



**HAL**  
open science

# Flambage et bifurcation des systèmes élastiques avec contact unilatéral parfait

Xavier Chateau, Quoc Son Nguyen

► **To cite this version:**

Xavier Chateau, Quoc Son Nguyen. Flambage et bifurcation des systèmes élastiques avec contact unilatéral parfait. Comptes Rendus Mécanique, 1989. hal-01983121

**HAL Id: hal-01983121**

**<https://hal.science/hal-01983121v1>**

Submitted on 17 Jan 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## Flambage par bifurcation des systèmes élastiques avec contact unilatéral parfait

Xavier CHATEAU et QUOC SON NGUYEN

*Résumé* — Le flambage par bifurcation des systèmes élastiques avec contact unilatéral sans frottement est étudié à l'aide de la méthode de développement asymptotique. L'analyse de bifurcation et de post bifurcation est discutée.

### Buckling by bifurcation of elastic systems under unilateral constraints without friction

*Abstract* — Buckling by bifurcation of elastic systems under unilateral constraints without friction is studied by the method of asymptotic development. Bifurcation and post-bifurcation analysis are discussed.

*Abridged English Version* — It is well known that most elastic structures under perfect unilateral constraints do not buckle by bifurcation ([1], [2]). However the possibility of buckling by bifurcation must not be excluded and in this case the buckling analysis of such a structure may present some intermediate feature between elastic buckling and plastic buckling ([3], [4]). In order to understand the intervention of unilateral constraints on the modification of bifurcation diagrams, the asymptotic method is presented here by the formulation of the first order and the second order problems.

— Equation (3) expresses the mechanical equilibrium of an elastic system, which, in the reference configuration, has volume  $\Omega$ , with boundary  $\partial\Omega$ .  $\lambda T$  denotes conservative loadings on  $\Omega$ ,  $\partial\Omega_0$  a part of  $\partial\Omega$  where the displacements are given equal to zero,  $\partial\Omega_c$  the complementary boundary where material may be in unilateral contact with a rigid support with equation  $g(x)=0$ ,  $u(a)$  the displacement of a point  $a$  in Lagrangian description.

— When displacement  $u$  and reaction modulus  $\mu$  are known, after solving equation (3), we obtain the first order problem—equation (7)—and the second order problem—equation (9)—by the method of asymptotic development.

— The first order problem provides, by Hill's method, the two criteria of non-bifurcation and stability. If  $I$  is the quadratic form (8), we have the criteria of stability—The actual equilibrium is stable if the quadratic form  $I(\delta u)$  is strictly positive definite upon the admissible velocities set—and no-bifurcation—An equilibrium curve does not bifurcate on a point  $(u, \mu)$  where the quadratic form  $I(\delta u)$  is strictly definite positive upon  $U_0$ —. The critical load and the bifurcation mode can be thus obtained.

— The second order problem gives us, for regular cases, further information to perform post-bifurcation analysis. Equations (9), (11) show that the second order problem can be expressed by the stationary of a quadratic functional under "constraints" where the quadratic form  $I(\delta u)$  always plays a fundamental role.

— In beam, plate and shell systems, the reaction modulus field  $\mu$  has two contributions as it is written in equation (12) where  $r_0$  is the distributed reaction and  $T_0$  the shear force on a curve  $\Gamma$  of the contact surface. The first order problem and the second order problem can again be derived with some minor modifications.

Note présentée par Paul GERMAIN.

0249-6305/89/03080573 \$2.00 © Académie des Sciences

— The behaviour of a continuous Shanley-Klarbring model [Fig. (a)] is discussed by asymptotic development in order to obtain the bifurcation diagram. Figure (b) shows that this diagram is of the elastic type. Here, there is no distinction between the critical load of bifurcation and the critical load of instability as in elastic buckling (although the point of bifurcation may be a stable equilibrium), as opposed to the principal results of plastic buckling. Bifurcation and stability criteria coincide almost everywhere, except at some isolated point of the fundamental path.

1. Il est bien connu que la plupart des structures élastiques soumises à des conditions de contact unilatéral avec ou sans frottement ne flambent pas par bifurcation. La présence des obstacles conduit souvent à des phénomènes de flambage dus à des sauts d'un chemin d'équilibres stables à un autre chemin d'équilibres voisin. Les études particulières dues à Do [1], Courbon [2] par exemple illustrent bien ce phénomène.

Cependant, le flambage par bifurcation de telles structures existe et présente des particularités intermédiaires entre le flambage élastique et le flambage plastique, à cause de la présence d'inégalités. Dans ce cas, la méthode de développement asymptotique, bien connue en flambage élastique ou en flambage plastique, peut être appliquée d'une manière similaire.

Soit une structure élastique, définie par une configuration de référence  $\Omega$ , de frontière  $\partial\Omega$ . Pour simplifier, cette structure est soumise à des forces conservatives  $\lambda T$  sur  $\Omega$  et astreinte à un déplacement nul sur une partie  $\partial\Omega_0$  de la frontière. Sur la frontière complémentaire  $\partial\Omega_c$ , la matière est susceptible d'être en contact unilatéral avec une surface rigide d'équation  $g(x)=0$ . Si  $u(a)$  désigne le déplacement d'un point matériel  $a$ , on a :

$$(1) \quad g(a+u(a, t)) \leq 0, \quad \forall a \in \partial\Omega_c.$$

La loi de contact sans frottement s'écrit :

$$(2) \quad \mu \geq 0, \quad \mu g = 0, \quad \forall a \in \partial\Omega_c$$

où  $-\mu \nabla g$  désigne la réaction nominale en un point de  $\partial\Omega_c$ .

La détermination du champ de déplacement à l'équilibre  $u$  et des modules de réactions  $\mu$  s'obtient par la résolution du problème d'équilibre statique suivant :

Trouver  $u, \mu$  tels que :

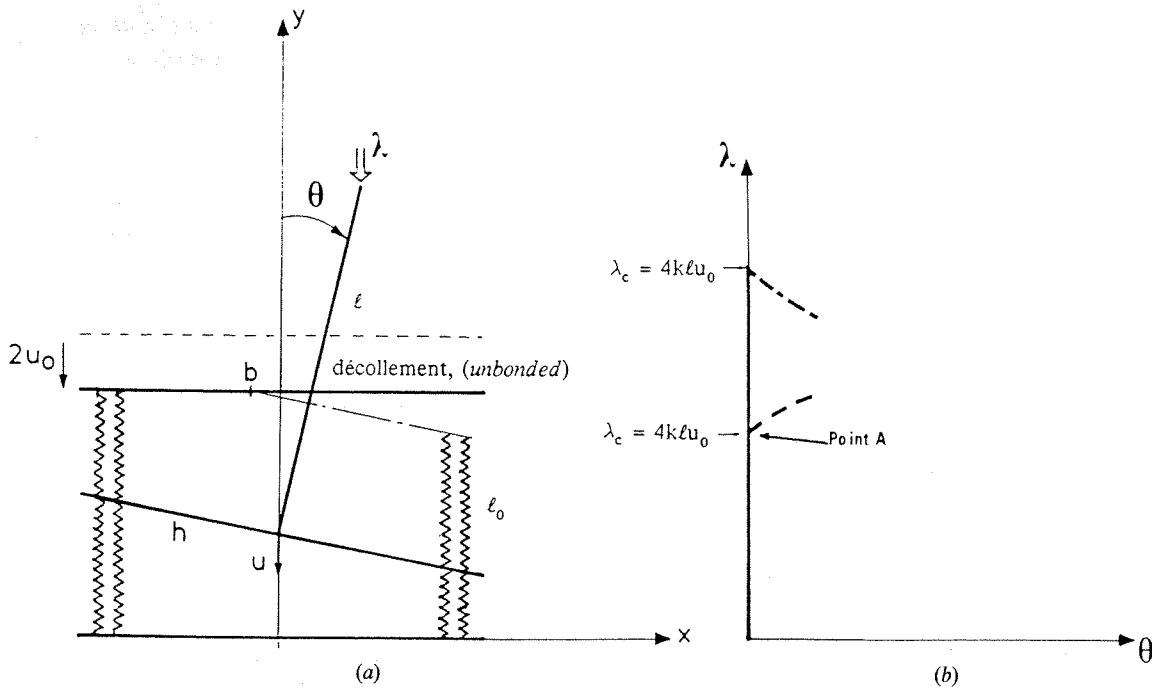
$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} u \in U_0 = \{ u \mid u = 0 \text{ sur } \partial\Omega_0 \} \\ \forall \delta u \in U_0 \int_{\Omega} \theta \nabla(\delta u) d\Omega - \lambda \int_{\Omega} T \delta u d\Omega + \int_{\partial\Omega_c} \mu \nabla g \delta u dS = 0 \\ \forall a \in \partial\Omega_c \mu(a) \geq 0, \quad g(a+u|_a) \leq 0, \quad \mu g = 0 \end{array} \right.$$

où  $\theta = \partial W / \partial \nabla u (\nabla u)$  désigne la contrainte de Boussinesq,  $W(\nabla u)$  la densité volumique d'énergie élastique.

Il est bien connu que les équations (3) traduisent la stationnarité de l'énergie potentielle totale sous la « contrainte » (1). Les modules de réaction  $\mu$  représentent les multiplicateurs de Lagrange associés.

2. Dans le cas discret ou discrétisé, les fonctions  $(u, \mu)$  sont dérivables par rapport au temps par morceaux. On obtient donc un développement asymptotique :

$$(4) \quad u = u + \dot{u}\tau + \ddot{u}\frac{\tau^2}{2} + \dots, \quad \mu = \mu + \dot{\mu}\tau + \ddot{\mu}\frac{\tau^2}{2} + \dots$$



Poutre de Shanley continue avec contact unilatéral.  
 A continuous Shanley model under unilateral constraints.

$$(38\sqrt{2}-51)h^2/12l < u_0 < h^2/3l \text{ ----}$$

$$h^2/6l < u_0 < (38\sqrt{2}-51)h^2/12l \text{ ---}$$

Le calcul des dérivées premières  $\dot{u}$ ,  $\dot{\mu}$  associées à une vitesse de données  $\dot{\lambda}$  lorsque l'état actuel  $u$ ,  $\mu$  est supposé connu, s'effectue de la manière suivante :

$$(5) \quad \forall \delta u \in U_0: \int_{\Omega} \theta \delta(\nabla u) d\Omega + \int_{S_c} \dot{\mu} \nabla g \delta u dS + \int_{S_c} \mu \nabla \nabla g \dot{u} \delta u dS - \dot{\lambda} \int_{\Omega} T \delta u d\Omega = 0$$

avec :

$$(6) \quad \theta = \frac{\partial^2 W(\nabla u)}{\partial (\nabla u)^2} \nabla \dot{u}$$

$$\forall a \in \partial\Omega_c \quad \begin{cases} \dot{\mu} g + \dot{g} \mu = 0 \\ \dot{g} \dot{u} + 2 \dot{g} + g \ddot{u} = 0 \\ \dots \end{cases}$$

Soit  $U_1$  l'ensemble des vitesses admissibles :

$$U_1 = \{ \dot{u} \mid \dot{u} = 0 \text{ sur } \partial\Omega_0, \dot{g} = \nabla g \dot{u} = 0 \text{ si } g = 0, \mu > 0, \dot{g} = \nabla g \dot{u} \leq 0 \text{ si } g = 0, \mu = 0 \}$$

Le problème d'ordre 1 s'écrit donc :

$$(7) \quad \begin{cases} \text{Trouver } \dot{u}, \dot{\mu} \text{ tels que :} \\ \dot{u} \in U_1 \text{ et (5) vérifiée } \forall \delta u \in U_0 \\ \dot{\mu} = 0 \quad \text{si } g < 0 \\ \dot{\mu} \geq 0 \text{ et } \dot{\mu} \dot{g} = 0 \quad \text{si } g = 0, \mu = 0 \end{cases}$$

On voit que les équations (7) traduisent la stationnarité d'une fonctionnelle quadratique sous les « contraintes »  $\dot{g} \leq 0$  si  $g = 0, \mu = 0$  et  $\dot{g} = 0$  si  $g = 0, \mu > 0$ . Les vitesses  $\dot{\mu}$  représentent les multiplicateurs de Lagrange associés.

La formulation du problème en vitesse permet de construire les critères de stabilité et de non-bifurcation par la méthode de Hill ([3], [4]). Si  $I$  désigne la forme quadratique :

$$(8) \quad I(\delta u) = \int_{\Omega} \nabla \delta u \frac{\partial^2 W}{\partial (\nabla u)^2} \nabla \delta u \, d\Omega + \int_{\partial\Omega_c} \mu \delta u \nabla^2 g \, \delta u \, dS$$

On obtient, comme en plasticité, les critères de stabilité — *L'équilibre actuel est stable si la forme quadratique  $I(\delta u)$  est strictement définie positive sur l'ensemble des vitesses admissibles* — et de Non-Bifurcation — *Un chemin d'équilibres ne bifurque pas en un point  $(u, \mu)$  où la forme quadratique  $I(\delta u)$  est strictement définie positive sur  $\bar{U}_1$ , espace vectoriel engendré par  $U_1$ .*

La détermination des dérivées secondes  $\ddot{u}$  et  $\ddot{g}$  associées à une accélération de charge  $\dot{\lambda}$  lorsque les problèmes d'ordre zéro (équilibre) et d'ordre un (vitesse) ont été résolus (*i. e.*  $u, \mu, \dot{u}, \dot{\mu}$  sont des quantités supposées connues) s'obtient en dérivant les équations précédentes. On obtient :

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall \delta u \in U_0 : \\ \int_{\Omega} \nabla \ddot{u} \frac{\partial^2 W}{\partial (\nabla u)^2} \nabla \delta u \, d\Omega + \int_{\Omega} (\Delta \dot{u})^2 \frac{\partial^3 W}{\partial (\nabla u)^2} \nabla \delta u \, d\Omega - \int_{\Omega} \dot{\lambda} T \, \delta u \, d\Omega \\ + \int_{\partial\Omega_c} (\dot{u} \nabla g + 2 \dot{\mu} \nabla^2 g \dot{u} + \mu \nabla^2 g \dot{u} \dot{u}) \delta u \, dS + \int_{\partial\Omega_c} \mu \nabla^2 g \dot{u} \delta u \, dS = 0 \end{array} \right.$$

et les conditions déduites de (6).

Soit  $U_2$  l'ensemble des accélérations admissibles :

$$(10) \quad U_2 = \{ \ddot{u} \mid \ddot{u} = 0 \text{ sur } \partial\Omega_0, \ddot{g} = 0 \text{ si } \mu > 0 \text{ ou si } g = 0, \dot{g} = 0, \dot{\mu} > 0 \\ \text{et } \ddot{g} \leq 0 \text{ si } g = 0, \mu = 0, \dot{g} = 0, \dot{\mu} = 0 \}.$$

Le problème d'ordre 2 s'écrit donc :

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \ddot{u} \text{ et } \ddot{\mu} \text{ tels que :} \\ \ddot{u} \in U_2 \text{ et (9) vérifiée } \forall \delta u \in U_0 \\ \ddot{\mu} = 0 \quad \text{si } g < 0 \text{ ou si } g = 0, \dot{g} < 0 \\ \ddot{\mu} \geq 0, \quad \ddot{\mu} \ddot{g} = 0 \quad \text{si } g = 0, \mu = 0, \dot{g} = 0, \dot{\mu} = 0 \end{array} \right.$$

De nouveau, il s'agit d'un problème de stationnarité d'une fonctionnelle quadratique sous les « contraintes »  $\ddot{g} \leq 0$  si  $g = 0, \mu = 0, \dot{\mu} = 0$  et  $\ddot{g} = 0$  si  $\mu > 0$  ou si  $g = 0, \dot{g} = 0, \dot{\mu} > 0$ .

Les dérivées  $\ddot{\mu}$  sont les multiplicateurs de Lagrange associés. La forme quadratique  $I(\delta u)$  joue toujours un rôle fondamental [3].

3. Le cas où l'obstacle est mobile  $g = g(x, \lambda)$  se traite suivant la même démarche.

Dans le cas continu tridimensionnel la formulation du problème en vitesses est toujours valable, mais la formulation du problème en accélération présente des difficultés liées à la régularité des fonctions  $\ddot{u}, \ddot{\mu}$  et à la propagation des discontinuités.

Les systèmes de poutres, plaques et coques élastiques constituent un cas particulier important. Le champ des efforts  $\mu$  se compose alors d'une réaction répartie  $r_0$  et des efforts tranchants  $T_0$  ayant pour support une courbe  $\Gamma$  de la surface de contact.

$$(12) \quad \mu = (r_0, T_0)$$

La résolution du problème (3) fournit  $(\mu, u)$  avec les conditions de régularité imposées et naturelles :

$$(13) \quad [g, n] = 0, \quad [g, nn] = 0$$

$n$  désigne le vecteur normal à  $\Gamma$  dans le plan tangent à la surface de contact. Ces conditions de régularité expriment que le contact est tangiel et à courbure normale continue à la traversée de  $\Gamma$ .

D'autre part, on obtient par dérivation par rapport au temps que le terme en  $\dot{\mu}$  de (5) s'écrit explicitement sous la forme :

$$(14) \quad \langle \dot{\mu} \nabla g, \delta u \rangle = \int_{S_c} r_1 \nabla g \delta u dS + \int_{\Gamma} T_1 \nabla g \delta u d\Gamma + \int_{\Gamma} T_0 c \nabla g_{,n} \delta u d\Gamma \\ + \int_{\Gamma} M_1 \nabla g \delta u_{,n} d\Gamma + \sum_{\Gamma_d} T_0 \nabla g \delta u c_t$$

avec :

$$r_1 = \dot{r}_0, \quad T_1 = [r_0] c \dot{T}_0 \frac{c}{R} n N + \dot{T}_0, \quad M_1 = T_0 c$$

où  $\Gamma_d$  désigne l'ensemble des points où  $\Gamma$  présente une discontinuité d'ordre 0 ou 1,  $c$  la vitesse de propagation normale de la courbe dans la direction  $n$ ,  $c_t$  la vitesse de propagation tangentielle d'un point de  $\Gamma_d$ ,  $N$  le second vecteur du trièdre de Frenet défini sur la courbe  $\Gamma$ ,  $R$  le rayon de courbure de  $\Gamma$ . Le calcul de  $\dot{\mu}$  fournit donc les vitesses  $\dot{r}_0$ ,  $\dot{T}_0$  et les vitesses de propagation  $c$  et  $c_t$ .

D'autre part, la continuité de  $g_{,n}$  à la traversée de  $\Gamma$  s'exprime par une relation de compatibilité d'Hadamard :

$$(15) \quad [g_{,n}] + c [g_{,nn}] = 0, \quad \forall a \in \Gamma$$

et impose une condition cinématique supplémentaire concernant la vitesse  $\dot{u}$  sur  $\Gamma$  :

$$(16) \quad \dot{g}_{,n} = 0, \quad \forall a \in \Gamma.$$

La quantité  $M_1$  représente alors le multiplicateur de Lagrange associé à (16).

4. A titre d'exemple, on étudie la bifurcation et le comportement post bifurcation d'une poutre de Shanley continue avec contact unilatéral [fig. (a)] [4]. On étudie la bifurcation de la branche d'équilibre triviale pour une précharge  $2u_0$  :

$$\theta = 0, \quad u = f(\lambda)$$

La branche bifurquée est développée en fonction de  $\theta$ , pour  $\theta > 0$ , sous la forme :

$$\lambda = \lambda_c + \lambda_1 \theta + \lambda_2 \frac{\theta^2}{2} + \dots, \quad u = u_c + u_1 \theta + u_2 \frac{\theta^2}{2} + \dots, \quad b = b + b_1 \theta + b_2 \frac{\theta^2}{2} + \dots$$

où la zone de contact effectif pour  $\theta = 0^+$  est définie par l'intervalle  $[-h, b]$ .

La résolution du problème en vitesses permet de déterminer les quantités  $\lambda_c$ ,  $u_c$ ,  $b$ ,  $u_1$ ,  $\lambda_1$ .

De même le problème en accélération fournit les valeurs de  $b_1$ ,  $u_2$ ,  $\lambda_2$ . Les résultats obtenus ici rappellent plus le cas élastique que le cas plastique, les critères de stabilité et de bifurcation coïncidant constamment, excepté au point de bifurcation A dans le cas d'une branche bifurquée stable [cf. fig. (b)].

On peut ainsi donner le diagramme de bifurcation [fig. (b)] suivant les valeurs du paramètre  $u_0$ .

## RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] C. DO, Flambage des plaques sous contact unilatéral, *Euromech "Stability"*, Delft, 1979.
- [2] J. COURBON, Équilibre d'une poutre chauffée, reposant sur un plan horizontal indéformable, *J. de Mécanique Appliquée*, 4, n° 4, 1980, p. 368-384.
- [3] Q. S. NGUYEN, Bifurcation and post-bifurcation analysis in plasticity and brittle fracture, *J. Mech. Phys. Solids*, 35, n° 3, 1987, p. 303-324.
- [4] A. KLARBRING, On discrete and discretized non-linear elastic structures in unilateral contact, I, *J. Solids & Structures*, 24, n° 5, 1988, p. 459-480.

X. C. : Centre d'Études et de Développement, SOLLAC, B.P. n° 2, 60160 Montataire;  
N. Q. S. : Laboratoire de Mécanique des Solides, École Polytechnique, 91128 Palaiseau Cedex.