



HAL
open science

Unexpected complex of jumping lines

Jean Vallès

► **To cite this version:**

Jean Vallès. Unexpected complex of jumping lines. Comptes Rendus. Mathématique, 1995, 321, pp.87 - 90. hal-01990985

HAL Id: hal-01990985

<https://hal.science/hal-01990985>

Submitted on 19 Apr 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Géométrie algébrique/Algebraic Geometry

Complexes inattendus de droites de saut

Jean VALLÈS

Résumé – Un plan H est instable pour le fibré vectoriel E si le fibré restreint E_H est instable. Nous montrons que si un fibré stable de rang 2 sur \mathbf{P}_3 a une courbe de plans instables, cette courbe est une droite. Nous caractérisons ensuite les fibrés ayant une droite de plans instables.

Unexpected complex of jumping lines

Abstract – A plane H is unstable for the vector bundle E if the restricted bundle E_H is unstable. We show that, if a rank 2 stable vector bundle on \mathbf{P}_3 has a curve of unstable planes, this curve is a line. Next we characterize vector bundles with a line of unstable planes.

1. INTRODUCTION. – Soit E un fibré stable de rang 2 sur \mathbf{P}_3 de première classe de Chern $c_1 \leq -3$. Les droites L telles que $H^0(E_L) \neq 0$ forment un sous-schéma de la grassmannienne des droites de \mathbf{P}_3 dont la codimension attendue est au moins 2 (cf. [5]). Pourtant on connaît de nombreux exemples de fibrés pour lesquels ce sous-schéma est de dimension 3, i.e. est un « complexe » (voir [2]).

Dans [4] Gruson et Peskine annoncent le résultat suivant :

LEMME B.5. – Soit E un fibré de rang 2 sur \mathbf{P}_3 tel que $c_1(E) \leq -3$ et $H^0(E) = 0$. Si K est un complexe réduit irréductible de droites tel que $H^0(E_L) \neq 0$ pour $L \in K$, il existe une courbe réduite irréductible Γ de \mathbf{P}_3 telle que les droites de K soient les droites rencontrant Γ . De plus il existe un entier $l \geq 1$ et une section s de $E(l)$ dont la variété des zéros contient le $(l-1)$ -ième voisinage infinitésimal de Γ .

Remarque. – Ce résultat est évident si le fibré E n'est pas stable.

Les auteurs me signalent que la preuve est incomplète. Plus précisément, la démonstration de l'irréductibilité géométrique de K au-dessus de \mathbf{P}_3 sur laquelle cette preuve repose, comporte une erreur.

Nous donnons ici une démonstration de cet énoncé dans le cas où le complexe K est formé des droites d'une famille de dimension 1 de plans. Cela peut paraître surprenant car une telle famille est géométriquement réductible (en effet les droites de K passant par un point général de \mathbf{P}_3 définissent une courbe non irréductible dans la grassmannienne) excepté dans le cas où elle est formée des plans contenant une droite. Nous montrons que c'est le seul cas possible :

THÉORÈME 1. – Soit E un fibré stable de rang 2 sur \mathbf{P}_3 . Si C est une courbe réduite irréductible de \mathbf{P}_3^\vee telle que E_H soit instable pour tout $H \in C$, alors C est une droite.

Remarque. – On déduit immédiatement de ce théorème que l'ensemble $W(E)$ des hyperplans H tels que E_H soit instable (c'est-à-dire non semi-stable) est de dimension au plus 1 dans \mathbf{P}_3^\vee (résultat déjà prouvé par Coanda [3]).

De plus, on a l'énoncé suivant, directement inspiré du lemme B.5 :

THÉORÈME 2. – Soient E un fibré stable de rang 2 sur \mathbf{P}_3 de première classe de Chern $c_1 = c_1(E)$, L une droite et n un entier ≥ 0 . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) $L^\vee \subset W(E)$ et $H^0(E_H(-n + [-c_1/2])) \neq 0$ pour H un point général de L^\vee .

Note présentée par Jean-Pierre SERRE.

(ii) Il existe $m > 0$ et une section non nulle $t \in H^0(E(m + [-c_1/2]))$ dont la variété des zéros contient le $(m + n - 1)$ -ième voisinage infinitésimal de L .

1.1. *Remarques préliminaires.* – Rappelons qu’un fibré E de rang 2 sur \mathbf{P}_3 est stable si et seulement si $H^0(E([-c_1/2])) = 0$, où $[\cdot]$ désigne la partie entière et c_1 la première classe de Chern de E .

Pour c_1 pair (resp. impair) on a $c_1(E([-c_1/2])) = 0$ (resp. $c_1(E([-c_1/2])) = -1$). On peut donc supposer dans la démonstration des théorèmes 1 et 2 que c_1 est 0 ou -1 .

2. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1. – La démonstration est divisée en deux étapes. On vérifie tout d’abord que C est plane. On démontre ensuite que c’est une droite en interprétant la singularité apparaissant au point correspondant au plan de \mathbf{P}_3^\vee contenant la courbe. On identifiera souvent un plan de \mathbf{P}_3 et le point de \mathbf{P}_3^\vee correspondant.

D’après le théorème de semi-continuité, la fonction $h^0(E_H(-k))$ est minimale sur un ouvert non vide U de C . Soit $n \geq 0$ tel que $h^0(E_H(-n)) = 1$ pour un point $H \in U$ [remarquons que $n \geq 1$ lorsque $c_1(E) = 0$].

La démonstration repose sur la remarque suivante que nous ne redémontrons pas :

Remarque 1. – Soient H un plan général de C et L une droite de H . Si s_H est une section non nulle de $h^0(E_H(-n))$ et $Z(s_H)$ le schéma des zéros de s_H , on a :

$$\deg(O_{L \cap Z(s_H)}) \geq r \iff H^0(E_L(-n - r)) \neq 0.$$

Étape 1. – On suppose d’abord que C n’est pas plane, i.e. que la famille de plans correspondant aux points de C ne possède pas de point fixe.

Soient H_1 et H_2 deux points généraux de U , s_{H_1} et s_{H_2} des sections non nulles de $H^0(E_{H_1}(-n))$ et $H^0(E_{H_2}(-n))$. Comme le plan H_1 ne rencontre pas le schéma des zéros de s_{H_2} , on a $h^0(E_{H_1 \cap H_2}(-n)) = 1$, d’après la remarque 1. Par conséquent il existe $\lambda \in \mathbf{C}^*$ tel que

$$(1) \quad s_{H_i}(x) = \lambda s_{H_j}(x) \quad \text{pour} \quad x \in H_i \cap H_j.$$

Soit $\mathbf{F} \subset \mathbf{P}_3 \times \mathbf{P}_3^\vee$ la variété d’incidence points-plans de \mathbf{P}_3 . Posons $X := \mathbf{F} \cap (\mathbf{P}_3 \times C)$ et considérons les projections : $X \xrightarrow{p} \mathbf{P}_3$ et $X \xrightarrow{q} C$. On a :

$$h^0(p^*E(-n)|_{q^{-1}(H)}) = h^0(E_H(-n)) = 1 \quad \text{pour tout } H \in U.$$

Le faisceau $q_*p^*E(-n)$ est inversible sur U . Le morphisme canonique $q^*q_*p^*E(-n) \rightarrow p^*E(-n)$ s’annule le long d’un sous-schéma fermé Z tel que $Z \cap q^{-1}(U)$ soit de codimension ≥ 2 . Il induit un morphisme ϕ rendant commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} q^{-1}(U) \setminus (Z \cap q^{-1}(U)) & \xrightarrow{\phi} & \mathbf{P}(E) \\ p \searrow & & \swarrow \pi \\ & \mathbf{P}_3 & \end{array}$$

où l’on a noté $\mathbf{P}(E)$ le fibré projectif sur \mathbf{P}_3 associé à E . L’image de ϕ est un ouvert dans un diviseur réduit irréductible D de $\mathbf{P}(E)$. Soit (H, x) un point de $q^{-1}(U)$. D’après (1), $\phi(H, x)$ ne dépend que de x . Le diviseur D est donc birationnel à \mathbf{P}_3 . Il correspond alors à une section $t \in H^0(E(m))$, avec $m > 0$ car E est stable. Cette section s’annule le long d’une courbe Γ de \mathbf{P}_3 .

Soit H un point général de U . Comme la famille des plans de U n’a pas de point fixe, H coupe proprement Γ . Les sections $s_H \in H^0(E_H(-n))$ et $t_H \in H^0(E_H(m))$ sont proportionnelles. La section s_H s’annule en codimension ≥ 2 car $H^0(E_H(-n-1)) = 0$. Il existe $f_H \in H^0(O_H(m+n))$ tel que $t_H = f_H s_H$. C’est une contradiction.

Étape 2. – Soit X le plan de \mathbf{P}_3^V contenant la courbe C , et soit $x \in \mathbf{P}_3$ le point correspondant à X . On considère l'éclatement $\tilde{\mathbf{P}}_3 = \text{Proj}_{\mathbf{P}_3} \left(\bigoplus_i \mathcal{M}_x^i \right)$ de \mathbf{P}_3 en x et les morphismes naturels $p : \tilde{\mathbf{P}}_3 \rightarrow \mathbf{P}_3$ et $q : \tilde{\mathbf{P}}_3 \rightarrow \mathbf{P}_2$. On note Δ le diviseur exceptionnel; le morphisme $q|_{\Delta} : \Delta \rightarrow \mathbf{P}_2$ est un isomorphisme. De plus si L est un point de \mathbf{P}_2 , donc une droite de \mathbf{P}_3 passant par x , on a :

$$(p^* E)|_{q^{-1}(L)} \simeq E_L.$$

Le morphisme q étant plat, le théorème de semi-continuité et la remarque 1 impliquent l'existence d'un entier $a \geq (n+1)$ tel que $h^0((p^* E)|_{q^{-1}(L)}(-a)) = h^0(E_L(-a)) = 1$ pour L général dans \mathbf{P}_2 . Le faisceau $q_* p^* E(-a)$ est inversible sur \mathbf{P}_2 . Soit k tel que $q_* p^* E(-a) = \mathcal{O}_{\mathbf{P}_2}(-k)$. On considère le morphisme canonique :

$$\tilde{s} : q^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}_2}(-k) = q^* q_* p^* E(-a) \rightarrow p^* E(-a).$$

La section correspondante \tilde{t} de $p^* E(-a) \otimes q^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}_2}(k)$ s'annule le long d'une courbe de $\tilde{\mathbf{P}}_3$. On remarque que $H^0(E(-a)) = 0$ implique $k > 0$.

Comme $p_* q^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}_2}(k) \simeq \mathcal{M}_x^k(k)$, l'image directe sur \mathbf{P}_3 de la section \tilde{t} est une section non nulle $t \in H^0(E(-a) \otimes \mathcal{M}_x^k(k))$, ce qui démontre $k > a$. Le lieu des zéros de la section t est une courbe Γ telle que $\mathcal{I}_{\Gamma} \subset \mathcal{M}_x^k$.

Soient H un point général de C , t_H la restriction de t au plan H et s_H une section non nulle de $E_H(-n)$. On considère l'homomorphisme de fibrés sur H suivant :

$$\mathcal{O}_H(n) \otimes \mathcal{O}_H(a-k) \xrightarrow{(s_H, t_H)} E_H.$$

Son déterminant est une section de $\mathcal{M}_{x,H}^k(c_1 + k - a - n)$. Comme $(c_1 + k - a - n) < k$, on a $H^0(\mathcal{M}_{x,H}^k(c_1 + k - a - n)) = 0$ donc $s_H \wedge t_H \equiv 0$.

Le lieu des zéros de la section s_H étant de codimension 2, il existe $f_H \in H^0(\mathcal{O}_H(k - a + n))$ tel que $t_H = f_H s_H$.

Ceci montre que la courbe du plan H d'équation $f_H = 0$ est contenue dans Γ . En conséquence tout plan de C contient une composante irréductible de Γ . Il existe donc une droite L passant par x telle que $C = L^V$.

3. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2. – (ii) \Rightarrow (i) : soit Γ le schéma des zéros de t . On note $t_H \in H^0(E_H(m))$ la restriction de t à un plan général H contenant L . Par hypothèse $\mathcal{I}_{\Gamma} \cdot \mathcal{O}_H \subset \mathcal{I}_{L,H}^{(m+n)} \simeq \mathcal{O}_H(-m-n)$. Soit f_H une section non nulle de $\mathcal{I}_{L,H}^{(m+n)}(m+n)$. Alors t_H/f_H est une section non nulle de $H^0(E_H(-n))$.

(i) \Rightarrow (ii) : on considère l'éclatement $\tilde{\mathbf{P}} = \text{Proj}_{\mathbf{P}_3} \left(\bigoplus_i \mathcal{I}_L^i \right)$ de \mathbf{P}_3 en L et les morphismes naturels $p : \tilde{\mathbf{P}} \rightarrow \mathbf{P}_3$ et $q : \tilde{\mathbf{P}} \rightarrow \mathbf{P}_1$. Par hypothèse, on a $q_* p^* E(-n) = \mathcal{O}_{\mathbf{P}_1}(-m-n)$ avec $m > 0$ car E est stable. Ceci prouve que

$$H^0(E(m) \otimes \mathcal{I}_L^{(m+n)}) \neq 0.$$

Je remercie Justin Coanda pour ses conseils et les nombreuses et utiles discussions que nous avons eues.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] W. BARTH, Some properties of stable rank-2 vector bundles on \mathbb{P}_n , *Math. Ann.*, 226, 1977, p. 125-150.
- [2] M. C. CHANG, A bound on the order of jumping lines, *Math. Ann.*, 262, 1983, p. 511-516.
- [3] I. COANDA, On Barth's restriction theorem, *J. reine angew. Math.*, 428, 1992, p. 97-110.
- [4] L. GRUSON et C. PESKINE, Spaces Curves: Complete series and speciality, *Lecture Notes in Math.*, 1266, 1985, p. 108-123.
- [5] L. GRUSON et C. PESKINE, Courbes de l'espace projectif, variétés de sécantes, *Enumerative geometry, Progress in Math.*, 24, 1982.

*Université de Paris-VI, Institut de Mathématiques,
aile 46-56, 5^e étage, 4, place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05.
e.mail: valles@ccr.jussieu.fr*