



**HAL**  
open science

## Le traitement public d'éléments privés du rapport des élèves aux objets de savoir mathématiques

Alain Mercier

► **To cite this version:**

Alain Mercier. Le traitement public d'éléments privés du rapport des élèves aux objets de savoir mathématiques. Gilbert Arsac; Denise Grenier; Andrée Tiberghien. Différentes formes du savoir, La Pensée Sauvage, 1995, Recherches en didactique des mathématiques. hal-01988748

**HAL Id: hal-01988748**

**<https://hal.science/hal-01988748>**

Submitted on 22 Jan 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**Le traitement public d'éléments privés du rapport  
des élèves aux objets de savoir mathématiques**

*Alain Mercier*

**G. Arzac., D. Grenier D. & A. Tiberghien (dir.) (1995),  
*Différentes formes du savoir. Grenoble, La Pensée Sauvage***

## **Le traitement public d'éléments privés du rapport des élèves aux objets de savoir mathématiques**

*Alain Mercier*  
IREM d'Aix-Marseille<sup>1</sup>

L'attention de l'enseignant de mathématiques se porte principalement sur les objets mathématiques sensibles, c'est-à-dire sur ceux qui sont, à un instant donné, les enjeux officiels de la relation didactique. Le rapport à un objet sensible  $\mathcal{S}$  qui est proposé aux élèves comporte une dimension publique qui sera sous le regard de l'enseignant. Mais nous avons pu montrer comment des rapports à de nombreux objets  $O_i$ , pertinents pour l'établissement du rapport à l'objet mathématique enseigné  $\mathcal{S}$ , doivent exister sous une forme idoine aux diverses fonctions des  $O_i$  ; nous avons montré (MERCIER, 1992) que ces rapports ne sont pas, en général, contrôlés par l'enseignant et même, qu'ils lui sont le plus souvent invisibles. Ces objets normalement invisibles au professeur sont parfois invisibles à l'élève lui-même. Cependant, l'élève doit entretenir des rapports personnels à un ensemble important d'objets  $O_i$ , rapports dont la dimension publique est en général inexistante.

Or il semble qu'un professeur qui enseigne à des élèves « faibles » changerait le partage entre les parts publique et privée du rapport des élèves aux objets  $O_i$  : ce professeur rendrait même sensibles certains rapports des élèves à des objets pertinents. Cette idée a été proposée par le Groupe de Recherche sur l'Enseignement Spécialisé de l'IREM d'Aix-Marseille (G.R.E.S., 1993), pour rendre compte d'une observation que nous présenterons dans la première partie de l'exposé. Les enseignants à qui l'on montre ce fait - normalement invisible, puisqu'apparemment le rapport institutionnel à  $\mathcal{S}$  n'a pas varié - en appellent aux propriétés spécifiques de leurs élèves, ce qui est une manière d'en reconnaître la prégnance. Selon leurs enseignants en effet, les élèves faibles ne retiendraient jamais rien ou presque des explications données parce qu'ils sont exclusivement centrés sur l'action qu'il leur faut réussir : au point de ne pas pouvoir utiliser les savoir-faire appris dans une situation nouvelle (PERRIN-GLORIAN, 1991).

---

<sup>1</sup> Le travail sur lequel cet article s'appuie a été mené dans le cadre du *Groupe de Recherche sur l'Enseignement Spécialisé* de l'IREM d'Aix-Marseille (GREM). Ce groupe réunit Claude CASTELLA, Jean COPPOLA, Jean GRAZIANI, Robert LEFEEZ et Alain MERCIER. Il a publié en 1993 un Rapport d'Activité sous le titre *Enquête sur l'enseignement spécialisé*. Les observations rapportées sur le cas de Mélanie et de nombreuses analyses de ce cas en sont issues.

Tout se passe donc comme si les enseignants des classes faibles tentaient de diriger l'action de leurs élèves en leur décrivant les gestes dont cette action se compose ; au détriment des mathématiques que le professeur présenterait dans un cours : les élèves seraient ainsi déchargés du contrôle de leur action à partir de son sens mathématique et n'auraient plus qu'à vérifier l'exécution des gestes partiels d'une liste.

Nous tenterons ici de suivre l'hypothèse initiale de travail du GRES, c'est-à-dire, de supposer qu'un phénomène observé dans l'Enseignement Spécialisé existe ordinairement dans l'enseignement, mais qu'il est ici grossi et rendu visible. L'Enseignement Spécialisé ne doit alors être considéré que comme un bon observatoire de certains phénomènes de l'enseignement ordinaire.

## **1 - Des observations qui font problème : Mélanie et les fractions**

### 1.1. La deuxième observation

C'est un débat entre enseignants de l'Enseignement Spécialisé, sur ce qu'ils font en classe :

*A : - MOI, JE SIMPLIFIE LES FRACTIONS COMME CELA :*

$$\frac{65}{91} = \frac{65 : 13}{91 : 13} = \frac{5}{7} \quad [\mathcal{D}]$$

*B et C : - NOUS AUSSI. ON EST POUSSÉ PAR LE SOUCI D'EFFICACITÉ ; NOS ÉLÈVES « MONTENT SUR LES TABLES », QUAND ÇA NE VA PAS. ALORS LA NOBLESSE MATHÉMATIQUE DU GESTE, ON S'EN MOQUE. DE PLUS, L'ÉCRITURE PAR DIVISION MONTRE BIEN COMMENT LE CALCUL MÈNE AU RÉSULTAT, C'EST PLUS EXPLICITE*

*QUE D'ÉCRIRE :* 
$$\frac{65}{91} = \frac{5 \bullet 13}{7 \bullet 13} = \frac{5}{7} \quad . \quad [\mathcal{F}]$$

### 1.2. La visibilité et l'efficacité des gestes mathématiques

Il faut que l'activité mathématique effectuée par l'élève puisse être pensée comme un travail, son travail. L'écriture « en division » (notée  $[\mathcal{D}]$ ) est de ce point de vue supérieure : le maître, en posant la division, ordonne de la faire ; l'élève, en posant la division, écrit l'opération qu'il fait.

Pourtant, cette visibilité du geste va à l'encontre de la visibilité des mathématiques qui rendent compte du geste. La description de l'action de l'élève ne donne pas à l'élève un meilleur contrôle de celle-ci, parce qu'elle montre seulement des gestes. La visibilité de la structure mathématique est supérieure dans la « décomposition en produit de facteurs » (notée  $[\mathcal{F}]$ ), qui montre le sens de l'action de l'élève, mais qui ne permet pas en revanche la description de cette action.  $[\mathcal{F}]$

cache à l'observateur les moments de l'action, mais le maître voit affichée « la compréhension mathématique » avec le résultat. Il faut que l'activité de l'élève puisse être pensée comme mathématique et pour cela, elle se montre telle. Le jeu de la sémiotique à l'instrumentalité des pratiques mathématiques écrites peut donc se déployer suivant deux lignes de force dont les logiques s'opposent : l'une pousse la situation du côté d'une situation de travail non didactique, l'autre du côté d'une situation didactique sans dimension adidactique<sup>2</sup>.

### 1.3. Le problème, pour l'élève

Pour l'élève pourtant, bien que la simplification des fractions soit de l'ordre du calcul (à effectuer), dans ce cas et souvent pour la première fois, l'indication du calcul à faire n'est pas donnée par le professeur. En ce sens, simplifier une fraction est un problème. Car il lui faut trouver les nombres sur lesquels opérer la simplification. A cet effet, il peut poser le problème et voir qu'il est résolu dès lors que les numérateur et dénominateur sont décomposés en produits c'est-à-dire, que l'on peut écrire  $\frac{65}{91} = \frac{5 \cdot 13}{7 \cdot 13} = \frac{5}{7}$ . Soit, il peut poser la résolution du problème et

écrire  $\frac{65}{91}$   
=

#### **Erreur !**

Pratiquement, il en va autrement puisque dans le cas de la deuxième modalité [D] il existe une stratégie par essais et erreurs, que nous noterons (S<sub>0</sub>). La résolution se donne sans que le problème ne soit posé, elle ne donne pas à écrire (un calcul, ou une exploration des propriétés des nombres, ou une connaissance de ceux-ci). Elle supporte (S<sub>0</sub>) : «  $\frac{65}{91} = \frac{65:2}{91:2}$ , or  $65 : 2 = 32,5$  ...non ! on obtient des nombres à virgule  $\frac{65}{91} = \frac{65:3}{91:3}$ , or  $65 : 3 = 21,66666$ . Non, les divisions ne tombent pas juste. » jusqu'à trouver deux résultats entiers à la fois  $65 : 5 = 13$  et  $91 : 5 = 18,2$ ... Mais  $65 : 13 = 5$  et  $91 : 13 = 7$  donc,  $\frac{65}{91} = \frac{5}{7}$ .

Il faut que ce travail puisse apparaître didactiquement profitable.

Or, l'élève doit dans tous les cas décider du calcul à réaliser. L'efficacité didactique de [D] n'est donc pas dans le fait que quelque chose de conceptuellement nouveau s'apprenne, mais *dans le fait que quelque chose de connu soit encore*

---

<sup>2</sup> Nous avons défendu l'idée qu'une dimension adidactique relative à l'objet O doit exister dans toute situation didactique où un apprentissage de O peut s'observer (MERCIER, 1992). En conséquence, certaines interventions du maître (comme sont les « effets de contrat » étudiés par BROUSSEAU (1979) et BROUSSEAU (1986)) peuvent aboutir à la disparition de la dimension adidactique relative à O en transformant le milieu de la situation (MERCIER, 1993).

*techniquement pertinent pour le traitement d'un problème nouveau.* Cette réassurance technique réduit rapidement l'incertitude mathématique et didactique créée par les fractions : on peut penser a priori « qu'il n'y a là que l'emploi répété de deux divisions conjointes, jusqu'au moment où le calcul tombe juste ». La décision à prendre repose sur le savoir ancien. Cela permet de montrer à l'élève qu'il a en mains les moyens de décider. Cela permet la réussite d'un élève qui n'entretient a priori aucun rapport avec le savoir que la situation appelle. Si nous pouvons identifier le savoir en jeu, nous pourrions penser que nous observons « le premier moment d'une situation adidactique », une situation adidactique d'action. Le contrôle sur l'exécution de la procédure est formel mais il peut appartenir à l'élève ou tout aussi bien, il peut se partager avec le professeur : c'est le cas avec les élèves faibles. Tout dépend donc de la suite : le savoir mathématique sera-t-il proposé comme un moyen de communiquer à propos de l'action menée, construit comme un moyen garanti de réussir d'un seul coup la simplification lorsqu'elle est possible et enfin, enseigné comme « ce qu'il fallait apprendre » ?

#### 1.4. L'observation originelle, Mélanie

Il est maintenant intéressant de regarder comment Mélanie, élève de Collège consultant dans un CMPP<sup>3</sup> pour des difficultés en mathématiques, commence à résoudre des exercices de ce type. C'est en effet à ce propos que le débat présenté plus haut s'est engagé. L'intervenant raconte.

Jérémiades habituelles :

*M élanie* : - C'EST LONG, C'EST DUR, JE COMPRENDS PAS...

*I intervenant* : - PRENONS LES QUESTIONS DANS L'ORDRE. QU'EST-CE QU'ON TE DEMANDE ?

Relecture de l'exercice n°5.

*M* -  $\frac{65}{91}$  EST IRRÉDUCTIBLE PARCE QUE 65 EST DIVISIBLE PAR 5 ET PAS 91.

*I* - TU PEUX AFFIRMER QUE 5 N'EST PAS UN DIVISEUR COMMUN AUX DEUX TERMES DE CETTE FRACTION MAIS CE N'EST PAS SUFFISANT POUR DIRE QU'ELLE EST IRRÉDUCTIBLE. ESSAIE DE TROUVER UN AUTRE DIVISEUR.

Soupirs, grimaces... elle sort sa calculette et après plusieurs essais qu'elle ne commente pas, m'annonce que 91 est divisible par 7. Elle remarque que le résultat de cette division est le même que celui qu'elle obtient en divisant 65 par 5 et en conclut que  $\frac{65}{91} = \frac{13}{13}$ .

Je lui fais remarquer qu'elle n'a pas divisé les deux termes de sa fraction par le même nombre, la renvoie à sa leçon (mauvaise humeur) et là elle trouve la solution. Soulagement !

*M* - "SI  $65=5 \times 13$  ET  $91 = 7 \times 13$ , C'EST PAR 13 QUE JE DOIS DIVISER LE HAUT ET LE BAS ET ÇA FAIT 5/7".

---

<sup>3</sup> Centre Médico-Psycho-Pédagogique. Les prises en charge des enfants consultants doivent comporter au moins deux des dimensions du Centre. L'épisode rapporté ici se place dans le cadre de la prise en charge pédagogique.

Partant de là, la suite de l'exercice ne lui pose apparemment aucun problème.

Pour le suivant elle utilisera sa découverte... avec le sourire.

*M - "49 EST DIVISIBLE PAR 7, ÇA FAIT 7 ET 14 EST DIVISIBLE PAR 2, ÇA FAIT 7 AUSSI JE DIVISE EN HAUT ET EN BAS PAR 7, ÇA FAIT 7/2".*

Un certain nombre de questions peuvent être posées :

L'action de l'élève produit-elle du savoir, ou une réponse ?

Qui garantit la réponse proposée par l'élève ?

Quel est le test d'arrêt de la recherche demandée à l'élève ?

L'évaluation de la réussite de l'action vient-elle de l'intervenant ?

Dans la modalité (D), le contrôle ne peut porter que sur l'exécution de l'action : d'où le renvoi de l'élève à une loi qu'il doit respecter à la lettre, tandis qu'une pratique algébrique repose sur les signes écrits :  $\frac{65}{91} = \frac{5 \cdot 13}{7 \cdot 13} = \frac{5}{7}$  .

$\frac{65}{91}$  étant donné et  $\begin{cases} 65=5 \cdot 13 \\ 91=7 \cdot 13 \end{cases}$  connus, l'écriture  $\frac{65:13}{91:13} = \frac{5}{7}$  fait sens, l'élève a

le contrôle de ce qu'il fait. Mais, dans le procédé de Mélanie, il existe une étape intériorisée qui n'est pas constituée des décompositions en produits de 65 et 91. Le contrôle de cette étape est nécessairement *a posteriori* : la réponse  $\frac{65}{91} = \frac{65:5}{91:7}$  est

fausse parce que  $\frac{65:5}{91:7} = \frac{13}{13} = 1 \neq \frac{65}{91}$  . Avec cette pratique l'enjeu mathématique de l'enseignement de la simplification des fractions s'est perdu. L'enjeu n'était pas de produire des élèves sachant simplifier, mais de montrer aux élèves l'emploi d'une propriété arithmétique ancienne et savante, dans une fonction noble : la décomposition des entiers en facteurs premiers sert à démontrer la simplification des fractions. En revanche, l'accent mis sur l'action produit une technique efficace qui montre peu de mathématiques, une technique de calcul. Tel est le sens qu'il faut donner à la réaction du professeur de Lycée qui s'était étonné de l'écriture de la simplification par division proposée finalement à Mélanie : les savoir-faire enseignés, emblèmes de la socialisation mathématique de l'élève, n'étaient pas pour lui des savoirs mathématiques de plein exercice. Ils caractérisaient à son avis un enseignement adressé à des élèves auxquels nul n'a plus la prétention de transmettre une « distinction » culturelle - au sens où l'on dit de quelqu'un qu'il est distingué, qu'il a du savoir-vivre (mathématique) : sont distingués ceux que Bourdieu et Passeron ont appelé « les héritiers » - parce que cette technique montrait trop évidemment son caractère d'objet utilitaire.

### 1.5. Une nouvelle question

Que sont censées apprendre à un élève les manipulations de savoirs mathématiques proposées dans ces types de dispositifs ?

Les savoirs mathématiques manipulés dans les dispositifs particuliers de

l'Education Spécialisée servent - entre autres - à passer de nouveau un contrat didactique normal, relativement aux techniques mathématiques. Quitte à ce que, pour pouvoir être des objet d'enseignement dans cette institution, ces savoirs soient transposés de telle manière que la visibilité des gestes de l'élève en sorte renforcée. Cela se paie parfois d'une perte de mathématicité de ces gestes. Nous ne pouvons en conclure trop vite que les élèves de l'Education Spécialisée n'avaient pas réussi à apprendre des « gestes de l'élève ». Nous savons cependant que la pratique de ces gestes mathématiques leur était devenue impossible ou trop coûteuse. Or, une pratique mathématique - moins technique que celle des élèves des classes scientifiques, mais proche de ce qui s'enseigne à la majorité des élèves - leur est souvent, après quelques années, devenue de nouveau envisageable.

Un moyen ordinaire de la renégociation d'un contrat didactique dans les classes d'élèves en difficulté est semble-t-il l'augmentation de la sémiotité des pratiques mathématiques proposées aux élèves. Ce moyen produit probablement une dé-mathématisation des pratiques, s'il en est en général comme nous l'avons observé dans le cas de la simplification des fractions.

Nous ferons l'hypothèse que ce moyen de négociation n'est pas particulier à l'Enseignement Spécialisé, mais au contraire, qu'il correspond à un phénomène général qui avait échappé à l'observation dans l'enseignement ordinaire. En remarquant que l'Enseignement Spécialisé assure une re-normalisation de la relation didactique, on trouve une réponse aux questions posées.

#### 1.6. L'observation de Mélanie revisitée

La normalisation doit s'observer jusque dans les micro épisodes d'une relation didactique « rééducative » et c'est bien le cas. Si l'on observe en effet comment Mélanie produit l'erreur  $\frac{65}{91} = \frac{13}{13}$ , on peut remarquer que l'épisode correspondant (donné § 1.4) est pour elle un épisode didactique heureux. Quelques précisions sur les conditions qui ont rendu cela possible doivent cependant être données. Mélanie n'apprend que grâce au fait qu'elle dispose d'une leçon de mathématiques où l'explication est exposée. Mais elle n'entreprend l'étude de la leçon que parce que l'intervenant choisit par méthode, de renvoyer les élèves à leur leçon plutôt que de leur demander l'action attendue en fournissant l'explication nécessaire.

L'épisode peut maintenant s'analyser selon le scénario suivant :

L'action  $S_0$ , par essais et erreurs, donne à Mélanie une information sur l'objet mathématique étudié, la fraction : « Soixante-cinq est divisible par cinq, le résultat est treize ; quatre-vingt-onze est divisible par sept, le résultat est encore treize. » L'exploitation de cette information donne les divisions à effectuer pour la simplification, c'est le contenu de la leçon : « Il faut diviser par le même diviseur » ; treize est ce diviseur commun et il faut diviser par treize. Le savoir ainsi utilisé se



montre dans une explication, Mélanie la fournit maintenant : on réalise la factorisation des numérateur et dénominateur de la fraction (ce que l'action proposée ne demandait pas !)

Cela a transformé en connaissance pertinente le produit de l'exploration du problème qu'a réalisé Mélanie et a donné le sens des écritures formelles comme  $65 = 5 \times 13$  et  $91 = 7 \times 13$ . Mélanie a ainsi appris ce qu'on avait renoncé à lui enseigner. *Il est donc possible que les pratiques enseignantes visant à assurer la visibilité de l'action de l'élève produisent une remédiation efficace du rapport personnel à certaines techniques mathématiques.*

Les observations de cet effet sont rares : nous devons maintenant garantir notre interprétation par une exploration plus systématique du phénomène, dans les classes de l'Enseignement Spécialisé comme dans les classes de l'enseignement ordinaire des Collèges. Les chercheurs qui ont abordé la question sont en effet unanimes à noter l'algorithmisation du savoir mathématique enseigné. Enseignants et enseignés coopèrent en ce sens, parce que la mise en œuvre des algorithmes libère chacun de sa responsabilité sur ce qu'il avance ou exige : BROUSSEAU (1980, pp. 216-280), ou MERCIER (1992, pp. 300-310) l'ont noté chacun à leur manière. Les enseignants se plaignent pourtant de l'algorithmisation et PERRIN-GLORIAN (1992, pp. 270-292) (1993, pp.12-13) note qu'ils attribuent leurs décisions en ce sens à la pression des élèves : « les élèves ne semblent pas acquérir un savoir réutilisable... ils ne peuvent pas réinvestir les acquis dans une autre situation, quelque temps plus tard. On a le sentiment de repartir toujours de zéro... Les informations qui ne rentrent pas dans la procédure toute prête déstabilisent l'élève et il commence à dire n'importe quoi ! » Alors, la technique qui peut se montrer reste seule enseignée. Alors, la progression par répétition des exercices semble viser l'apprentissage d'une action experte c'est-à-dire la disparition - chez les élèves - de la représentation de l'action. Comme la prononciation des syllabes devient muette dans l'acquisition de la lecture, la technique mathématique acquise devient muette : l'élève n'a bientôt plus qu'à écrire directement la réponse, ce que faisait Mélanie. Cette question a été étudiée par COPPÉ (1993), qui montre qu'alors, la pertinence de l'usage de l'algorithme devient le problème nouveau de l'élève (il relève de la dimension privée de son rapport personnel à la question posée). Ce dernier problème à son tour...

## **2 - Un phénomène didactique déjà connu ?**

### **2.1. Désignation et ostension, dans le travail mathématique**

L'observation du traitement ostensif des écritures algébriques est ancienne et a été attestée à de nombreuses reprises, nous n'y reviendrons pas. Le contrôle des écritures algébriques est souvent ostensif, parce que le sens du travail d'écriture ne peut être à tout moment mis en rapport avec le problème qui se traite par le moyen

du travail algébrique : « Cette quasi-nécessité d'un contrôle ostensif (de la fonction désignative des écritures) enchaîne le regard de l'élève à l'expression formelle des écritures sur lesquelles il doit calculer » (PASCAL, 1980, p. 102). Mais, faute de pouvoir en appeler à l'information désignative elle-même, l'élève en est réduit à traiter l'information ostensive. Dans ces conditions, les écritures dont l'élève s'occupe ne sont pas pour lui « un dispositif pour l'évocation de pratiques donnant un sens à l'activité mathématique » comment le rappellent LEMOYNE, CONNE & BRUN (1993, p. 346). Nous préférierions ne pas considérer les écritures mathématiques manipulées par les élèves comme les codages d'objets extérieurs aux graphismes qui les représenteraient mais comme des praxèmes<sup>4</sup>. L'idée de ces auteurs est cependant proche de la nôtre quand ils déclarent : « Le traitement de formes d'écritures littérales peut donner accès aux contenus de ces écritures s'il constitue le seul moyen de construire des solutions à des problèmes ». De même, lorsqu'ils concluent que cela suppose une connaissance assurée du numérique : le numérique doit faire l'objet de la pratique algébrique, afin que cette pratique soit une exploration des propriétés des opérations arithmétiques.

C'est cette connaissance préalable que Mélanie fabrique, par l'exploration systématique des diviseurs de 65 et 91 à l'aide de sa calculatrice. Mélanie fondera sa compréhension de la leçon sur les résultats de cette exploration. Elle trouve là un moyen de constituer un rapport personnel privé aux nombres 65 et 91, le numérateur et le dénominateur de la fraction qu'elle cherche à simplifier. Ainsi, lorsque Mélanie écrit l'action qu'elle mène, cette écriture lui permet de contrôler immédiatement ce qu'elle fait, en le disant.

Sur son rapport à des objets du domaine numérique, Mélanie fonde un rapport à la factorisation qui lui permet de montrer le rapport institutionnellement attendu et de résoudre adéquatement l'exercice.

Mais cet épisode suppose un lieu hors de la classe (la séance de travail au CMPP) où l'intervenant se refuse à faire de nouveau la leçon. Faute de cela, le rapport privé de Mélanie à la simplification des fractions serait sans doute resté longtemps vide, entièrement contenu dans une « règle d'action » publique qui peut se suffire à elle-même. Dans certaines conditions, le fait observé induit donc un rapport personnel de l'élève aux écritures mathématiques adéquat au rapport institutionnel ; c'est le cas pour Mélanie. Nous nous proposons maintenant d'aller à la recherche d'un fait général de l'enseignement des mathématiques. Nous distinguerons pour cela, dans un premier temps, « les manipulations ostensives d'écritures mathématiques » de « l'ostension des outils de désignation de l'activité

---

<sup>4</sup> Nous suivons ici l'expression de CHEVALLARD (1991, p. 114) « les écritures algébriques sont des praxèmes dont le sémiotisme permet que certains puissent fonctionner comme des emblèmes de l'objet ». Il n'oppose pas des dimensions du signe, mais deux fonctions des praxèmes mathématiques, traces graphiques d'une pratique qui organise la pensée.

de l'élève, demandée à l'élève lui-même ». C'est là une substitution d'objet mathématique souvent observée dans l'enseignement des classes considérées comme « faibles ». Dans un second temps, nous regarderons si la capacité de l'enseignement à produire un milieu favorable à certains apprentissages peut éventuellement se fonder sur une manipulation ostensive des écritures mathématiques.

## 2.2. De la description à l'ostension du travail de l'élève

Soit par exemple ce que ERMEL 'Apprentissages numériques au Cours Préparatoire' (1993, p. 128) appelle le calcul réfléchi : « Nous parlons de calcul réfléchi chaque fois que l'élève ne dispose pas d'une méthode « standard », d'un algorithme mémorisé pour effectuer son calcul. Par exemple, pour obtenir le résultat de  $8 + 7$ , tel élève va passer par  $7 + 7 + 1$ , tel autre par  $8 + 8 - 1$ , tel autre par  $8 + 2 + 5$ . C'est aussi le cas lorsque l'élève, avant tout apprentissage d'une technique de l'addition, doit se débrouiller pour calculer  $23 + 38$  avec ceci :



ERMEL décrit ainsi ce que fait l'élève au travail. Mais la description devient bientôt prescrite, c'est-à-dire, moyen d'obtenir l'action attendue. La description de l'action de l'élève remplace alors le travail de formulation des mathématiques à l'œuvre dans la résolution du problème. « L'arbre de calcul » est enseigné à la place d'une technique qui se fonderait sur la numération et qui assumerait l'invention d'un dispositif pour le calcul des additions, du type suivant par exemple :

$$\begin{array}{r}
 23 \\
 + 38 \\
 \hline
 \end{array}$$

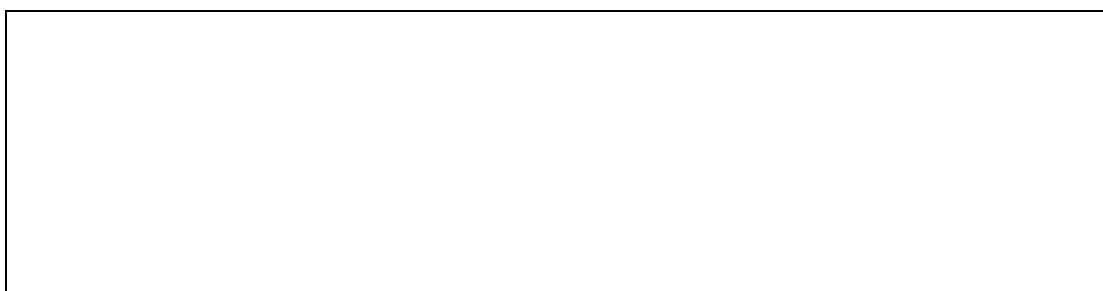
$2 + 3 = \dots 5$       dizaines  
 $3 + 8 = \dots 11$      unités  
 $\hline$   
 $61$

Ce serait là l'utilisation des mathématiques connues des élèves pour la justification d'un dispositif (par ailleurs, efficace). Ce serait plus intéressant que le travail technique où l'on apprend à ajouter ou retrancher des nombres inférieurs à 9 à des nombres entre 0 et 100, suivi d'un enseignement sur les additions de plusieurs nombres en colonnes comme on le voit dans L. & M. VASSORT, 'Le calcul vivant au Cours Élémentaire Première année' (1949, p. 61) sous le titre « faire le compte ».

Cependant, voici ce que l'on trouve dans EILLER 'Math et Calcul Cours Préparatoire, Livre du maître' (1984, p. 156) :

|   |
|---|
| <p><b>« 3. Situation et consignes</b><br/>Proposer l'écriture additive suivante : <math>1 + 3 + 1 + 2 + 2</math>.<br/>Demander aux enfants :<br/>— de la remplacer par une écriture dans laquelle ne figure pas le signe + ;<br/>— de bien montrer les calculs qu'ils ont fait.</p> |
| <p>Proposer plusieurs fois le même type d'activité.</p> <p><b>4. Exploitation collective</b><br/>Faire l'inventaire des réponses trouvées.<br/>Demander aux élèves d'expliquer comment ils ont procédé.<br/>Visualiser les différents calculs à l'aide d'arbres.<br/>exemples :</p> |
| <p>... »</p>  |

L'arbre est ici un objet intermédiaire, proposé pour décrire une action qui sera ensuite codée selon les normes actuelles du calcul algébrique, par des parenthèses agrégeantes. En revanche, l'évolution des pratiques d'enseignement se poursuit vers l'introduction des arbres comme objets pouvant aider à l'enseignement du calcul. BRÉGEON, FLOUZAT, DOSSAT ET VICENS 'Math en herbe, CE1' (1992, p. 21) proposent une technique de « réduction des écritures additives » qui est une naturalisation de tels arbres : de véritables *dessins d'arbres*, dont les branches portent les calculs ! Dorénavant les élèves devront calculer « en construisant un arbre » : le paragraphe « Je retiens bien » de la page 23 comporte deux notions. La première est que, dans un tableau, pour repérer une case ou un nœud, il faut deux informations. La seconde est que, pour réduire des écritures additives, on peut construire un arbre de calcul :



L'objet qui décrivait le rapport attendu d'un élève à un objet de savoir est devenu l'objet que l'élève doit lui-même fabriquer pour montrer le rapport attendu.

### 2.3. L'élève réduit à l'ostension de son rapport privé comme emblème de l'activité mathématique qu'il mène

L'Ecole élémentaire n'est pas le lieu exclusif de la création de substituts ostensifs d'objets mathématiques. De tels ersatz appartiennent à une « sous-culture scolaire » que le premier mathématicien ouvrant le cahier de l'un de ses enfants aura tôt fait de dénoncer. C'est une culture de l'action où la description de l'action prend la place de l'objet mathématique - qui donne un moyen de contrôle réfléchi. Ainsi en est-il, au Collège, du contrôle graphique du développement des produits de deux sommes, et des identités remarquables. Comme l'a montré TONNELLE (1979), dans cet ordre d'enseignement, le rapport à l'algébrique se réduit bien souvent à un rapport à des ostensifs non mathématiquement pertinents. Les conclusions de MATHERON (1994) sur l'usage du « théorème de Thalès » semblent aller dans ce même sens : démathématisation et sur-sémiotisation par réduction du théorème à une figure qui lui sert d'emblème. Ainsi en est-il encore du « tableau de distinction des cas », en classe de Seconde, pour les équations et inéquations comportant des valeurs absolues ; ou encore, de la « définition » actuelle de la valeur absolue d'un nombre comme « distance de deux points sur la droite réelle munie d'un repère » (MERCIER, 1992). La définition de la valeur absolue est elle-même la naturalisation d'un usage métaphorique de la notion mathématique de distance : CHEVALLARD ET JOHNSA (1982) ont montré la production de la métaphore, mais ils n'avaient pas imaginé son utilisation comme moyen de définir l'objet, qui s'est faite par un renversement du rapport scolaire dont ils avaient étudié la production.

L'objet privé qui montrait l'activité de pensée est devenu l'enjeu de l'activité publique, qui en a perdu son sens.

Le calcul avec l'arbre n'est pas une activité préparatoire à l'addition en colonnes ; dès qu'il est enseigné, naturalisé, l'arbre, qui désignait le calcul que la technique de l'addition en colonnes mettra en page, ne désigne plus que lui-même. Mais la simplification des fractions menée selon la modalité [F] semble elle-même ne pas échapper à la règle. Elle montre l'objet qui montrait l'activité de pensée : le produit de facteurs supposé désigner la propriété mathématique qui rend compte du calcul qui se mène. C'est bien ce qui s'observe lorsque l'élève rédige ainsi la réponse :

$$\frac{65}{91} = \frac{5 \cdot 13}{7 \cdot 13} = \frac{5 \cdot \cancel{13}}{7 \cdot \cancel{13}} = \frac{5}{7} .$$

Ici, l'élève a été invité à montrer la compréhension des propriétés mathématiques qu'il utilise, en montrant par contrat ce qu'une telle compréhension lui ferait écrire, pour lui-même. Pour agir correctement, l'élève n'a pas besoin d'avoir compris ces

propriétés, que son action désigne. Mais cette fois, la manipulation ostensive désigne des objets de savoir mathématiques et principalement, la décomposition d'un entier en facteurs premiers.

Cela produit un peu d'espace pour que vive malgré tout une injonction didactique relative à cet objet de savoir. Car l'ensemble de ces observations ne doit pas nous faire oublier que la dérive observée a une fonction essentielle : maintenir la convivialité didactique lorsqu'elle risque de se perdre, passer contrat dans les cas les plus difficiles. Mais, le prix didactique de ce type de dérive est-il en rapport avec les bénéfices qu'on en attend ? Des travaux récents montrent hélas comment cette « substitution didactique d'objet » renforce le rapport inadéquat des élèves en difficulté avec les mathématiques.

CHARLOT, BAUTIER & ROCHEX (1993) montrent que les élèves les plus démunis ne trouvent pas un sens endogène à l'activité scolaire. Ces élèves ignorent le sens des gestes d'étude tels que nous les avons observés dans le cas Mélanie. Par ces gestes qui font le quotidien scolaire, les élèves des banlieues pourraient assurer leur part de l'intention didactique : le plus souvent, ces gestes leur manquent.

LEROUXEL (1993) a montré combien est lente l'émergence des objets mathématiques, perdus dans l'apparat des rituels scolaires qui sont pourtant la condition incontournable de cette émergence.

Dans les classes de l'Enseignement Spécialisé, la nécessité d'un contrôle théorique de l'action didactique se montre mieux encore que dans le cas de l'enseignement ordinaire : le risque d'une dérive sans fin y est plus grand encore. Une telle dérive ferait bientôt perdre de vue les enjeux de l'enseignement des mathématiques ; il suffirait pour cela que l'usage technique de ces savoirs puisse se satisfaire d'un rapport personnel des élèves restreint à des objets qui ne désignent plus rien, que l'action menée. Fort heureusement, l'usage de savoirs mathématiques suppose qu'ils aient gardé une dimension instrumentale à l'extérieur de toute relation didactique. Les besoins scolaires et sociaux en manipulations d'objets mathématiques sont donc le dernier garde-fou objectif à une évolution de l'enseignement qui produirait des exercices formels dont l'efficacité se limiterait à obtenir des élèves une activité visible. Certains « exercices de rééducation cognitive » ne sont pas éloignés de ce point extrême. Il appartient aux observations sur le terrain de montrer comment il est possible de nourrir malgré tout quelque optimisme sur les effets d'un enseignement des mathématiques engagé sur le chemin de la « démathématisation » : le cas de Mélanie, qui apprend malgré tout des mathématiques, en témoigne.

#### 2.4. Ce que nous apprend une épreuve d'évaluation externe

L'épreuve a été proposée en mai 1993 par le *Groupe Evaluation Externe* de l'IREM

d'Aix-Marseille<sup>5</sup> à une vingtaine de classes de Troisième dont les enseignants s'étaient portés volontaires. Les questions posées sont relatives à certains des thèmes du cours et ne portent pas sur l'ensemble du programme. Ces questions sont issues d'un vaste corpus d'exercices constitué par les apports des enseignants : ils ont été posés en classe et sont considérés comme représentant bien les demandes institutionnelles sur les thèmes choisis. L'épreuve est assortie d'un barème de correction détaillé et la plupart des enseignants n'ont pas corrigé les copies de leurs élèves. L'épreuve a pour enjeu de permettre aux élèves d'assurer une meilleure objectivation de leur savoir.

On leur propose en effet, de s'affronter à des questions venues de l'extérieur de la classe et qui par conséquent ne sont pas soumises aux lois de la négociation du rapport institutionnel.

Pour la classe de Troisième, le calcul numérique portait sur les racines carrées et sur les fractions, le calcul algébrique sur les factorisations et sur les systèmes d'équations, la géométrie sur le théorème de Pythagore et sur la trigonométrie. Enfin, deux types de compétences étaient évaluées : la compréhension de situations décrites, séparée en technique numérique, raisonnement, prise en main du modèle et la prise de décisions en calcul algébrique et critique du modèle. Les classes les plus faibles (302, 313, 316, 319, 320), dont la moyenne à l'épreuve ne dépasse pas 5, ont un profil nettement distinct des classes fortes (306, 308, 311, 312, 315, 317) dont la médiane se situe clairement en dessus de 10.

Voici ce qu'il en est dans quatre classes caractéristiques dont les résultats s'opposent par paires :

Ce sont les questions du calcul algébrique qui distinguent radicalement les deux groupes de classes. Ce sont les questions du calcul des fractions qui les distinguent le moins. Certaines classes faibles réussissent en effet les exercices sur les fractions tout aussi bien que les meilleures classes.

---

<sup>5</sup> Des épreuves pour les classes de Quatrième, Troisième, Seconde et Première S ont été fabriquées selon le même processus par CASTELLA C., CIRADE G., REYMONET C., TONNELLE J. Ils ont animé pour les enseignants volontaires un groupe de travail sur les fonctions didactiques de l'évaluation, les divers types d'évaluation et l'intérêt de ce type particulier d'épreuve, aujourd'hui « institutionnellement manquante ». Le *Groupe Evaluation Externe* de l'IREM d'Aix-Marseille a publié deux rapports sur cette évaluation, en 1993 et en 1994.

Voici les exercices de calcul de fractions et les exercices de calcul d'irrationnels

proposés : « Démontrer que  $a = \frac{(2\sqrt{7}-3)(2\sqrt{7}+3)}{19}$ ,  $b = 88 \cdot (\frac{7}{11} - \frac{3}{4} + 10)$ ,  $c = \frac{7}{\frac{1}{1} + \frac{3}{4}}$   
 désignent chacun un nombre entier. Rechercher les entiers parmi les nombres  
 suivants :  $A = \frac{6\sqrt{2}+15}{3} - \sqrt{8} + 3$  ;  $B = (1 + 5\sqrt{2})^2 - 81$  ;  $C = \frac{\frac{3}{4}}{1 + \frac{1}{4}} + \frac{7}{5}$  ;

$$D = \frac{(3\sqrt{5}+2)(3\sqrt{5}-2)}{19}$$

Les questions b, c et B sont parfois mieux réussies par les élèves en difficulté que par les élèves des meilleures classes, tandis que le calcul algébrique crée des oppositions radicales entre classes faibles et classes de bons élèves. Nous pouvons supposer que cette meilleure réussite locale des classes faibles vient d'un double phénomène : d'abord, les enseignants des classes plus faibles insistent sur le calcul numérique, qui est considéré comme plus facile ; ensuite, ces enseignants agissent ainsi parce qu'il leur est plus facile dans ce domaine de jouer avec l'outil de contrôle de l'action qu'est la dimension sémiotique des calculs que les élèves réalisent. Même, ils vont pouvoir montrer aux élèves comment eux savent calculer sans peine : en jouant avec la sémiotité des écritures numériques (c'est ce que les meilleurs élèves apprendront ...et pourront reproduire, l'année suivante). Ainsi, on peut voir que  $b = 88(\frac{7}{11} - \frac{3}{4} + 10)$  est un entier, parce que le dénominateur commun dans la parenthèse est  $11 \square 4 =$

$4$ , qui se simplifie avec  $88$  soit,  $b = 2(28 - 33 + 440)$  ; on peut voir que  $c = \frac{7}{\frac{1}{1} + \frac{3}{4}}$  est un entier, parce que le  $7$  du numérateur se simplifie avec le numérateur  $4$  du dénominateur fractionnaire,  $12 + 4 - 9 = 7$  soit,  $c = 12$  ; on peut voir encore que  $C = \frac{\frac{3}{4}}{1 + \frac{1}{4}} + \frac{7}{5}$  est un entier, parce que les dénominateurs se simplifient dans le premier

rapport, qui devient le rapport des numérateurs,  $\frac{3}{5}$  soit, ajouté à  $\frac{7}{5}$ ,  $C = 2$ . Il ne s'agit pas ici de calcul mental, mais d'un travail de type rhétorique sur la dimension sémiotique de ces écritures. Seul l'enseignant de Troisième est en mesure de réaliser un tel travail, ce qui lui permet de disposer d'un outil de vérification rapide des résultats de l'activité des élèves.

Le problème est alors que les 60% à 70% de réussite à ces exercices qu'affichent également les classes fortes et faibles ne révèlent sans doute pas le même rapport aux objets mathématiques, parce que ce ne sont pas les mêmes objets qui s'y montrent. Dans les classes « fortes », les calculs menés sont des démonstrations fondées sur des propriétés mathématiques que les calculs montrent : ces démonstrations sont menées à l'image de celles que les professeurs réalisent.



Dans les classes « faibles », les calculs menés sont des travaux numériques à réaliser pour eux-mêmes : ces travaux sont menés à l'image du travail adulte, dont l'enjeu n'est pas didactique mais instrumental et bientôt, l'action experte ne se montrera même plus puisque les critères de réussite n'auront plus besoin d'être montrés.

Soient enfin deux classes « moyennes » relativement proches, comme celles dont les tableaux ci-dessous donnent les résultats. Leur différence de surface tient seulement aux quelques excellents élèves que compte la 309, mais la distinction se marque sur des thèmes précis : la géométrie, la trigonométrie, le raisonnement et la prise de décisions en calcul algébrique sont les éléments qui font la différence.

*C'est donc ici encore sur l'usage explicite d'outils mathématiques, qui se fait contre la simple production de résultats, que les meilleurs se distinguent.*

C'est probablement sur cet usage qu'ils seront repérés d'emblée, l'année suivante au Lycée, comme nous l'avons montré (MERCIER, 1992) dans le cas des classes de Première S : imaginons en effet que les « exercices de calcul » ne comportent alors plus aucune indication sur les techniques permettant de les résoudre ; imaginons par conséquent que la réussite dépende, pour les calculs aussi, des prises de décisions des élèves ; pour l'algèbre aussi des raisonnements des élèves et pour la géométrie, des théorèmes connus explicitement par les élèves (C'est le cas dans certaines Secondes et dans toutes les Premières S). Les élèves des classes fortes ont déjà appris le style du travail qui leur est demandé.

Les élèves « qui n'écrivent jamais rien de leurs calculs » et qui s'en justifient en affirmant que « en algèbre, il n'y a rien à savoir » vivent alors une rupture du contrat didactique qu'ils ne peuvent même pas identifier. La réussite instrumentale qu'on leur demande dorénavant est relative à l'emploi d'outils mathématiques qu'ils n'ont jamais éprouvé le besoin d'identifier. Cet emploi montre en effet et par là, démontre, des propriétés mathématiques.

*C'est pourquoi l'ostension doit toujours porter sur le savoir au travail, tout autre chose que ce sur quoi elle porte trop souvent, les gestes de l'élève au travail.*

Pour conclure sur ce point, il est intéressant de regarder ici comment la modalité [F] ne peut être énoncée sans avoir été écrite : «  $49 : 7 = 7$  donc  $49 = 7 \square 7$  ;

$14 : 2 = 7$  donc  $14 = 2 \times 7$  ; alors,  $\frac{49}{14} = \frac{7 \cdot 7}{2 \cdot 7} = \frac{7}{2}$  ».

Le contrôle d'une telle pratique est écrit, or la culture partagée socialement donne à croire que les mots prononcés contrôlent la pensée et que l'on pense *avant* d'écrire) : comme si l'on n'écrivait jamais que ce qu'on a d'abord imaginé dire.

Il y a en ce point un « obstacle culturel invisible » aux apprentissages attendus.

### **3 - La composante privée des rapports personnel d'un élève à des objets de savoir $O_i$ est un élément nécessaire à la réussite d'une injonction didactique relative à $S$**

#### 3.1. Injonction didactique et injonction instrumentale

Nous avons observé l'ostension de l'activité de l'élève dans le cas particulier de Mélanie puis, dans le cas d'enseignants de l'Enseignement Spécialisé. Cette ostension est le produit d'une « naturalisation<sup>6</sup> » de la dimension privée du rapport de l'élève au calcul de fractions plus simples.

*Il s'agit de faire entrer la description d'une dimension privée du rapport personnel dans le corps des objets institutionnels.*

Ce rapport se décrit : «  $\frac{65}{91} = \frac{65 : 13}{91 : 13} = \frac{5}{7}$  » ; Mélanie doit donc : « Ecrire la description de l'action que comporte le rapport attendu :  $\frac{65}{91} = \frac{65 : 13}{91 : 13} = \frac{5}{7}$  » ; le rapport que l'action nouvelle instaure n'est plus soumis qu'à une double injonction instrumentale : « écrire correctement, pour trouver la fraction simplifiée ». L'élève doit donc exécuter un travail puis répéter, toujours à l'identique, l'exécution réussie. Ainsi font les adultes dans le cadre d'un métier industriel dont les gestes sont parcellaires. Rapidement, ils acquièrent une technique du corps, par l'inscription corporelle des gestes qui forment le rapport répété à un monde composé d'objets toujours semblables. On peut alors observer, avec l'acquisition d'une expertise professionnelle, une réduction de l'action par la disparition des outils de contrôle qui en faisaient la dimension ostensive.

Cela s'observe aussi dans les classes de l'enseignement spécialisé : les élèves n'écrivent bientôt plus ce qui montrait « ce qu'il y a à faire », l'action se réduit donc et l'on peut voir écrit : «  $\frac{65}{91} = \frac{5}{7}$  ». Pour l'expert en simplification de fractions, ce résultat se suffit à soi-même et qui l'a trouvé a trouvé tout ce qu'il y avait à savoir

---

<sup>6</sup> Au sens moderne « empailler des animaux morts (dans des positions qui montrent une posture naturelle) pour les expositions d'histoire naturelle » tout autant qu'au sens le plus ancien « faire entrer (un mot latin) dans le corps de la langue usuelle en le francisant » (REY A., 1992, *Le Robert Historique*).

concernant cette opération mathématique.

Plus aucune injonction didactique - en principe, présente à l'origine de tout rapport à un objet mathématique, à l'école - ne peut porter sur un rapport ainsi naturalisé en « un instrument<sup>7</sup> » : c'est ce qui produit à terme l'échec d'un tel enseignement, constaté avec désespoir par les enseignants même qui ont participé à le produire : « On ne peut rien leur enseigner, seulement des savoir-faire pratiques et immédiatement visibles. Mais dès qu'on leur demande de réactiver ces savoir-faire dans une situation nouvelle, ils ne savent plus rien de ce qu'ils paraissaient savoir parfaitement. »

### 3.2. La dimension adidactique d'une situation didactique

Le cas de Mélanie et de la simplification des fractions montre que la composante privée du rapport personnel à un objet de savoir est liée à la situation adidactique relative à cet objet, enjeu de l'apprentissage.

Comme l'analyse nous l'a montré, Mélanie rencontre un épisode didactique tel, qu'elle apprend à simplifier les fractions (c'est ici le savoir  $S$ ). Mais les conditions favorables que cette élève a rencontrées sont exceptionnelles. Il a fallu en effet que Mélanie puisse travailler par essais et erreurs de manière à constituer un espace dans lequel  $65 = 5 \times 13$  et  $91 = 7 \times 13$  existent (ce sont certains des objets  $O_i$ ). Il a fallu ensuite que l'erreur de Mélanie ne soit pas l'occasion d'une explication de l'intervenant, mais que celui-ci renvoie l'élève à la leçon. Il a donc fallu qu'une leçon ait été professée et qu'elle contienne le théorème suivant : « Si le numérateur et le dénominateur d'une fraction peuvent s'écrire comme des produits de facteurs et si l'on a trouvé un facteur commun, alors la fraction peut se simplifier par ce facteur commun. »

Mélanie n'a encore appris qu'une technique de simplification et une manière de rendre compte de son action. Son compte-rendu n'est pas relié à une « théorie » de la décomposition des entiers naturels en produits de facteurs premiers. Quand bien même aurait-elle appris à simplifier les fractions, Mélanie en est à apprendre un savoir-faire arithmétique et non pas à utiliser une théorie des nombres entiers.

Mais elle peut maintenant, si un enseignant l'oriente dans cette voie, entrer en rapport avec le problème de la décomposition des entiers en produits de facteurs : c'est précisément le problème technique qu'elle rencontre chaque fois qu'elle doit déterminer une simplification. Or, ce que nous avons observé dans l'enseignement général comme dans l'enseignement spécialisé ne relevait pas même des conditions qui étaient offertes à Mélanie.

---

<sup>7</sup> Un *instrument*, c'est pour nous à la fois un dispositif adapté à la réalisation d'un effet donné, les gestes que ce dispositif appelle et leur inscription corporelle, au terme de laquelle ces gestes sont produits de manière experte (RABARDEL & VÉRILLON, 1985). Une *technique*, c'est l'association d'un dispositif et des gestes qu'il appelle.

Par exemple, la recherche par essais et erreurs ne peut être demandée que dans un nombre très limité d'exercices de simplification. L'existence d'un rapport de l'élève à un théorème présenté dans la leçon de mathématiques n'est souvent pas assurée. Les théorèmes ne se démontrent plus, leur énoncé ne s'apprend plus, leur organisation en un discours ne se montre plus dans l'enseignement français du travail algébrique observable au Collège et au Lycée, aujourd'hui (MERCIER, 1992).

Pour terminer, je voudrais donc montrer qu'une situation adidactique relative au problème de la simplification des fractions peut être analysée ici : son existence rend compte de l'apprentissage observé. Cette situation comporte une variable didactique - la nature des multiples figurant au numérateur et dénominateur de la fraction à simplifier - dont l'importance est essentielle. En effet, les élèves ont des connaissances sur la divisibilité par 2, 5, et 3. Ils savent éventuellement que la divisibilité par 4, 8, ou par un nombre pair suppose celle par 2 et que la divisibilité par 6, 9, ou un nombre de la table de 3 suppose encore la divisibilité par 3. Ils savent éventuellement reconnaître les premiers multiples de 11. Dans ces conditions seuls 7, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, sont des diviseurs problématiques qui ne soient pas trop grands. Les premiers entiers dont la décomposition en facteurs premiers pose vraiment problème sont ainsi 91 et 119. Les premiers couples d'entiers pouvant former une fraction dont la simplification pose un problème technique sont formés sur (7;13) avec répétition de 7 : ( $7\alpha$  ;  $13\beta$ ) ; ou répétition de 13 : ( $13\gamma$  ;  $13\delta$ ). Nous trouvons ainsi des rationnels candidats où figure naturellement 91. Si l'on cherche une fraction inférieure à 1, la liste des multiples de 7 ou de 13 inférieurs à 91 donne :  $\frac{14}{91}$ ,  $\frac{21}{91}$ ,  $\frac{26}{91}$  et  $\frac{28}{91}$ ,  $\frac{35}{91}$ ,  $\frac{39}{91}$ ,  $\frac{42}{91}$ ,  $\frac{52}{91}$ ,  $\frac{56}{91}$ ,  $\frac{63}{91}$ ,  $\frac{65}{91}$ ,  $\frac{77}{91}$ ,  $\frac{78}{91}$ ,  $\frac{84}{91}$ . Si on élimine les fractions de numérateur pair parce que la division par 2 ne pose pas de problème technique, il reste  $\frac{21}{91}$ ,  $\frac{35}{91}$ ,  $\frac{39}{91}$ ,  $\frac{63}{91}$ ,  $\frac{65}{91}$ ,  $\frac{77}{91}$ . Si enfin on élimine les fractions dont le numérateur figure dans les tables de multiplication, il ne reste que trois candidats  $\frac{39}{91}$ ,  $\frac{65}{91}$ ,  $\frac{77}{91}$ . Sauf à passer à  $\frac{91}{119}$  ou à  $\frac{91}{221}$ , pour se garantir d'un problème sans indices... Mais la recherche d'un diviseur de 119 par essais et erreurs, à la calculatrice, engage l'élève dans une série de sept divisions supplémentaires : un total de soixante-dix frappes d'une touche de la calculatrice ! On comprend que l'un des trois candidats de dénominateur 91 ait été choisi.  $\frac{39}{91}$  et  $\frac{65}{91}$  sont sans doute ceux dont le numérateur pose le plus fortement problème, parce que le facteur 13 ne va pas de soi. Tandis que 77, multiple de 11, se factorise sans faire problème.

Dans le cadre d'un problème, lorsque les variables ont les bonnes valeurs, l'élève peut rencontrer les objets du milieu d'une situation adidactique d'action. Cette situation peut produire le savoir attendu si les rapports de l'élève aux objets du milieu sont idoines, c'est-à-dire, si leur composante privée permet que les rapports attendus existent de manière transparente dans la situation adidactique. Mais le

premier rapport gardera les caractères essentiels venus des conditions dans lesquelles il a émergé : ici, pour Mélanie, une composante privée forte est construite sur une stratégie par essais et erreurs, et une composante publique lui est clairement associée.

#### 4. Conclusion

Je terminerai en proposant cinq thèses qui, chacune, mériteraient démonstration.

– *Le contrat didactique relatif à l'objet de savoir enseigné réalise, dans le cadre d'une situation adidactique, le partage institutionnel de l'intention d'enseigner cet objet.*

Le partage de l'intention d'enseigner entre professeur et élève est un moment essentiel de toute relation didactique, il permet à l'élève les gestes de l'étude qui assurent seuls l'émergence d'un rapport personnel doté d'une forte composante privée. Dans le cadre d'une situation adidactique, le rapport de l'élève aux objets du milieu de la situation définit la part que le professeur a donné en propre à l'élève.

– *Le partage de l'intention d'enseigner suppose une composante privée des rapports personnels de l'élève aux objets du milieu.*

Cela, que les premiers travaux du GRES ont commencé de montrer, est un phénomène essentiel dans toute relation didactique (GRES, 1992). Nous avons étudié dans un tout autre cadre comment un certain « sur-assujettissement » de Sabine pouvait lamener la composante privée de son rapport personnel à l'algébrique, puis, lui interdire de fait la construction d'un rapport personnel et bientôt, tout apprentissage (MERCIER, 1992).

– *En rendant publics des éléments privés de son rapport à certains objets de savoir, l'ostension du travail de l'élève le rend expert de la manipulation de ces objets.*

L'un des grands thèmes de l'enquête menée par BAUTIER, CHARLOT ET ROCHEX est celui des enjeux de savoir dont l'École est (ou n'est pas) porteuse. Pour de nombreux élèves des banlieues, les auteurs montrent en particulier que le rapport des élèves à l'école est construit sur le modèle du rapport de leurs parents au travail. On fait son travail pour qu'il soit fait. On peut même, souvent, le faire bien. Mais il est essentiel de montrer à ces élèves que l'enjeu de toute activité scolaire est didactique. Le travail n'est pas donné pour qu'il soit fait, mais pour qu'en cherchant à le faire, l'élève rencontre une occasion d'établir un rapport à un nouvel objet, ou un rapport nouveau à un objet ancien, ou encore, de nouvelles interrelations entre des objets précédemment connus. Ces rapports sont en grande partie du domaine privé et

l'élève qui se contenterait de la nouveauté officiellement présente n'apprendrait guère plus que le travailleur au quotidien : tout au plus peut-on dire qu'il gagnerait en expérience et c'est ce que les observateurs de l'enseignement des mathématiques aux élèves en difficulté observent unanimement. Cette « expérience professionnelle » des élèves n'est pas transférable, transmissible, objectivable sous la forme de rapports à des objets de savoir.

— *Les élèves qui apprennent beaucoup de savoirs mathématiques ne se pensent jamais experts : comme les producteurs et les utilisateurs de mathématiques, ils ont toujours à démontrer leur aptitude à la réussite instrumentale.*

C'est un corollaire de la proposition précédente que l'expérience nous donne pour vrai et qui, justement, doit encore être constitué en savoir didactique de plein exercice. L'idée qui permettrait la démonstration de cette proposition est celle-ci : c'est par la nécessité d'arriver à la réussite instrumentale de tâches mathématiques qui font, pour eux, a priori, problème, que mathématiciens et élèves rencontrent la nécessité de connaissances nouvelles. Ils peuvent alors assumer une injonction didactique relative à ces connaissances, parce qu'ils sont dans la situation de n'être pas experts de la tâche mathématique qui se propose à leur activité.

— *L'apprentissage en situation adidactique nécessite que dans « le milieu pour l'action » de cette situation, l'élève se sache expert.*

Cela sonne comme un paradoxe mais c'est ainsi que l'action dans une situation adidactique pourra faire de l'élève maître de son action qui prend place dans un cadre connu, un élève ignorant du savoir à apprendre et surtout, un élève qui rencontre une occasion d'apprendre.

## Références

- BROUSSEAU, G. (1979), 'L'échec et le contrat'. *Recherches 41*, Paris, 177-182.
- BROUSSEAU G. (1980), 'Sur l'échec électif en mathématiques'. *Bulletin de laryngologie*, 2-3.
- BROUSSEAU G. (1986), *La théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques*. Thèse, Université Bordeaux I, La.Di.S.T., 878p.
- CHARLOT B., BAUTHIER E. & ROCHEX J.Y. (1993), *Savoir et Ecole dans les banlieues et ailleurs*.
- CHEVALLARD Y. (1980), *La transposition didactique, du savoir savant au savoir enseigné*. Cours donné à la première école d'été de didactique des mathématiques. 1991, Grenoble, La Pensée Sauvage, 240 p.
- CHEVALLARD Y., JOHSUA M-A. (1982), Un exemple d'analyse de la transposition didactique : la notion de distance. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 3.2, Grenoble, La Pensée Sauvage, 157-239, (1991) in *La transposition didactique, du savoir savant au*

*savoir enseigné.*

- CHEVALLARD Y. (1991), 'Dimension instrumentale, dimension sémiotique de l'activité mathématique'. *Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique 1990-1991*, Grenoble, Université Joseph Fourier, 103-117.
- COPPÉ S. (1993),
- G.E.E. (1993 ET 1994), *Rapport de l'opération 'Evaluation Externe 1993.* et *Rapport de l'opération 'Evaluation Externe 1994.* IREM d'Aix-Marseille.
- G.R.E.S. (1993), Enquête sur l'enseignement des mathématiques en Education Spécialisée. *Rapport d'activité du GRES, 1992-1993*, IREM d'Aix-Marseille.
- LEMOYNE G., CONNE F., BRUN J. (1993), Du traitement des formes à celui des contenus d'écritures littérales : une perspective d'enseignement introductif de l'algèbre. *Recherches en didactique des mathématiques, 13.3*, Grenoble, La Pensée Sauvage, 333-383.
- LEROUXEL E. (1993), *Genèse du premier rapport aux mathématiques établi par des élèves du Cycle 2 de l'école primaire.* Mémoire de maîtrise des Sciences de l'Education, Aix en Provence, Université de Provence.
- MATHERON Y. (1994), Les répercussions des changements de programme entre 1964 et 1989 sur l'enseignement du théorème de Thalès. *Petit x, 34*, Grenoble, IREM, 59-87.
- MERCIER, A. (1992), *L'élève et les contraintes temporelles de l'enseignement, un cas en calcul algébrique.* Thèse d'Université, Université Bordeaux I.
- MERCIER, A. (1993) 'Sur le milieu des situations adidactiques'. Intervention, le 3 octobre 1993, *Actes du Séminaire National de Didactique des Mathématiques*, Commission Inter-IREM "Didactique".
- PASCAL D. (1980), *Le problème du zéro, l'économie de l'échec dans la classe et la production de l'erreur.* DEA, Universités de Bordeaux I et d'Aix-Marseille II.
- PERRIN-GLORIAN M.J. (1991), *Aires de surfaces planes et nombres décimaux, questions didactiques liées aux niveaux C.M.-6e.* Thèse de doctorat d'état, Université Paris 7.
- PERRIN-GLORIAN M.J. (1993), 'Contraintes de fonctionnement des enseignants au Collège : ce que nous apprend l'étude de « classes faibles »'. *Petit x, 35*, Grenoble, IREM, 5-40.
- RABARDEL P., VERILLON P. (1985), 'Relations aux objets et développement cognitif'. In Giordan A., Martinand J.L. (Eds.), *Actes des Septièmes Journées Internationales sur l'Education Scientifique*, Paris, LIRESP & Université Paris VII, 189-196.
- TONNELLE, J. (1979), *Le monde clos de la factorisation au premier cycle.* DEA, Universités d'Aix-Marseille II et de Bordeaux I.

## Bibliographie

- AMIRAULT C., CHERET M. (1978), *Monographies d'enfants en difficultés (Gaël et Patrick).* Mémoire pour l'obtention du Certificat de Capacité d'Orthophonie, Université de Bordeaux I et Centre de Phono-Audologie de l'Université de Bordeaux II, IREM de Bordeaux.
- ARTAUD M. (1993), *La mathématisation en économie comme problème didactique, une étude exploratoire.* Thèse de mathématiques et logique informatique, mention didactique,

Université Aix-Marseille II, 416p.

- BAUTIER E., ROBERT A. (1987), Apprendre des mathématiques et comment apprendre des mathématiques : premiers éléments pour une étude des représentations des élèves de l'enseignement post-obligatoire, de l'accès au savoir mathématique. *Cahier de didactique des mathématiques*, 41, Paris, IREM de Paris VII, 36p.
- BERDOT P., BLANCHARD-LAVILLE C., MERCIER A. (1988), 'Quelques éléments méthodologiques issus de l'analyse de suivis individuels d'élèves en échec en mathématiques'. *Didactique et acquisition des connaissances scientifiques*, (Actes du colloque de Sèvres, mai 1987), Vergnaud G. Brousseau G. Hulin M., GRECO Didactique et CNRS (eds), Grenoble, La Pensée Sauvage.
- BESSOT, A. & COMITI, C. (1985), 'Un élargissement du champ de fonctionnement de la numération : étude didactique du processus'. *Recherches en didactique des mathématiques*, 6.2/3, Grenoble, La Pensée Sauvage, 305-346.
- BOSCH i CASABÒ M. (1991), *El semiòtic i l'instrumental en el tractament clàssic de les situacions de proporcionalitat*. Treball de Recerca, Departament de matemàtiques, Universitat Autònoma de Barcelona, 138p.
- BROUSSEAU G. (1973), 'Peut-on améliorer le calcul des produits de nombres naturels ?' *Actes du Congrès International des Sciences de l'Éducation*, Paris, 10p, in *La théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques*. Thèse, Université Bordeaux I, La.Di.S.T.
- BROUSSEAU G., PÉRES J. (1981), 'Le cas de Gaël'. Note de travail, in *La théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques*. Thèse, Université Bordeaux I, La.Di.S.T.
- BROUSSEAU G. (1983), 'Étude de questions d'enseignement : la géométrie'. *Actes du séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique*, Grenoble, IMAG, in *La théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques*. Thèse, Université Bordeaux I, La.Di.S.T.
- BROUSSEAU, G. ET CENTENO, J. (1991), 'Rôle de la mémoire didactique de l'enseignant'. *Recherches en didactique des mathématiques*, 11.2/3, Grenoble, La Pensée Sauvage, 167-210.
- BRUN, J. & CONNE, F.: (1990), 'Analyses didactiques de protocoles d'observation du déroulement de situations'. *Éducation et recherche*, 3/90, 12<sup>e</sup> année, Fribourg, Editions Universitaires, 261-286.
- CASTELLA C., MERCIER A. (1991), *Sur le contrat didactique et la modélisation : l'expertise sous contrat des élèves de BEPA*. Rapport sur un Stage de formation des enseignants des lycées agricoles de la région Languedoc-Roussillon, année scolaire 1990-1991, IREM d'Aix-Marseille.
- CERQUETTI F. (1981), *Quelques aspects de la relation aux mathématiques chez des élèves de L.E.P. et de classes pratiques*. Thèse de troisième cycle de l'Université Paris VII.
- CHEVALLARD Y. (1992), 'Fundamental concepts in didactics : perspectives provided by an anthropological approach'. (Cours), in Douady, R. Mercier, A.: *Research in Didactique of Mathematics, selected papers*, published with the participation of ADIREM, Grenoble, La Pensée Sauvage, 131-167.
- COBB, P. (1989), 'Experiential, Cognitive, and Anthropological Perspectives in Mathematics Education'. *For the Learning of Mathematics* 9.2, juin 1989, Montreal, Quebec, Canada, FLM publishing Association, 32-42.
- DOUGLAS, M. (1989), 'Ainsi pensent les institutions'. Usher, Paris, (traduit de l'anglais), 1986, *How institutions think*, Syracuse University Press, Syracuse, New York, 130 p.



- FLECK, L. (1979), edited by Thaddeus J. Trenn and Robert K. Merton, Foreword by Thomas S. Kuhn, 'Genesis and Development of a Scientific Fact'. The University of Chicago Press, Chicago and London, (traduit de l'allemand) 1935, *Entstehung und Entwicklung einer wissenschaftlichen Tatsache: Einführung in die Lehre vom Denkstil und Denkkollektiv*, Basel, Benno Schwabe & Co.
- MAUSS M. (1966), *Anthropologie et sociologie* (chapitre 7). Paris, Presses Universitaires de France.
- MERCIER, A. (1986), 'Un point de vue introductif à la didactique des mathématiques : du côté du savoir'. (Cours), *IVe Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques, recueil des textes et comptes rendus*, IREM Paris VII, Paris, (réédition) 1992, *Interactions didactiques*, 13, Universités de Genève et Neuchâtel, 68p.
- MORA M. (1979), *Monographies d'enfants en difficultés (Nathalie et Jérôme)*. Mémoire pour l'obtention du Certificat de Capacité d'Orthophonie, Université de Bordeaux I et Centre de Phono-Audologie de l'Université de Bordeaux II, IREM de Bordeaux.
- ROBERT A., ROGALSKI J., SAMURÇAY R., (1987), Enseigner des méthodes. *Cahier de didactique des mathématiques*, 38, Paris, IREM de Paris VII.
- ROUCHIER, A. (1991), *Etude de la conceptualisation dans le système didactique en mathématiques et informatique élémentaires : proportionnalité, structures itérato-récurrentes, institutionnalisation*. Thèse, Université d'Orléans.
- SCHUBAUER-LEONI, M-L. (1987), 'Le contrat didactique : un cadre interprétatif pour comprendre les savoirs manifestés par les élèves en mathématiques'. *Psychologie et didactique des mathématiques*, Genève, Journal Européen de Psychologie de l'Education.
- SEGER, F.: (1991), 'Interaction and knowledge in mathematics education'. *Recherches en didactique des mathématiques*, 11.2-3, Grenoble, La Pensée Sauvage, 125-166.
- SEVAUX P. (1983), *A propos d'un soutien d'enfant en mathématiques, échec électif ou dyscalculie ?* Mémoire pour l'obtention du Certificat de Capacité d'Orthophonie, Université de Bordeaux I et Centre de Phono-Audologie de l'Université de Bordeaux II, IREM de Bordeaux.
- STEFFE, L.P. & VON GLASERSFELD, E. (1985), 'Helping children to conceive of number'. paper presented at ICME V, *Recherches en didactique des mathématiques*, 2.3, Grenoble, La Pensée Sauvage, 269-304.
- STEINBRING, H. (1991), 'Mathematics in teaching processes - the disparity between teacher and student knowledge'. *Recherches en didactique des mathématiques*, 11.1, Grenoble, La Pensée Sauvage, 65-107.
- VERGNAUD G. (1972), 'Calcul relationnel et représentation calculable'. *Bulletin de Psychologie*, 378-387.
- VERGNAUD G. (1977), 'Activité et connaissance opératoire'. *Bulletin de l'A.P.M.*, 307.2, 52-65.
- VERGNAUD G. (1990), 'Développement et fonctionnement cognitifs dans le champ conceptuel des structures additives'. *Développement et fonctionnement cognitifs chez l'enfant, des modèles généraux aux modèles locaux*, (sous la direction de Netchine-Grynberg G.), Paris, Presses Universitaires de France.