \dots, A_s$  des  $SL_2(\mathbb{C})$ -modules, non triviaux, de dimensions respectives  $n_1 + 1 \geq \dots \geq n_s + 1$  avec  $n_1 = n_2 + \dots + n_s$ , et  $\phi \in \mathcal{L}(A_2 \otimes \dots \otimes A_s, A_1^*)$  un  $SL_2(\mathbb{C})$ -homomorphisme. Alors,*

$$\text{Det}(\phi) \neq 0 \Leftrightarrow A_i \simeq S_{n_i} \text{ et } \phi \text{ est la multiplication } S_{n_2} \otimes \dots \otimes S_{n_s} \rightarrow S_{n_1}$$

*Exemple 3.2.* Comme le grand nombre d'indices pourrait rendre la lecture difficile nous décrivons dans cet exemple les idées de la démonstration du théorème.

Considérons les deux  $SL_2(\mathbb{C})$ -modules  $A = S_1 \oplus S_2$  et  $B = S_0 \oplus S_1$ . La décomposition en  $SL_2(\mathbb{C})$ -modules irréductibles du produit tensoriel  $A \otimes B$  est la suivante

$$A \otimes B = S_3 \oplus S_2 \oplus S_2 \oplus S_1 \oplus S_1 \oplus S_0$$

Soit  $C$  un sous module de  $A \otimes B$  de dimension 7 et  $\phi$  la projection

$$\phi : A \otimes B \rightarrow C$$

L'hypothèse sur la dimension est vérifiée ( $6 = 4 + 2$ ) et la projection est bien invariante sous l'action de  $SL_2(\mathbb{C})$ . Mais ni  $A$  ni  $B$  ni  $C$  ne sont irréductibles ; montrons donc que  $\text{Det}(\phi) = 0$ .

Comme la projection est invariante sous  $SL_2(\mathbb{C})$  on a nécessairement  $\phi(x^2 \otimes x) = x^3$  ou bien  $\phi(x^2 \otimes x) = 0$ . Si l'on suppose  $\text{Det}(\phi) \neq 0$  on en déduit  $S_3 \subset C$ . Soit  $W \subset C$  tel que  $C = S_3 \oplus W$ . Considérons l'application restreinte

$$S_1 \otimes B \rightarrow C$$

Son image est contenue dans  $W$ , l'application restreinte est donc  $S_1 \otimes B \rightarrow W$ . Comme  $\dim(W) - 1 < [\dim(S_1) - 1] + [\dim(B) - 1]$  il existe des vecteurs non nuls  $a \in S_1$  et  $b \in B$  tels que  $\phi(a \otimes b) = 0$ , ce qui contredit  $\text{Det}(\phi) \neq 0$ .

*Démonstration.* Quand  $\phi$  est la multiplication  $S_{n_2} \otimes \dots \otimes S_{n_s} \rightarrow S_{n_1}$  son hyperdéterminant est non nul. En effet, l'intégrité de l'anneau des polynômes homogènes à deux variables permet de prouver que  $\phi(a_2 \otimes \dots \otimes a_s) \neq 0$  lorsque les  $a_i$  sont tous non nuls.

Réciproquement, soient  $A_k = \bigoplus_{i \in I_k} [S_i \otimes U_{i,k}]$  où les  $U_{i,k}$  sont des  $SL_2(\mathbb{C})$  modules triviaux. Soient  $n_k$  le plus grand entier de  $I_k$ ,  $x^{n_k}$  un vecteur de plus haut poids de  $S_{n_k}$  et  $u_{n_k,k}$  un vecteur non nul de  $U_{n_k,k}$ .

Comme  $\phi$  est un  $SL_2(\mathbb{C})$ -homomorphisme on a

$$\phi(\lambda(t) \cdot \bigotimes_{k=2,\dots,s} x^{n_k} \otimes u_{n_k,k}) = \phi(t^{n_2+\dots+n_s} \bigotimes_{k=2,\dots,s} x^{n_k} \otimes u_{n_k,k}) = t^{n_2+\dots+n_s} \phi(\bigotimes_{k=2,\dots,s} x^{n_k} \otimes u_{n_k,k})$$

Par ailleurs  $\phi(\bigotimes_{k=2,\dots,s} x^{n_k} \otimes u_{n_k,k}) \neq 0$  puisque l'on a supposé  $Det(\phi) \neq 0$ . On en déduit qu'il existe un espace vectoriel trivial non nul  $U_{n_2+\dots+n_s}$  tel que

$$\phi(\bigotimes_{k=2,\dots,s} x^{n_k} \otimes u_{n_k,k}) \in S_{n_2+\dots+n_s} \otimes U_{n_2+\dots+n_s} \subset A_1^* \quad (3.1)$$

Comme  $\phi(\bigotimes_{k=2,\dots,s} x^{n_k} \otimes u_{n_k,k}) \neq 0$  pour tout vecteur non nul  $u_{n_k,k} \in U_{n_k,k}$ , l'application linéaire restreinte  $\phi_{res} : U_{n_2,2} \otimes \dots \otimes U_{n_s,s} \rightarrow U_{n_2+\dots+n_s}$  ne s'annule pas sur les tenseurs de rang 1. C'est dire que les variétés  $\mathbb{P}(ker(\phi_{res}))$  et  $\mathbb{P}(U_{n_2,2}) \times \dots \times \mathbb{P}(U_{n_s,s})$  ne s'intersectent pas dans  $\mathbb{P}(U_{n_2,2} \otimes \dots \otimes U_{n_s,s})$ . Par conséquent

$$\dim U_{n_2+\dots+n_s} \geq \dim U_{n_2,2} + \dots + \dim U_{n_s,s} - (s-2) \quad (3.2)$$

Supposons que  $A_2$  contienne au moins deux représentations irréductibles. On considère le sous module  $B \subset A_2$  tel que  $B \oplus [S_{n_2} \otimes U_{n_2,2}] = A_2$ . L'application linéaire restreinte  $B \otimes (A_3 \otimes \dots \otimes A_s) \rightarrow A_1^*$  n'est pas surjective car son image est contenue dans le sous-module  $W$  de  $A_1^*$  défini par  $W \oplus [S_{n_2+\dots+n_s} \otimes U_{n_2+\dots+n_s}] = A_1^*$ .

Partant d'une égalité de dimension

$$\dim_{\mathbb{C}}(A_1) = \dim_{\mathbb{C}}(A_3) + \dots + \dim_{\mathbb{C}}(A_s) + \dim_{\mathbb{C}}(A_2) - (s-2)$$

nous obtenons, après avoir plus "enlevé" au terme de gauche qu'à celui de droite :

$$\dim_{\mathbb{C}}(W) < \dim_{\mathbb{C}}(A_3) + \dots + \dim_{\mathbb{C}}(A_s) + \dim_{\mathbb{C}}(B) - (s-2)$$

On en déduit qu'il existe des vecteurs non nuls  $a_3 \otimes \dots \otimes a_s \in A_3 \otimes \dots \otimes A_s$  et  $b \in B$  tels que  $\phi(a_3 \otimes \dots \otimes a_s \otimes b) = 0$ . Mais ceci contredit l'hypothèse  $Det(\phi) \neq 0$ .

Donc chaque module  $A_k$ , pour  $k = 2, \dots, s$ , ne contient qu'une seule représentation irréductible,  $A_k = S_{n_k} \otimes U_k$  (où  $U_k = U_{n_k,k}$ ). On pose

## HYPERDÉTERMINANT D'UN $SL_2$ -HOMOMORPHISME

$m_k = \dim_{\mathbb{C}} U_k$  et  $m = \dim_{\mathbb{C}} U_{n_2 + \dots + n_s}$ . L'égalité des dimensions, rappelée ci-dessus, donne :

$$\dim_{\mathbb{C}} A_1 = (n_2 + 1)m_2 + \dots + (n_s + 1)m_s - (s - 2)$$

L'inclusion (3.1) ainsi que l'inégalité (3.2) montrent par ailleurs que  $\dim_{\mathbb{C}} A_1 \geq m(n_2 + \dots + n_s + 1) \geq (m_2 + \dots + m_s - (s - 2))(n_2 + \dots + n_s + 1)$

On obtient, après simplification, l'inégalité

$$\sum_{i=2, \dots, s} [m_i \cdot (\sum_{j=2, \dots, s; j \neq i} n_j)] - (s - 2) (\sum_{j=2, \dots, s} n_j) \leq 0$$

qui n'est réalisée que si  $m_2 = \dots = m_s = 1$ . On a alors aussi  $m = 1$  et  $A_k = S_{n_k}$  pour tout  $k = 1, \dots, n$ .  $\square$

### 4. Applications aux fibrés vectoriels

Soient  $A_1, \dots, A_s$  des espaces vectoriels complexes et  $\phi : A_2 \otimes \dots \otimes A_s \rightarrow A_1^*$  une application linéaire surjective. On considère le faisceau  $S_\phi$  sur  $\mathbb{P}^{n_2} \times \dots \times \mathbb{P}^{n_s}$  défini par

$$0 \longrightarrow S_\phi \longrightarrow A_1 \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n_2} \times \dots \times \mathbb{P}^{n_s}} \xrightarrow{t_\phi} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n_2} \times \dots \times \mathbb{P}^{n_s}}(1, \dots, 1)$$

*Remarque 4.1.*  $\text{Det}(\phi) \neq 0$  si et seulement si l'homomorphisme de fibrés vectoriels

$$A_1 \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n_2} \times \dots \times \mathbb{P}^{n_s}} \xrightarrow{t_\phi} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n_2} \times \dots \times \mathbb{P}^{n_s}}(1, \dots, 1)$$

est surjectif, i.e  $S_\phi$  est un fibré vectoriel ([0], thm3.1 chap 14, ou [0] première page). Ce dernier donne alors par projection des fibrés de Steiner "associés" sur les produits (et donc sur les Segre)  $\mathbb{P}^{n_2} \times \dots \times \widehat{\mathbb{P}^{n_i}} \times \dots \times \mathbb{P}^{n_s}$  (voir [0], prop. 3.20).

**Corollaire 4.2.** *Un fibré de Steiner de rang  $n_3 + \dots + n_s$  (avec  $s \geq 3$ ) sur le Segre  $\mathbb{P}^{n_3} \times \dots \times \mathbb{P}^{n_s}$  qui est  $SL_2(\mathbb{C})$  invariant est un fibré de Schwarzenberger.*

*Démonstration.* Soient  $A_1, \dots, A_s$  des espaces vectoriels complexes de dimensions respectives  $n_1 + 1 \geq \dots \geq n_s + 1$  et  $\phi \in A_1 \otimes \dots \otimes A_s$  avec  $n_1 = n_2 + \dots + n_s$ . Soit  $S$  un fibré de Steiner de rang  $n_3 + \dots + n_s$  sur le Segre  $\mathbb{P}^{n_3} \times \dots \times \mathbb{P}^{n_s}$ . Il apparaît dans une suite exacte

$$0 \longrightarrow S \longrightarrow A_1 \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n_3} \times \dots \times \mathbb{P}^{n_s}} \longrightarrow A_2^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n_3} \times \dots \times \mathbb{P}^{n_s}}(1, \dots, 1) \longrightarrow 0$$

JEAN VALLÈS

L'action de  $SL_2(\mathbb{C})$  sur  $S$  induit une action sur la base  $\mathbb{P}^{n_3} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_s}$  et fait de  $A_1$  et  $A_2$  des  $SL_2(\mathbb{C})$ -modules puisque  $A_2^* = H^1S(-1)$  et  $A_1^* = H^0(S^*)$ . Lorsque  $S$  est  $SL_2(\mathbb{C})$ -invariant l'application multilinéaire

$$A_3 \otimes \cdots \otimes A_s \otimes (H^1S(-1))^* \rightarrow H^0(S^*)$$

est aussi  $SL_2(\mathbb{C})$ -invariante. D'après le théorème cette application est la multiplication

$$S_{n_2} \otimes \cdots \otimes S_{n_s} \rightarrow S_{n_1}$$

qui induit un fibré que l'on appelle fibré de Schwarzenberger comme dans [0], [0] et bien sûr [0].  $\square$

V. Ancona, G. Ottaviani. *Unstable hyperplanes for Steiner bundles and multidimensional matrices*, Advances in Geometry, 1, No.2, (2001), 165-192.

A. Cayley, *On the theory of linear transformations*, Cambridge Math. J. (1845), no. 4, 193–209,

C. Dionisi, *Stabilizers for nondegenerate matrices of boundary format and Steiner bundles*, Rev.Mat.Complut. 17 (2004) 459-469.

I. Dolgachev, M. M. Kapranov *Arrangement of hyperplanes and vector bundles on  $\mathbb{P}^n$* , Duke Math. J. (1993), no. 71, 633–664.

I. M. Gelfand, M. M. Kapranov, and A. V. Zelevinsky, *Discriminants, resultants, and multidimensional determinants*. Mathematics : Theory & Applications. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, (1994).

Schwarzenberger, R.L.E., *Vector bundles on the projective plane*, Proc. London Math. Soc. **11**, (1961), 623-640.

JEAN VALLÈS  
Laboratoire de Mathématiques  
Pures et Appliquées  
Université de Pau et des Pays de l'Adour  
64000 PAU  
FRANCE  
jean.valles@univ-pau.fr