



HAL
open science

LES FORMES AUTOMORPHES FEUILLETÉES

Jean-Pierre Otal

► **To cite this version:**

| Jean-Pierre Otal. LES FORMES AUTOMORPHES FEUILLETÉES. 2019. hal-01978942

HAL Id: hal-01978942

<https://hal.science/hal-01978942v1>

Preprint submitted on 11 Jan 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

LES FORMES AUTOMORPHES FEUILLETÉES

JEAN-PIERRE OTAL

ABSTRACT. We introduce a family $\{\mathcal{B}_s(\Gamma)\}_{s \in \mathbb{C}}$ of line bundles over the unit tangent bundle $T^1 X_\Gamma$ of a hyperbolic surface X_Γ . These bundles vary in an holomorphic way when restricted to the leaves of the stable foliation and to the leaves of the unstable foliation. A stable (resp. unstable) foliated automorphic form of weight s on $T^1 X_\Gamma$ is defined as a continuous section of $\mathcal{B}_s(\Gamma) \rightarrow T^1 X_\Gamma$ which is holomorphic along the leaves of the stable (resp. unstable) foliation. We study mainly the case when X_Γ is compact. In that situation we construct, from any $s(1-s)$ -eigenfunction of the Laplace operator on X_Γ , two foliated automorphic forms, one of weight s and one of weight $1-s$. We give some general properties of the foliated automorphic forms ; in particular, we construct when $0 < \Re s < 1$, an isomorphism between the spaces $\mathcal{A}_s(\Gamma)$ et $\mathcal{A}_{1-s}(\Gamma)$ of the stable automorphic forms of respective weights s and $1-s$.

1. Introduction

Nous étudions le fibré tangent unitaire d'une surface hyperbolique $X_\Gamma = \mathbb{H}/\Gamma$, vue comme le quotient du *demi-plan de Poincaré* $\mathbb{H} = \{z = x + iy \in \mathbb{C} | y > 0\}$ par un *groupe Fuchsien* Γ (un sous-groupe discret de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$, le groupe des isométries de \mathbb{H} qui préservent l'orientation). Le fibré tangent unitaire $T^1 X_\Gamma$ porte un feuilletage de codimension 1, le feuilletage stable, dont les feuilles sont les vecteurs qui définissent des géodésiques qui, relevées au revêtement universel, sont asymptotes dans le futur. Chaque feuille porte une structure de surface de Riemann qui varie continûment avec la feuille et $T^1 X_\Gamma$ a donc la structure d'une *lamination par surfaces de Riemann* [Gh].

On note \vec{i} le vecteur unitaire $\frac{\partial}{\partial y}$ basé au point i . Le fibré tangent unitaire à \mathbb{H} , $T^1 \mathbb{H}$ s'identifie à $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$. Un isomorphisme entre $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ et $T^1 \mathbb{H}$ est l'application qui associe à une isométrie g l'image de \vec{i} par l'application linéaire tangente $dg|_i : \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \rightarrow T^1 \mathbb{H}$, $g \mapsto dg|_i(\vec{i})$. Le stabilisateur du point i est $\mathrm{PSO}(2, \mathbb{R})$ et cet isomorphisme induit un isomorphisme entre l'espace quotient $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})/\mathrm{PSO}(2, \mathbb{R})$ et \mathbb{H} . Si Γ est un groupe Fuchsien, le fibré tangent unitaire $T^1 X_\Gamma$ est isomorphe à $\Gamma \backslash \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ et la projection canonique $T^1 X_\Gamma \rightarrow X_\Gamma$ s'identifie à la projection $\Gamma \backslash \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \rightarrow \widetilde{\Gamma \backslash \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})/\mathrm{PSO}(2, \mathbb{R})}$.

On note $\widetilde{\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})}$ le revêtement universel de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ et $\widetilde{\Gamma}$ la préimage de Γ dans $\widetilde{\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})}$. Le revêtement universel de $T^1 X_\Gamma = \Gamma \backslash \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ est (le groupe) $\widetilde{\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})}$; d'après la théorie des revêtements $T^1 X_\Gamma$ est isomorphe à l'espace quotient $\widetilde{\Gamma} \backslash \widetilde{\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})}$, $\widetilde{\Gamma}$ agissant sur $\widetilde{\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})}$ par multiplication à gauche.

Soit Γ un groupe Fuchsien. Pour tout $s \in \mathbb{C}$, nous allons définir un fibré en droites $\mathcal{B}_s(\Gamma)$ au-dessus de $T^1 X_\Gamma$; ce sera un fibré analytique, et de plus holomorphe lorsqu'on le restreint aux feuilles du feuilletage stable ou du feuilletage instable. La construction qui suit est inspirée par les "fibrés homogènes" de Indranil Biswas et Gadadhar Misra [BM] quand $s \in \mathbb{R}$: ce sont des fibrés holomorphes hermitiens en droites au-dessus du demi-plan \mathbb{H} , qui ont la propriété que l'action de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ sur \mathbb{H} se prolonge en une action par isomorphismes ; mais dans notre cas, ce seront des fibrés en droites au-dessus de $T^1 X_\Gamma$. Le fibré $\mathcal{B}_s(\Gamma)$ est obtenu en formant l'espace quotient de $\widetilde{\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})} \times \mathbb{C}$ par une action ρ de $\widetilde{\Gamma}$ de la forme $\rho(\tilde{\gamma})(g, v) = (\tilde{\gamma}g, \frac{v}{j(\tilde{\gamma}, g)})$,

avec $j(\tilde{\gamma}, g) \in \mathbb{C}^*$, telle que j vérifie la condition de cocycle : pour tous les $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2$ dans $\widetilde{\Gamma}$, pour tout $g \in \widetilde{\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})}$, $j(\tilde{\gamma}_1 \tilde{\gamma}_2, g) = j(\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2 g) j(\tilde{\gamma}_2, g)$. Nous cherchons à définir un cocycle j_s avec la propriété que pour tout $\tilde{\gamma} \in \widetilde{\Gamma}$ et pour tout $g \in \widetilde{\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})}$, $j_s(\tilde{\gamma}, g)$ soit une puissance s -ième de $\gamma'(z)$, où z est l'image de g dans $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})/\mathrm{PSO}(2, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{H}$ et $\tilde{\gamma} \in \widetilde{\Gamma}$ se projette sur $\gamma \in \Gamma$. Nous

allons en fait définir un cocycle de ce type directement pour l'action de $\widetilde{\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})}$ sur lui-même par multiplication à gauche. Considérons la fonction $D : \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \times \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}^*$ qui associe au couple $(\tilde{\gamma}, g)$ le nombre complexe $\gamma'(z)$ où $\gamma \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ est l'image de $\tilde{\gamma}$ par la projection $\widetilde{\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})} \rightarrow \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$, $z \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})/\mathrm{PSO}(2, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{H}$ l'image de g et $\gamma'(z)$ la dérivée de γ au point z . Puisque $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \times \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ est simplement connexe, on peut alors définir la fonction logarithme $\log D$ de manière unique si on impose de plus que $\log D(\mathrm{Id}, g) = 0$. Posons

$$j_s = \exp(s \log D).$$

Par restriction à $\widetilde{\Gamma} \times \widetilde{\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})}$, on a un cocycle, toujours noté j_s , pour l'action de $\widetilde{\Gamma}$ sur $\widetilde{\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})}$. On note $\mathcal{B}_s(\Gamma)$ le fibré en droites complexes sur $T^1 X_\Gamma$ associé au cocycle j_s et on l'appelle *le fibré homogène de poids s* .

Définition 1. Une *forme automorphe feuilletée de poids s* sur $T^1 X_\Gamma$ est une section continue du fibré $\mathcal{B}_s(\Gamma)$ qui est holomorphe sur les feuilles stables.

On note $\mathcal{A}_s(\Gamma)$ l'espace vectoriel des formes automorphes de poids s . Un élément de $\mathcal{A}_s(\Gamma)$ s'interprète comme une fonction continue ϕ sur $\widetilde{\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})} \simeq \mathbb{H} \times \mathbb{R}$, $(z, \theta) \mapsto \phi(z, \theta)$ qui est holomorphe pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et qui vérifie la relation d'équivariance : $\phi(\tilde{\gamma}(z, \theta))j_s(\tilde{\gamma}, (z, \theta)) = \phi(z, \theta)$. Dans cet article, on étudie les formes automorphes feuilletées dans le cas où X_Γ est compacte. On remarque tout d'abord que la propriété de continuité dans la définition des formes automorphes feuilletées a des conséquences importantes : lorsque X_Γ est compacte, une estimation a priori du module de ϕ entraîne que l'espace vectoriel $\mathcal{A}_s(\Gamma)$ est trivial si $\Re s \leq 0$ (Affirmation 15).

Bertrand Deroin montre dans [De] que l'espace des formes de poids 2 sur une lamination par surfaces de Riemann est de dimension infinie dès que la lamination possède une feuille simplement connexe. C'est le cas bien sûr pour la lamination $T^1 X_\Gamma$ et en fait, il est raisonnable de penser que pour les valeurs de s avec $\Re s > 1$, sa construction peut être généralisée et montrer que $\mathcal{A}_s(\Gamma)$ est de dimension infinie dans ce cas aussi.

Dans cet article, nous nous intéresserons plus particulièrement aux formes automorphes de poids s lorsque $0 < \Re s < 1$. Le premier résultat établit une relation entre les fonctions propres du Laplacien sur X_Γ et les formes automorphes feuilletées (Théorème 11). Si $f : X_\Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction λ -propre, c'est-à-dire si $\Delta f + \lambda f = 0$, avec $\lambda = s(1 - s)$, nous lui associons deux formes automorphes feuilletées : l'une \mathcal{F}_s de poids s , l'autre \mathcal{F}_{1-s} de poids $1 - s$ (section 4). La construction de ces formes automorphes utilise les distributions d'Helgason sur le bord $\partial\mathbb{H}$ qui sont associées à f [He]. On sait qu'il existe deux distributions avec cette propriété ; l'une, T_s , redonne f lorsqu'on l'applique au noyau de Poisson élevé à la puissance s $P^s(z, \cdot)$, l'autre T_{1-s} , redonne f lorsqu'on l'applique au noyau de Poisson à la puissance $1 - s$, $P^{1-s}(z, \cdot)$. Les formes automorphes feuilletées \mathcal{F}_s et \mathcal{F}_{1-s} sont construites de façon explicite à partir de ces deux distributions. En particulier, on obtient des éléments non nuls de $\mathcal{A}_s(\Gamma)$ pour une infinité de valeurs de s dans la bande $0 < \Re s < 1$, un résultat qui n'est pas évident a priori.

On sait par ailleurs que les deux distributions d'Helgason, T_s et T_{1-s} s'expriment l'une en fonction de l'autre par un opérateur d'entrelacement [GGPS]. Ceci suggère l'existence d'un opérateur entre les espaces $\mathcal{A}_s(\Gamma)$ et $\mathcal{A}_{1-s}(\Gamma)$ qui enverrait la forme automorphe feuilletée \mathcal{F}_s sur la forme \mathcal{F}_{1-s} , analogue à l'opérateur de Bol [B]. Un opérateur *naturel* $\Phi_s : \mathcal{A}_s(\Gamma) \rightarrow \mathcal{A}_{1-s}(\Gamma)$ est introduit à la section 7.1 par deux constructions équivalentes : l'une à partir des distributions qui sont les valeurs au bord des formes automorphes feuilletées, l'autre en utilisant l'intégrale de Riemann-Liouville. Nous étudions quelques unes de ses propriétés. Le théorème 30 établit en particulier que Φ_s et Φ_{1-s} sont inverses l'un de l'autre : $\Phi_{1-s} \circ \Phi_s = \mathrm{Id}_{\mathcal{A}_s(\Gamma)}$. Là aussi, l'hypothèse $0 < \Re s < 1$ est essentielle pour la construction, et en fait, un problème qui nous semble pertinent est celui de la bonne définition des espaces $\mathcal{A}_s(\Gamma)$: quelle régularité transverse devrait-on imposer aux formes automorphes feuilletées dans $\mathcal{A}_s(\Gamma)$ pour qu'il existe un isomorphisme $\Phi_s : \mathcal{A}_s(\Gamma) \rightarrow \mathcal{A}_{1-s}(\Gamma)$? (Nous avons vu que l'hypothèse de continuité est très contraignante quand $\Re s \leq 0$ puisqu'elle entraîne que $\mathcal{A}_s(\Gamma)$ se réduit alors à la forme nulle.)

Dans un prochain article, nous étudierons le cas des groupes Fuchsien Γ contenant des éléments paraboliques. Les séries d'Eisenstein sont des exemples simples de fonctions propres du Laplacien pour ces groupes. La construction ci-dessus s'applique dans ce cas et conduit à des formes automorphes feuilletées qui sont holomorphes le long des feuilles et qu'on appellera encore formes automorphes feuilletées, bien qu'elles soient peut-être discontinues transversalement le long des feuilles qui sont stabilisées par un élément de Γ autre que Id .

Je remercie les referees qui ont permis d'améliorer la présentation. L'un d'eux a suggéré que certains des résultats de cet article, en particulier la construction de la forme automorphe feuilletée à partir d'une fonction propre du Laplacien, pouvaient peut-être s'expliquer par la théorie des représentations (cf. [S]).

2. Les fibrés homogènes dans le modèle du disque.

On préférera raisonner avec le modèle du disque hyperbolique. Rappelons quelques définitions dans ce modèle. Le disque unité $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$, muni de la métrique $\frac{2}{1-|z|^2}|dz|$ est isométrique au demi-plan de Poincaré. Une isométrie de \mathbb{H} vers \mathbb{D} est l'homographie $z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$ qui envoie i sur l'origine o du disque, ∞ sur 1 et 0 sur -1 .

On note $\partial\mathbb{D}$ le "bord idéal" du disque hyperbolique, c'est-à-dire l'ensemble des classes d'équivalence de demi-géodésiques pour la relation d'équivalence "rester à distance bornée". Ce bord idéal s'identifie au cercle unité S^1 de \mathbb{C} . Le fibré unitaire tangent $T^1\mathbb{D}$ porte le feuilletage *stable* (resp. *instable*), pour lesquels deux vecteurs sont dans une même feuille si et seulement si leurs orbites par le flot géodésique restent à distance bornée lorsque $t \rightarrow +\infty$ (resp. lorsque $t \rightarrow -\infty$). Le fibré $T^1\mathbb{D}$ s'identifie au produit $\mathbb{D} \times S^1$ en associant à tout vecteur unitaire v son point base z et la limite $e^{i\theta}$ en $+\infty$ (dans $\partial\mathbb{D}$) de la géodésique γ_v déterminée par v . On en déduit une identification du revêtement universel de $T^1\mathbb{D}$ avec $\mathbb{D} \times \widetilde{S^1}$, c'est-à-dire $\mathbb{D} \times \mathbb{R}$. Le feuilletage stable de $T^1\mathbb{D}$ se relève dans ce revêtement en le feuilletage de feuilles $\mathbb{D} \times \{\theta\}$. On obtiendrait une paramétrisation analogue de $\widetilde{T^1\mathbb{D}}$ avec $\mathbb{D} \times S^1$ en associant à tout vecteur v son point base z et la limite $e^{i\theta}$ en $-\infty$ de la géodésique déterminée par v . Dans cette identification, les feuilles du relevé du feuilletage instable sont les $\mathbb{D} \times \{\theta\}$.

Le groupe des isométries orientées de \mathbb{D} est $\text{PSU}(1,1)$: le groupe $\text{SU}(1,1)$ des matrices de déterminant 1 agit sur \mathbb{D} par homographies en associant à la matrice $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$ l'homographie $z \mapsto \frac{\alpha z + \beta}{\bar{\beta} z + \bar{\alpha}}$ et cette action se factorise par une action de $\text{PSU}(1,1)$ quotient de $\text{SU}(1,1)$ par son centre $\{\pm \text{Id}\}$. Le stabilisateur de o est formé des matrices $\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$. Cette matrice agit par homographies sur \mathbb{D} comme la rotation euclidienne d'angle 2θ , de sorte que le stabilisateur de o est isomorphe au quotient $\text{PU}(1)$ de $\text{U}(1)$ par le sous-groupe $\{\pm \text{Id}\}$. Le disque \mathbb{D} s'identifie à $\text{PSU}(1,1)/\text{PU}(1)$.

Soit Γ un groupe Fuchsien, c'est-à-dire un sous-groupe discret de $\text{PSU}(1,1)$, et $X_\Gamma = \Gamma \backslash \mathbb{D}$ la surface hyperbolique associée. L'action de Γ sur le fibré unitaire tangent $T^1\mathbb{D} \simeq \mathbb{D} \times \partial\mathbb{D}$, dans la paramétrisation stable (ou instable) est l'action diagonale. Les feuilletages stable et instable de $T^1\mathbb{D}$ sont donc invariants par Γ et passent au quotient en des feuilletages de T^1X_Γ , toujours appelés *feuilletages stable* et *instable*.

Nous reprenons la construction du fibré en droites $\mathcal{B}_s(\Gamma)$ au-dessus de T^1X_Γ , le fibré homogène de poids s construit dans l'introduction, mais en utilisant cette fois les notations du modèle du disque. On définit un cocycle pour l'action de $\text{PSU}(1,1)$ sur \mathbb{D} en posant :

$$(1) \quad j_s(\tilde{\gamma}, z) = \exp(s \log \gamma'(z))$$

où γ est l'élément de $\text{PSU}(1,1)$ sur lequel $\tilde{\gamma}$ se projette et où on choisit la branche du logarithme $\log \gamma'(z)$ sur $\widetilde{\text{PSU}(1,1)} \times \mathbb{D}$ qui vaut 0 sur $\text{Id} \times \mathbb{D}$. On en déduit un cocycle pour l'action de

$\widetilde{\text{PSU}}(1,1)$ sur $\widetilde{\text{T}^1\mathbb{D}} \simeq \widetilde{\text{PSU}}(1,1)$ en posant : $(\tilde{\gamma}, g) \mapsto j_s(\tilde{\gamma}, z)$, où $z \in \mathbb{D}$ est le point base du vecteur g . On note toujours j_s ce cocycle et, comme précédemment, $\mathcal{B}_s(\Gamma)$ le fibré en droites complexes sur $\text{T}^1X_\Gamma = \widetilde{\Gamma} \backslash \widetilde{\text{PSU}}(1,1)$ qui est associé à la restriction de j_s à $\widetilde{\Gamma}$, c'est-à-dire le quotient de $\widetilde{\text{PSU}}(1,1) \times \mathbb{C}$ par l'action de $\widetilde{\Gamma}$ pour laquelle l'élément $\tilde{\gamma} \in \widetilde{\Gamma}$ agit par $(g, \cdot) \mapsto (\tilde{\gamma}g, j_s(\tilde{\gamma}, g))$. Remarquons que $j_s(\tilde{\gamma}, g)$ ne dépend que de z et non de la position de g dans la fibre au-dessus de z ; ceci entraîne que le fibré $\mathcal{B}_s(\Gamma)$ est analytique sur T^1X_Γ et holomorphe lorsqu'on le restreint aux feuilletages stable ou instable de T^1X_Γ .

Remarque 2. L'action de $\widetilde{\text{PSU}}(1,1)$ sur $\widetilde{\text{PSU}}(1,1) \simeq \mathbb{D} \times \mathbb{R}$ se prolonge continûment à $\overline{\mathbb{D}} \times \mathbb{R}$ et le cocycle $j_s : \widetilde{\text{PSU}}(1,1) \times (\mathbb{D} \times \mathbb{R})$ se prolonge en un cocycle pour cette action : on notera j_s ce cocycle. Le groupe $\text{PSU}(1,1)$ agit sur \mathbb{R} , le revêtement universel de $\partial\mathbb{D}$ et on définit un cocycle pour cette action par $(\tilde{\gamma}, \theta) \mapsto j_s(\tilde{\gamma}, e^{i\theta})$.

3. Les formes automorphes feuilletées

Soit $\Gamma \subset \text{PSU}(1,1)$ un groupe Fuchsien ; on note $\widetilde{\Gamma}$ sa préimage dans $\widetilde{\text{PSU}}(1,1)$.

Définition 3. Soit $s \in \mathbb{C}$. Une *forme automorphe feuilletée stable* (respectivement *instable*) de poids s est une section continue du fibré $\mathcal{B}_s(\Gamma)$, qui est holomorphe en restriction à chaque feuille stable (resp. *instable*). On note $\mathcal{A}_s^+(\Gamma)$ l'espace des formes automorphes feuilletées stables de poids s et $\mathcal{A}_s^-(\Gamma)$ celui des formes automorphes instables de poids s .

La donnée d'une forme automorphe feuilletée, par exemple stable, est équivalente à la donnée d'une fonction continue $\Phi : \mathbb{D} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $(z, \theta) \mapsto \Phi(z, \theta)$, qui est holomorphe en z pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et telle que pour tout $(z, \theta) \in \mathbb{D} \times \mathbb{R}$, pour tout $\tilde{\gamma} \in \widetilde{\Gamma}$, on a :

$$(2) \quad \Phi(\tilde{\gamma}(z), \tilde{\gamma}(\theta))j_s(\tilde{\gamma}, (z, \theta)) = \Phi(z, \theta).$$

On a la même interprétation des formes automorphes feuilletées instables en utilisant la paramétrisation instable de $\widetilde{\text{T}^1\mathbb{D}}$.

Exemple. Soit $n \in \mathbb{N}$. Une forme automorphe de poids n sur X_Γ est une section holomorphe du fibré $K^{\otimes n}$, la puissance n -ième du fibré des 1-formes holomorphes. L'espace des formes de poids n est noté $\mathcal{A}_n(\Gamma)$. La donnée d'une forme dans $\mathcal{A}_n(\Gamma)$ est équivalente à celle d'une fonction holomorphe $\phi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ telle que pour tout $\gamma \in \Gamma$, on a : $\phi(\gamma(z))\gamma'(z)^n = \phi(z)$. L'espace vectoriel (de dimension finie) $\mathcal{A}_n(\Gamma)$ s'injecte dans $\mathcal{A}_n^+(\Gamma)$: si on pose en effet $\Phi(z, \theta) = \phi(z)$, la relation d'automorphie vérifiée par ϕ sous l'action de Γ entraîne que $\Phi \in \mathcal{A}_n(\Gamma)$. En effet, si $\tilde{\gamma} \in \widetilde{\Gamma}$ se projette sur $\gamma \in \Gamma$, alors pour tout $z \in \mathbb{D}$ et pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $j_n(\tilde{\gamma}, (z, \theta)) = \gamma'(z)^n$; donc Φ vérifie (2) pour $s = n$.

Remarque 4. Le difféomorphisme $v \mapsto -v$ de T^1X_Γ envoie le feuilletage stable sur le feuilletage instable et est holomorphe en restriction aux feuilles. Il induit un isomorphisme entre les espaces vectoriels $\mathcal{A}_s^+(\Gamma)$ et $\mathcal{A}_s^-(\Gamma)$.

Affirmation 5. *Supposons que X_Γ est compacte. Alors $\mathcal{A}_0^\pm(\Gamma)$ est de dimension 1, engendré par une fonction constante.*

Démonstration. Une forme automorphe feuilletée, par exemple stable, de poids 0 s'identifie à une fonction $\text{T}^1X_\Gamma \rightarrow \mathbb{C}$, continue, holomorphe sur les feuilles du feuilletage stable. Lorsque X_Γ est compacte, cette fonction atteint son maximum. Par le principe du maximum, la restriction de f à la feuille stable qui passe par ce point est constante. Comme chaque feuille stable est dense dans T^1X_Γ , f est constante. \square

4. Les formes automorphes feuilletées associées aux fonctions propres du Laplacien

Dans ce chapitre, après quelques rappels sur le noyau de Poisson et sur les fonctions propres du Laplacien du disque hyperbolique, nous associons à toute fonction $s(1-s)$ -propre sur X_Γ deux formes automorphes feuilletées, l'une de poids s et l'autre de poids $1-s$.

Si $z \in \mathbb{D}$ et $\xi \in \partial\mathbb{D}$, le noyau de Poisson est défini par :

$$(3) \quad P(z, \xi) = \Re\left(\frac{\xi + z}{\xi - z}\right) = \frac{1 - |z|^2}{|\xi - z|^2}.$$

Rappelons que sous l'action d'une isométrie $\gamma \in \text{PSU}(1,1)$, le noyau de Poisson se transforme en vérifiant la relation :

$$(4) \quad P(\gamma(z), \gamma(\xi)) = \frac{1 - |\gamma(z)|^2}{|\gamma(\xi) - \gamma(z)|^2} = \frac{1}{|\gamma'(\xi)|} P(z, \xi).$$

En effet, puisque γ agit par homographie, on a la *formule de la moyenne* : pour z et $z' \in \mathbb{C}$,

$$(5) \quad |\gamma(z) - \gamma(z')| = |\gamma'(z)|^{\frac{1}{2}} |\gamma'(z')|^{\frac{1}{2}} |z - z'|.$$

D'autre part, $|\gamma'(z)| = \frac{1 - |\gamma(z)|^2}{1 - |z|^2}$, puisque γ est une isométrie hyperbolique de \mathbb{D} . On en déduit

(5).

Le Laplacien du disque hyperbolique \mathbb{D} est l'opérateur qui agit sur les fonctions $C^\infty f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ par

$$\Delta f = \frac{(1 - |z|^2)^2}{4} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) = (1 - |z|^2)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}}.$$

Pour tout $\xi \in \partial\mathbb{D}$, $z \mapsto P(z, \xi)$ est une fonction harmonique et plus généralement $P^s(z, \xi)$ est $s(1-s)$ -propre :

$$\Delta P^s(\cdot, \xi) + s(1-s)P^s(\cdot, \xi) = 0.$$

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et soit $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction λ -propre du Laplacien sur \mathbb{D} : $\Delta f + \lambda f = 0$. Fixons $s \in \mathbb{C}$ tel que $\lambda = s(1-s)$. Un théorème d'Helgason dit qu'on peut représenter f par les puissances $P^s(\cdot, \xi)$ du noyau de Poisson. Il existe *une hyperfonction* T_s sur $\partial\mathbb{D}$ (i.e. une forme linéaire continue sur l'espace des fonctions analytiques sur $\partial\mathbb{D}$), telle que $f(z) = \langle T_s, P^s(z, \cdot) \rangle$; de plus cette hyperfonction T_s est définie de manière unique, sauf pour $s \in -\mathbb{N}^*$. On sait de plus que si $|f(z)|$ ne croît pas trop vite lorsque $z \rightarrow \partial\mathbb{D}$, l'hyperfonction T_s est en fait une distribution (forme linéaire continue sur $C^\infty(\partial\mathbb{D}, \mathbb{C})$) [He].

Soit $\Gamma \subset \text{PSU}(1,1)$ un groupe Fuchsien. Supposons que la fonction propre f est invariante par Γ . Supposons aussi pour simplifier l'exposition que l'hyperfonction T_s est en fait une distribution. Alors, la distribution T_s vérifie, pour tout $\gamma \in \Gamma$:

$$(6) \quad \gamma^* T_s = |\gamma'(\xi)|^s T_s,$$

où $\gamma^* T_s$ est la distribution qui associe $\langle T_s, h \circ \gamma^{-1} \rangle$ à toute fonction $h \in C^\infty(\partial\mathbb{D}, \mathbb{C})$: cette propriété est une conséquence de la partie "unicité" dans le théorème d'Helgason. Par analogie avec la situation plus familière des mesures, on dira que la distribution T_s est *s-conforme* pour le groupe Γ .

Notons $\pi : \mathbb{R} \rightarrow \partial\mathbb{D}$ le revêtement universel : $\theta \mapsto e^{i\theta}$. On relève T_s en une distribution \tilde{T}_s sur \mathbb{R} , c'est-à-dire une forme linéaire continue sur l'espace des fonctions C^∞ à support compact. Donc pour toute fonction différentiable $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ à support compact, contenu dans un intervalle de largeur $< 2\pi$ (de sorte que la projection de revêtement $\pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ restreinte au support de h soit injective), on aura $\langle \tilde{T}_s, h \rangle = \langle T_s, h \circ \pi^{-1} \rangle$; la distribution \tilde{T}_s est donc invariante par les translations de longueurs multiples de 2π .

Considérons maintenant, pour $s \in \mathbb{C}$, la fonction $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $\theta \mapsto e^{is\theta}$. Définissons une distribution \mathcal{S}_s sur \mathbb{R} en posant

$$\mathcal{S}_s = e^{is \cdot} \tilde{T}_s,$$

le *produit au sens des distributions* de la distribution \tilde{T}_s par la fonction $C^\infty e^{is \cdot}$. Cette distribution \mathcal{S}_s vérifie alors, en désignant par $\tilde{\Gamma}$ la préimage de Γ dans $\text{PSU}(1,1)$:

Lemme 6. *Pour tout $\tilde{\gamma} \in \tilde{\Gamma}$, $\tilde{\gamma}^* \mathcal{S}_s = j_s(\tilde{\gamma}, \cdot) \mathcal{S}_s$.*

Démonstration. Soit $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction C^∞ à support compact. D'après la définition de l'action des difféomorphismes sur les distributions, on a, pour tout $\tilde{\gamma} \in \text{PSU}(1,1) : \tilde{\gamma}^* \mathcal{S}_s(h) = \mathcal{S}_s(h \circ \tilde{\gamma}^{-1})$. Donc

$$(7) \quad \tilde{\gamma}^* \mathcal{S}_s(h) = \tilde{T}_s(e^{is \cdot} h \circ \tilde{\gamma}^{-1}) = \tilde{T}_s(e^{is \tilde{\gamma}^{-1}(\cdot)} h \circ \tilde{\gamma}^{-1}(\cdot) \frac{e^{is \cdot}}{e^{is \tilde{\gamma}^{-1}(\cdot)}}).$$

Par ailleurs, un argument géométrique élémentaire montre que pour tout $\gamma \in \text{PSU}(1,1)$, pour tout $\xi \in \partial \mathbb{D}$:

$$\frac{\gamma'(\xi)}{|\gamma'(\xi)|} = \frac{\gamma(\xi)}{\xi}.$$

Soit $\tilde{\gamma} \in \tilde{\Gamma}$ un élément au-dessus de γ ; $\tilde{\gamma}$ agit sur \mathbb{R} , le revêtement universel de $\partial \mathbb{D}$, comme relevé de l'homéomorphisme γ et on a donc, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

$$e^{i\tilde{\gamma}(\theta)} = \gamma(e^{i\theta}).$$

Donc

$$(8) \quad \frac{j_s(\tilde{\gamma}, \theta)}{|\gamma'(e^{i\theta})|^s} = \frac{e^{is\tilde{\gamma}(\theta)}}{e^{is\theta}}.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}^* \mathcal{S}_s(h) &= \tilde{T}(e^{is \cdot} h \circ \tilde{\gamma}^{-1}(\cdot)) \\ &= \tilde{T}(e^{is \tilde{\gamma}^{-1}(\cdot)} h \circ \tilde{\gamma}^{-1}(\cdot) \frac{e^{is \cdot}}{e^{is \tilde{\gamma}^{-1}(\cdot)}}) \\ &= \tilde{T}_s(e^{is \tilde{\gamma}^{-1}(\cdot)} h \circ \tilde{\gamma}^{-1}(\cdot) \frac{j_s(\tilde{\gamma}, \tilde{\gamma}^{-1}(\cdot))}{|\gamma'(e^{i\tilde{\gamma}^{-1}(\cdot)})|^s}) \quad (\text{d'après (8)}) \\ &= \tilde{T}_s((e^{is \cdot} h \frac{j_s(\tilde{\gamma}, \cdot)}{|\gamma'(e^{i \cdot})|^s}) \circ \tilde{\gamma}^{-1}) \\ &= \tilde{T}_s(e^{is \cdot} h \frac{j_s(\tilde{\gamma}, \cdot)}{|\gamma'(e^{i \cdot})|^s} \cdot |\gamma'(e^{i \cdot})|^s) \quad (\text{puisque } \tilde{T}_s \text{ est } s\text{-conforme}) \\ &= \tilde{T}_s(e^{is \cdot} h j_s(\tilde{\gamma}, \cdot)) \\ &= \mathcal{S}_s((j_s(\tilde{\gamma}, \cdot) h) \quad (\text{par définition de } \mathcal{S}_s) \\ &= (j_s(\tilde{\gamma}, \cdot) \mathcal{S}_s)(h). \end{aligned}$$

Puisque l'égalité $\tilde{\gamma}^* \mathcal{S}_s(h) = (j_s(\tilde{\gamma}, \cdot) \mathcal{S}_s)(h)$ a lieu pour toutes les fonctions h , le lemme est démontré. \square

Remarque 7. Lorsque S_s est compacte, ou bien lorsque S_s est de volume fini et f est *parabolique* (c'est-à-dire que f tend vers 0 dans les pointes), la distribution T_s est la dérivée au sens des distributions d'une fonction Hölder [O]. Précisément, il existe une fonction continue $F_s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, Hölder d'exposant $\Re s$, telle que la différence $F_s(\theta + 2\pi) - F_s(\theta)$ est indépendante de θ et telle que pour toute fonction de classe C^1 $h : \partial \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$, identifiée avec une fonction périodique $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ de période 2π , on a :

$$(9) \quad T_s(h) = (F_s(2\pi) - F_s(0))h(0) - \int_0^{2\pi} h'(\theta) F_s(\theta) d\theta.$$

La distribution relevée \tilde{T}_s est aussi la dérivée au sens des distributions d'une fonction Hölder, à savoir la fonction F_s elle-même. De même la distribution $\mathcal{S}_s = e^{is\theta} \tilde{T}_s$ est la dérivée au sens des distributions DG_s de la fonction $G_s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$(10) \quad G_s(\theta) = e^{is\theta} F_s(\theta) - is \int_0^\theta e^{ist} F_s(t) dt.$$

4.1. Les puissances complexes du noyau de Cauchy.

Dans la suite, nous supposons que Γ est un groupe Fuchsien cocompact ou bien de covolume fini. Soit $f : X_\Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction propre pour la valeur $\lambda = s(1-s)$; lorsque X_Γ est de covolume fini, supposons que f est parabolique. Les distributions T_s, \tilde{T}_s et \mathcal{S}_s (resp. T_{1-s}, \tilde{T}_{1-s} et \mathcal{S}_{1-s}) sont en fait des dérivées de fonctions Hölder d'exposant $\Re s$ (resp. $1 - \Re s$). Le résultat principal de cette section (théorème 11) dit qu'on peut associer à f deux formes automorphes feuilletées pour Γ , l'une de poids s et l'autre de poids $1-s$, c'est-à-dire des éléments de $\mathcal{A}_s(\Gamma)$ et de $\mathcal{A}_{1-s}(\Gamma)$. La construction de ces formes automorphes passe d'abord par la définition des puissances complexes du noyau de Cauchy $(z, \xi) \mapsto \frac{1}{\xi - z}$.

Définition 8. Le revêtement universel de $\mathbb{D} \times S^1$ s'identifie à $\mathbb{D} \times \mathbb{R}$ avec comme projection l'application $(z, \theta) \mapsto (z, e^{i\theta})$. Sur $\mathbb{D} \times \mathbb{R}$, la fonction $(z, \theta) \rightarrow e^{i\theta} - z$ ne s'annule pas et on définit son logarithme de la façon suivante :

On choisira la branche du logarithme de sorte que $\log(1-z)$ prenne des valeurs réelles pour $z \in]-1, 1[$. Pour tout $s \in \mathbb{C}$, on pose alors

$$(e^{i\theta} - z)^s = e^{s \log(e^{i\theta} - z)}$$

et on définit la puissance s -ième du noyau de Cauchy :

$$(11) \quad \left(\frac{1}{e^{i\theta} - z} \right)^s = \frac{1}{(e^{i\theta} - z)^s} = e^{-s \log(e^{i\theta} - z)},$$

C'est une fonction \mathbb{R} -analytique sur $\mathbb{D} \times \mathbb{R}$ et holomorphe en z pour tout θ .

Soit $\gamma \in \text{PSU}(1,1)$, représenté par la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, et agissant sur $\overline{\mathbb{D}}$ par l'homographie : $z \mapsto \gamma(z) = \frac{az + b}{cz + d}$. On a pour tous z et $z' \in \overline{\mathbb{D}}$: $\gamma(z') - \gamma(z) = \left(\frac{1}{cz' + d} \right) \left(\frac{1}{cz + d} \right) (z' - z)$. Donc

$$(12) \quad (\gamma(z') - \gamma(z))^2 = \left(\frac{1}{cz' + d} \right)^2 \left(\frac{1}{cz + d} \right)^2 (z' - z)^2 = \gamma'(z') \gamma'(z) (z' - z)^2.$$

Pour tout $\tilde{\gamma} \in \widetilde{\text{PSU}(1,1)}$, soit $\gamma \in \text{PSU}(1,1)$ l'élément sur lequel $\tilde{\gamma}$ se projette. On a alors, d'après le choix de la branche de $\log(\gamma'(z))$ fait lors de la définition du cocycle j_s et d'après celui de la branche de $\log(e^{i\theta} - z)$ fait dans la définition des puissances complexes du noyau de Cauchy :

$$(13) \quad 2 \log(\tilde{\gamma}(e^{i\theta}) - \gamma(z)) = \log(\gamma'(e^{i\theta})) + \log(\gamma'(z)) + 2 \log(e^{i\theta} - z).$$

En effet, considérons la fonction de $\widetilde{\text{PSU}(1,1)} \times \mathbb{D} \times \mathbb{R}$ vers \mathbb{C}^* définie par $(\tilde{\gamma}, z, \theta) \mapsto (\tilde{\gamma}(e^{i\theta}) - \gamma(z))^2$. D'après (12), les termes de droite et de gauche de l'égalité (13) sont deux relèvements de cette fonction au revêtement standard de $\mathbb{C}^* : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*, z \mapsto e^z$. Avec nos conventions sur les branches de \log , ces deux relèvements coïncident au point $(\text{Id}, 0, 0)$. Ils sont donc égaux. Nous utiliserons surtout le corollaire suivant de cette identité pour le noyau de Cauchy.

Affirmation 9. Pour tout $s \in \mathbb{C}$, la puissance s -ième du noyau de Cauchy vérifie : pour tout $\tilde{\gamma} \in \widetilde{\text{PSU}(1,1)}$, et pour tous $z \in \mathbb{D}$ et $\theta \in \mathbb{R}$:

$$(14) \quad \left(\frac{1}{e^{i\tilde{\gamma}(\theta)} - \gamma(z)} \right)^{2s} = \frac{1}{j_s(\tilde{\gamma}, \theta)} \frac{1}{j_s(\tilde{\gamma}, z)} \left(\frac{1}{e^{i\theta} - z} \right)^{2s}.$$

4.2. Construction de formes automorphes feuilletées.

Définition 10. Soit $f : X_\Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction $s(1-s)$ -propre. Notons pour simplifier $T = T_s$ la distribution d'Helgason qui la représente avec le noyau $P(z, \xi)^s$, \tilde{T} le relevé de T à $\mathbb{R} = \partial\overline{\mathbb{D}}$, et \mathcal{S}_s la distribution $e^{is \cdot} \tilde{T}$. Si $\tilde{v} = (z, \theta) \in \mathbb{D} \times \mathbb{R}$, on pose :

$$(15) \quad \mathcal{F}_s(z, \theta) = \mathcal{S}_s \left(\left(\frac{1}{e^{i \cdot} - z} \right)^{2s} \chi_{[\theta, \theta + 2\pi]} \right).$$

Théorème 11. *La fonction $\mathcal{F}_s : \mathbb{D} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ définit une forme automorphe stable de poids s pour le groupe Γ .*

Observons tout d'abord que le terme de droite dans (15) est défini, bien que la fonction caractéristique qui y apparaît ne soit pas différentiable. En effet, d'après la remarque (7), \mathcal{S}_s est la dérivée au sens des distributions de la fonction G donnée dans cette remarque. On définit alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_s\left(\left(\frac{1}{e^{i\cdot} - z}\right)^{2s} \chi_{[\theta, \theta+2\pi]}\right) &= DG\left(\left(\frac{1}{e^{i\cdot} - z}\right)^{2s} \chi_{[\theta, \theta+2\pi]}\right) \\ &= - \int_{\theta}^{\theta+2\pi} \left(\left(\frac{1}{e^{it} - z}\right)^{2s}\right)' G(t) dt + G(\theta + 2\pi) \left(\frac{1}{e^{i(\theta+2\pi)} - z}\right)^{2s} - G(\theta) \left(\frac{1}{e^{i\theta} - z}\right)^{2s}. \end{aligned}$$

Plus généralement, si T est une distribution d'ordre 1 sur \mathbb{R} , on peut l'appliquer à toute fonction C^1 à support compact ; la fonctionnelle obtenue est continue pour la topologie naturelle sur l'espace des fonctions C^1 à support compact sur \mathbb{R} . Si de plus, T est la dérivée au sens des distributions d'une fonction continue $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, on peut l'appliquer aux fonctions d'une classe beaucoup plus large, par exemple aux fonctions caractéristiques d'intervalles. Soit $[\theta, \theta'] \subset \mathbb{R}$ un intervalle compact. Alors, pour toute fonction $h : [\theta, \theta'] \rightarrow \mathbb{C}$ de classe C^1 , on peut appliquer la distribution $T = DF$ à la fonction h en définissant

$$(16) \quad T(h) = - \int_{\theta}^{\theta'} F(t) h'(t) dt + F(\theta') h(\theta') - F(\theta) h(\theta).$$

Cette définition redonne évidemment $T(h)$ lorsque la fonction $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ a son support inclus dans $[\theta, \theta']$.

Considérons maintenant, pour $\epsilon > 0$ suffisamment petit, une fonction $g_{\epsilon} : [\theta, \theta'] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 avec les propriétés suivantes : $g_{\epsilon}(\theta) = g_{\epsilon}(\theta') = 0$, g_{ϵ} est constante égale à 1 sur l'intervalle $[\theta + \epsilon, \theta' - \epsilon]$ et g_{ϵ} est monotone sur les intervalles $[\theta, \theta + \epsilon]$ et $[\theta' - \epsilon, \theta']$.

Lemme 12. *Avec les notations précédentes, on a, pour toute suite (g_{ϵ_i}) , avec $\epsilon_i \rightarrow 0$:*

$$(17) \quad T(h|_{[\theta, \theta']}) = \lim_{\epsilon_i \rightarrow 0} T(hg_{\epsilon_i}).$$

Démonstration. En effet,

$$T(hg_{\epsilon}) = - \int_{\theta}^{\theta'} F(hg_{\epsilon})' dt = - \int_{\theta}^{\theta'} Fhg_{\epsilon}' dt - \int_{\theta}^{\theta'} Fh'g_{\epsilon} dt.$$

Le premier terme du membre de droite se décompose comme

$$\int_{\theta}^{\theta'} Fhg_{\epsilon}' dt = \int_{\theta}^{\theta+\epsilon} Fhg_{\epsilon}' dt + \int_{\theta'-\epsilon}^{\theta'} Fhg_{\epsilon}' dt.$$

Si $t \in [\theta, \theta + \epsilon]$, $(Fhg_{\epsilon}') (t) = ((Fh)(\theta) + O(\epsilon^{\sigma}))g_{\epsilon}'(t)$ puisque F est Hölder d'exposant $\sigma = \Re s$; donc $\int_{\theta}^{\theta+\epsilon} Fhg_{\epsilon}' dt = (Fh)(\theta) + O(\epsilon^{\sigma})$. Le même raisonnement avec le deuxième terme donne :

$$\int_{\theta'-\epsilon}^{\theta'} Fhg_{\epsilon}' dt = -(Fh)(\theta') + O(\epsilon^{\sigma}). \text{ Finalement,}$$

$$(18) \quad \int_{\theta}^{\theta'} Fhg_{\epsilon}' dt = -(Fh)(\theta') + (Fh)(\theta) + O(\epsilon^{\sigma})$$

D'autre part,

$$(19) \quad \int_{\theta}^{\theta'} Fh'g_{\epsilon} dt = \int_{\theta}^{\theta'} Fh' dt + O(\epsilon)$$

puisque $|F|$ et $|h'|$ sont majorées sur $[\theta, \theta']$ et que la fonction $1 - g_{\epsilon}$, positive et majorée par 1 a son support contenu dans la réunion des intervalles $[\theta, \theta + \epsilon]$ et $[\theta' - \epsilon, \theta']$. Finalement, en additionnant (18) et (19), on obtient : $T(h|_{[\theta, \theta']}) = T(hg_{\epsilon}) + O(\epsilon^{\sigma})$, ce qui entraîne le lemme. \square

Revenons à la distribution \mathcal{S}_s . Nous allons maintenant montrer :

Affirmation 13. *Soit $[\theta, \theta']$ un intervalle $\subset \mathbb{R}$ et soit $h : [\theta, \theta'] \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe C^1 . Alors, pour tout $\tilde{\gamma} \in \tilde{\Gamma}$, on a : $\tilde{\gamma}^*(\mathcal{S}_s)(h|_{[\theta, \theta']}) = \mathcal{S}_s((j_s(\tilde{\gamma}(z, \cdot))h)|_{[\theta, \theta']})$.*

Démonstration. La propriété de conformalité de \mathcal{S}_s sous l'action de $\tilde{\Gamma}$ signifie que pour toute fonction $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, de classe C^1 et à support compact,

$$\tilde{\gamma}^*\mathcal{S}_s(h) = \mathcal{S}_s(h \circ \tilde{\gamma}^{-1}) = \mathcal{S}_s(j_s(\tilde{\gamma}, \cdot)h).$$

Donc, la proposition est vérifiée lorsque le support de h est contenu dans l'intervalle $[\theta, \theta']$. Dans le cas général, on approche la restriction $h|_{[\theta, \theta']}$ par une fonction dont le support est contenu dans $[\theta, \theta']$, en choisissant une suite (ϵ_i) tendant vers 0 et une suite de fonctions (g_{ϵ_i}) ayant chacune les propriétés de la fonction g_ϵ ci-dessus. Alors,

$$\begin{aligned} T((j_s(\tilde{\gamma}(z, \cdot))h|_{[\theta, \theta']})) &= \lim_{\epsilon_i \rightarrow 0} T((j_s(\tilde{\gamma}(z, \cdot))hg_{\epsilon_i})) \\ &= \lim_{\epsilon_i \rightarrow 0} \tilde{\gamma}^*T(hg_{\epsilon_i}) \\ &= \tilde{\gamma}^*T(h|_{[\theta, \theta']}), \end{aligned}$$

où les première et dernière égalités découlent directement du lemme, et la deuxième de la conformalité de \mathcal{S}_s . \square

Démonstration du Théorème 11. D'après l'expression de \mathcal{F}_s donnée dans (15) et d'après (16), \mathcal{F}_s est une fonction continue de (z, θ) qui est aussi holomorphe en z pour tout θ . Il reste à vérifier que pour tout $\tilde{\gamma} \in \tilde{\Gamma}$, pour tout $(z, \theta) \in \mathbb{D} \times \mathbb{R}$, $\mathcal{F}(\tilde{\gamma}(z, \theta))j_s(\tilde{\gamma}(z, \theta)) = \mathcal{F}(z, \theta)$. On a :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\tilde{\gamma}(z, \theta)) &= \mathcal{F}(\tilde{\gamma}(z), \tilde{\gamma}(\theta)) \\ &= \mathcal{S}_s\left(\left(\frac{1}{e^{i\cdot} - \tilde{\gamma}(z)}\right)^{2s} \chi_{[\tilde{\gamma}(\theta), \tilde{\gamma}(\theta) + 2\pi]}\right) \\ &= \mathcal{S}_s\left(\left(\frac{1}{e^{i\tilde{\gamma}^{-1}(\cdot)} - \tilde{\gamma}(z)}\right)^{2s} \chi_{[\tilde{\gamma}(\theta), \tilde{\gamma}(\theta) + 2\pi]}\right). \end{aligned}$$

Donc, d'après l'affirmation (9) et notre convention de notation $j_s(\tilde{\gamma}, (z, \theta)) = j_s(\tilde{\gamma}, z)$,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\tilde{\gamma}(z, \theta))j_s(\tilde{\gamma}, (z, \theta)) &= \mathcal{S}_s\left(\frac{1}{j_s(\tilde{\gamma}, \tilde{\gamma}^{-1}(\cdot))} \left(\frac{1}{e^{i\tilde{\gamma}^{-1}(\cdot)} - z}\right)^{2s} \chi_{[\tilde{\gamma}(\theta), \tilde{\gamma}(\theta) + 2\pi]}\right) \\ &= \mathcal{S}_s\left(\left(\frac{1}{j_s(\tilde{\gamma}, \cdot)} \left(\frac{1}{e^{i\cdot} - z}\right)^{2s} \chi_{[\theta, \theta + 2\pi]}\right) \circ \tilde{\gamma}^{-1}\right) \\ &= \tilde{\gamma}^*\mathcal{S}_s\left(\frac{1}{j_s(\tilde{\gamma}, \cdot)} \left(\frac{1}{e^{i\cdot} - z}\right)^{2s} \chi_{[\theta, \theta + 2\pi]}\right) \\ &= \mathcal{S}_s\left(j_s(\tilde{\gamma}, \cdot) \frac{1}{j_s(\tilde{\gamma}, \cdot)} \left(\frac{1}{e^{i\cdot} - z}\right)^{2s} \chi_{[\theta, \theta + 2\pi]}\right) \end{aligned}$$

d'après le lemme 6. Donc

$$\mathcal{F}(\tilde{\gamma}(z, \theta))j_s(\tilde{\gamma}, (z, \theta)) = \mathcal{S}_s\left(\left(\frac{1}{e^{i\cdot} - z}\right)^{2s} \chi_{[\theta, \theta + 2\pi]}\right) = \mathcal{F}(z, \theta).$$

\square

5. Structures hermitiennes

5.1. La structure hermitienne sur les fibrés $\mathcal{B}_s(\Gamma)$.

Soit $s \in \mathbb{R}$. Le fibré $\mathcal{B}_s(\Gamma)$ porte une métrique hermitienne naturelle, dont l'expression est calquée sur celle dont on munit les puissances tensorielles de fibrés en droites sur les variétés complexes. Soit $\lambda(z) = \frac{2}{1 - |z|^2}$; rappelons que la métrique hyperbolique sur \mathbb{D} s'écrit $\lambda^2(z)|u|_{euc}^2$.

On définit une métrique hermitienne sur le fibré $\widetilde{\text{SU}(1,1)} \times \mathbb{C}$ en prenant comme forme hermitienne dans la fibre au point $g \in \widetilde{\text{SU}(1,1)}$ de coordonnées (z, θ) dans la paramétrisation stable :

$$(20) \quad \|u\|_g^2 = \lambda(z)^{-2s} |u|^2.$$

Cette forme hermitienne est invariante par l'action de $\widetilde{\text{PSU}(1,1)}$. Soit en effet $\tilde{\gamma} \in \widetilde{\text{PSU}(1,1)}$ et soit γ son projeté dans $\text{PSU}(1,1)$. Pour tout $z \in \mathbb{D}$ on a :

$$\lambda(\gamma(z)) |\gamma'(z)| = \lambda(z).$$

Donc

$$|j_s(\tilde{\gamma}, (z, \theta))| = |\gamma'(z)|^s = \frac{\lambda(\gamma(z))^{-s}}{\lambda(z)^{-s}},$$

ce qui signifie que la métrique hermitienne donnée par (20) est invariante par $\widetilde{\text{PSU}(1,1)}$.

Considérons le fibré \mathcal{B}_s dans le cas général où $s \in \mathbb{C}$ et écrivons $s = \sigma + i\tau$, avec σ et τ réels. Une métrique hermitienne de la forme $u \mapsto c_s^2(z, \theta) |u|^2$ avec $c_s > 0$ est invariante si on a, pour tout $\tilde{\gamma} \in \widetilde{\text{PSU}(1,1)}$, et pour tout (z, θ) :

$$(21) \quad c_s(\tilde{\gamma}(z, \theta)) = c_s(z, \theta) |j_s(\tilde{\gamma}, (z, \theta))|.$$

D'après la définition du cocycle j_s , $j_s(\tilde{\gamma}, (z, \theta)) = e^{s \log \gamma'(z)} = j_\sigma(\tilde{\gamma}, (z, \theta)) j_{i\tau}(\tilde{\gamma}, (z, \theta))$. Cherchons le coefficient c_s sous la forme $c_s = c_\sigma c_{i\tau}$ de sorte que les conditions $c_\sigma(\tilde{\gamma}(z, \theta)) = c_\sigma(z, \theta) |j_\sigma(\tilde{\gamma}, (z, \theta))|$ et $c_{i\tau}(\tilde{\gamma}(z, \theta)) = c_{i\tau}(z, \theta) |j_{i\tau}(\tilde{\gamma}, (z, \theta))|$ soient satisfaites. D'après l'étude précédente, on peut choisir

$$(22) \quad c_\sigma(z, \theta) = \lambda(z)^{-\sigma}.$$

Considérons maintenant $c_{i\tau}$. D'après (13), on a :

$$(23) \quad j_{i\tau}(\tilde{\gamma}, (z, \theta)) j_{i\tau}(\tilde{\gamma}, \theta) = \frac{(\tilde{\gamma}(e^{i\theta}) - \gamma(z))^{2i\tau}}{(e^{i\theta} - z)^{2i\tau}},$$

avec la convention habituelle pour la définition des puissances complexes. D'après (8), $j_{i\tau}(\tilde{\gamma}, \theta) = |\gamma'(e^{i\theta})|^{i\tau} \frac{e^{-\tau \tilde{\gamma}(\theta)}}{e^{-\tau \theta}}$. Donc

$$|j_{i\tau}(\tilde{\gamma}, \theta)| = \frac{e^{-\tau \tilde{\gamma}(\theta)}}{e^{-\tau \theta}}.$$

Alors

$$(24) \quad c_{i\tau}(z, \theta) = \frac{|(e^{i\theta} - z)^{2i\tau}|}{e^{-\tau \theta}}$$

vérifie la condition d'invariance cherchée.

En conclusion :

Proposition 14. *Soit $s \in \mathbb{C}$; notons $\sigma = \Re s$ et $\tau = \Im s$. La métrique hermitienne*

$$(25) \quad u \mapsto \left(\frac{2}{(1 - |z|^2)} \right)^{-2\sigma} \frac{|(e^{i\theta} - z)^{4i\sigma}|}{e^{-2\tau \theta}} |u|^2$$

sur le fibré $\widetilde{\text{PSU}(1,1)} \times \mathbb{C}$ est invariante sous l'action de $\widetilde{\text{PSU}(1,1)}$ définie par le cocycle j_s .

Un corollaire est que pour tout groupe Fuchsien Γ , la forme hermitienne (25) passe au quotient en une forme hermitienne sur le fibré $\mathcal{B}_s(\Gamma)$.

On a $\mathcal{B}_s(\Gamma) \simeq \mathcal{B}_\sigma(\Gamma) \otimes \mathcal{B}_{i\tau}(\Gamma)$. La forme hermitienne sur $\mathcal{B}_s(\Gamma)$ est la forme naturelle produit tensoriel, les espaces $\mathcal{B}_\sigma(\Gamma)$ et $\mathcal{B}_{i\tau}(\Gamma)$ étant munis des produits définis par les coefficients c_σ et $c_{i\tau}$ respectivement.

5.2. Estimation ponctuelle du module des formes automorphes feuilletées.

Soit Γ un groupe Fuchsien cocompact. Nous allons utiliser la métrique hermitienne sur $\mathcal{B}_s(\Gamma)$ pour estimer la norme ponctuelle des formes automorphes.

Soit $s = \sigma + i\tau$ comme précédemment. Si ϕ est une forme automorphe de poids s , il découle de l'expression de la métrique hermitienne sur $\mathcal{B}_s(\Gamma)$ que la fonction

$$(z, \theta) \mapsto |\phi(z, \theta)|(1 - |z|^2)^\sigma \frac{|(e^{i\theta} - z)^{2i\tau}|}{e^{-\tau\theta}}$$

est invariante par $\tilde{\Gamma}$. Comme l'action de $\tilde{\Gamma}$ sur $\mathbb{D} \times \mathbb{R}$ est cocompacte, on en déduit l'existence, pour tout θ , d'une constante C_θ telle que, pour tout $z \in \mathbb{D}$,

$$(26) \quad |\phi(z, \theta)| \leq C_\theta \frac{1}{(1 - |z|)^\sigma},$$

où la constante C_θ est majorée sur les compacts de \mathbb{R} .

Affirmation 15. *Soit Γ un groupe Fuchsien cocompact. Alors, si $\Re s \leq 0$, $\mathcal{A}_s(\Gamma)$ est réduit à la forme nulle.*

5.3. La métrique hermitienne sur les espaces $\mathcal{A}_s(\Gamma)$.

Pour tout $s \in \mathbb{C}$, $\mathcal{A}_s(\Gamma)$ est un espace hermitien, en tant qu'espace de sections d'un fibré hermitien. Rappelons que l'espace tangent unitaire $T^1 X_\Gamma$ porte une mesure naturelle, *la mesure de Liouville*, qui dépend de la structure Riemannienne. Elle est le produit de la mesure d'aire sur la feuille stable passant par (z, θ) et de la mesure angulaire sur le cercle des vecteurs tangents au point z . Son expression est

$$d\mu = \lambda^2(z)P(z, \theta)dzd\bar{z}d\theta.$$

Soient ϕ et ψ deux formes automorphes de poids s , représentées par des fonctions toujours notées ϕ, ψ sur $\mathbb{D} \times \mathbb{R}$. La fonction $z \mapsto c_s^2(z, \theta)\phi(z, \theta)\overline{\psi(z, \theta)}$ est invariante par $\tilde{\Gamma}$ et passe donc au quotient en une fonction $c_s^2\phi\bar{\psi}$ sur $T^1 X_\Gamma$. Le produit hermitien sur $\mathcal{A}_s(\Gamma)$ est défini par

$$(27) \quad \langle \phi, \psi \rangle_s = \int_{T^1 X_\Gamma} c_s^2\phi\bar{\psi}d\mu.$$

En coordonnées, on a donc, en notant F un domaine fondamental pour l'action de Γ sur \mathbb{D} :

$$(28) \quad \langle \phi, \psi \rangle_s = \int_{F \times [0, 2\pi[} \phi(z, \theta)\overline{\psi(z, \theta)}\lambda^{2-2\sigma}(z)\frac{|(e^{i\theta} - z)^{4i\sigma}|}{e^{-2\tau\theta}}P(z, \theta)dx dy d\theta.$$

6. Les distributions associées à une forme automorphe feuilletée

Dans cette section, nous introduisons deux familles de distributions indexées par \mathbb{R} qui sont naturellement associées à une forme automorphe feuilletée : une famille de distributions sur $\partial\mathbb{D}$ et une famille de distributions sur \mathbb{R} .

6.1. La famille de distributions sur $\partial\mathbb{D}$ d'une forme automorphe feuilletée.

Soit Γ un groupe Fuchsien. Soit $\phi \in \mathcal{A}_s(\Gamma)$ une forme automorphe stable de poids s ; on interprète ϕ comme une fonction continue $\phi : \mathbb{D} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $(z, \theta) \mapsto \phi(z, \theta)$ holomorphe en z pour tout θ et qui vérifie la relation d'équivariance

$$(29) \quad \phi(\tilde{\gamma}(z, \theta))j_s(\tilde{\gamma}, (z, \theta)) = \phi(z, \theta).$$

De même que toute fonction holomorphe sur le disque \mathbb{D} , ϕ a une *valeur au bord* : c'est une distribution T_θ sur le bord $\partial\mathbb{D}$ du disque qui *représente* ϕ par le noyau de Cauchy, c'est-à-dire telle que pour tout $z \in \mathbb{D}$,

$$\phi(z, \theta) = \langle T_\theta, \frac{1}{\cdot - z} \rangle.$$

Cette seule relation ne suffit pas à caractériser T_θ . Toutefois, T_θ est unique dès qu'on impose que tous ses coefficients de Fourier $T_n = \langle T_\theta, e^{-in\theta} \rangle$ avec $n \leq 0$ sont nuls. En fait, si $\phi(z, \theta)$ s'écrit $\phi(z, \theta) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$, alors T_θ vérifie, pour toute fonction g de classe C^∞ :

$$T_\theta(g) = \frac{1}{2i\pi} \sum_{\mathbb{N}} a_n \int_{\partial\mathbb{D}} g(\xi) \xi^n d\xi,$$

intégrale sur le cercle unité orienté dans le sens trigonométrique.

Nous allons expliciter cette distribution pour préciser sa régularité en fonction de s .

Nous supposons que le poids s de la forme automorphe $\phi(z, \theta)$ a sa partie réelle $\sigma \in]0, 1[$.

Considérons la fonction holomorphe $F_\theta(z) = \int_0^z \phi(\zeta, \theta) d\zeta$. D'après (26), on a la majoration : $|F'_\theta(z)| \leq C_\theta \frac{1}{(1-|z|)^\sigma}$. Un théorème classique de Hardy-Littlewood dit alors que F_θ se prolonge continûment au bord $\partial\mathbb{D}$ en une fonction Hölder d'exposant $1 - \sigma$ [[Du], Th. 5.1]. On a

$$\begin{aligned} \phi(z, \theta) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial\mathbb{D}} F_\theta(\xi) \frac{1}{(\xi - z)^2} d\xi \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial\mathbb{D}} F_\theta(e^{i\psi}) \frac{ie^{i\psi}}{(e^{i\psi} - z)^2} d\psi \\ &= -\frac{1}{2i\pi} \int_{\partial\mathbb{D}} F_\theta(e^{i\psi}) \left(\frac{1}{e^{i\psi} - z} \right)' d\psi \\ &= \frac{1}{2i\pi} \langle DF_\theta(e^i), \frac{1}{e^i - z} \rangle, \end{aligned}$$

où $DF_\theta(e^i)$ est la distribution sur le cercle égale à la dérivée au sens des distributions de la fonction $\psi \mapsto F_\theta(e^{i\psi})$. Donc $T_\theta = \frac{1}{2i\pi} DF_\theta(e^i)$, est la dérivée au sens des distributions d'une fonction Hölder.

On voit sur cette expression que pour toute fonction $h : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$, de classe C^1 , holomorphe sur un voisinage du bord $\partial\mathbb{D}$, on a :

$$\langle T_\theta, h \rangle = \frac{1}{2i\pi} \lim_{r \rightarrow 1} \int_{r\partial\mathbb{D}} \phi(\xi) h(\xi) d\xi.$$

Définition 16. On dira que $(T_\theta)_{\theta \in \mathbb{R}}$ est la famille de distributions sur $\partial\mathbb{D}$ de la forme automorphe feuilletée ϕ .

La propriété de ϕ d'être automorphe de poids s pour Γ se traduit sur la famille des distributions au bord. Rappelons d'abord comment le groupe $\tilde{\Gamma}$, préimage de Γ dans $\widetilde{\text{PSU}}(1,1)$ agit sur $\overline{\mathbb{D}} \times \mathbb{R}$. Soit $\tilde{\gamma}$ un élément de $\tilde{\Gamma}$, au-dessus d'un élément $\gamma \in \Gamma$. L'action de $\tilde{\gamma}$ est : $(z, \theta) \mapsto (\gamma(z), \tilde{\gamma}(\theta))$. Donc $\tilde{\gamma}$ induit un difféomorphisme du cercle $\partial\mathbb{D} \times \{\theta\}$ sur le cercle $\partial\mathbb{D} \times \{\gamma(\theta)\}$ et agit par conséquent sur les distributions sur ces cercles ; on peut donc considérer la distribution $\tilde{\gamma}^* T_{\gamma(\theta)}$, une distribution sur le cercle $\partial\mathbb{D} \times \{\theta\}$. Avec ces notations, on a :

Proposition 17. Soit ϕ une forme automorphe feuilletée de poids s . Alors, la famille $(T_\theta)_{\theta \in \mathbb{R}}$ de distributions sur $\partial\mathbb{D}$ de ϕ vérifie : pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, pour tout $\tilde{\gamma} \in \tilde{\Gamma}$,

$$(30) \quad \tilde{\gamma}^* T_{\tilde{\gamma}(\theta)} = j_{1-s}(\tilde{\gamma}, \cdot) T_\theta.$$

Démonstration. Écrivons s sous la forme $s = \frac{1}{2} + i\tau$, avec $\tau \in \mathbb{C}$. Pour tout $z \in \mathbb{D}$, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} \phi(\tilde{\gamma}(z, \theta)) &= \langle T_{\tilde{\gamma}(\theta)}, \frac{1}{e^{i\cdot} - \gamma(z)} \rangle \\ &= \langle T_{\tilde{\gamma}(\theta)}, \left(\frac{1}{e^{i\tilde{\gamma}(\cdot)} - \gamma(z)} \right) \circ \tilde{\gamma}^{-1} \rangle \\ &= \langle \tilde{\gamma}^* T_{\tilde{\gamma}(\theta)}, \frac{1}{e^{i\tilde{\gamma}(\cdot)} - \gamma(z)} \rangle \\ &= \langle \tilde{\gamma}^* T_{\tilde{\gamma}(\theta)}, \frac{1}{e^{i\cdot} - z} \frac{1}{j_{\frac{1}{2}}(\tilde{\gamma}, \cdot)} \frac{1}{j_{\frac{1}{2}}(\tilde{\gamma}, z)} \rangle \\ &= \frac{1}{j_{\frac{1}{2}}(\tilde{\gamma}, z)} \langle \frac{1}{j_{\frac{1}{2}}(\tilde{\gamma}, \cdot)} \tilde{\gamma}^* T_{\tilde{\gamma}(\theta)}, \frac{1}{e^{i\cdot} - z} \rangle. \end{aligned}$$

Donc, d'après la relation d'équivariance (29), on a :

$$(31) \quad \langle \frac{1}{j_{\frac{1}{2}}(\tilde{\gamma}, \cdot)} \tilde{\gamma}^* T_{\tilde{\gamma}(\theta)}, \frac{1}{e^{i\cdot} - z} \rangle = \frac{1}{j_{i\tau}(\tilde{\gamma}, z)} \langle T_{\theta}, \frac{1}{e^{i\cdot} - z} \rangle.$$

D'autre part,

$$\langle \frac{1}{j_{i\tau}(\tilde{\gamma}, \cdot)} T_{\theta}, \frac{1}{e^{i\cdot} - z} \rangle = \langle T_{\theta}, \frac{1}{j_{i\tau}(\tilde{\gamma}, \cdot)} \frac{1}{e^{i\cdot} - z} \rangle$$

et, en utilisant la remarque faite avant la définition 16,

$$\begin{aligned} \langle T_{\theta}, \frac{1}{j_{i\tau}(\tilde{\gamma}, \cdot)} \frac{1}{e^{i\cdot} - z} \rangle &= \lim_{r \rightarrow 1} \frac{1}{2i\pi} \int_{r\partial\mathbb{D}} \phi(\xi, \theta) \frac{1}{j_{i\tau}(\tilde{\gamma}, \xi)} \frac{1}{\xi - z} d\xi \\ &= \frac{1}{j_{i\tau}(\tilde{\gamma}, z)} \phi(z, \theta), \end{aligned}$$

d'après la formule de Cauchy. Donc, d'après (31), les deux distributions $\frac{1}{j_{\frac{1}{2}}(\tilde{\gamma}, \cdot)} \tilde{\gamma}^* T_{\tilde{\gamma}(\theta)}$ et

$\frac{1}{j_{i\tau}(\tilde{\gamma}, \cdot)} T_{\theta}$ représentent la même fonction holomorphe. Elles ont toutes les deux des coefficients de Fourier négatifs nuls (d'abord parce que c'est le cas, par définition pour les T_{θ} et donc aussi pour les $\tilde{\gamma}^* T_{\tilde{\gamma}(\theta)}$, ensuite parce que les fonctions $\frac{1}{j_{\frac{1}{2}}(\tilde{\gamma}, \cdot)}$ et $\frac{1}{j_{i\tau}(\tilde{\gamma}, \cdot)}$ sont holomorphes, continues sur $\bar{\mathbb{D}}$). Elles sont donc égales :

$$(32) \quad \frac{1}{j_{\frac{1}{2}}(\tilde{\gamma}, \cdot)} \tilde{\gamma}^* T_{\tilde{\gamma}(\theta)} = \frac{1}{j_{i\tau}(\tilde{\gamma}, \cdot)} T_{\theta},$$

ce qui est équivalent au résultat cherché : $\tilde{\gamma}^* T_{\tilde{\gamma}(\theta)} = j_{1-s}(\tilde{\gamma}, \cdot) T_{\theta}$. \square

Réciproquement, supposons donnée une famille faiblement continue $(T_{\theta})_{\theta \in \mathbb{R}}$ de distributions sur $\partial\mathbb{D}$ c'est-à-dire pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ la donnée d'une distribution T_{θ} sur le cercle $\partial\mathbb{D}$ telle que $\theta \mapsto T_{\theta}$ soit faiblement continue, c'est-à-dire telle que pour toute fonction $h : \partial\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ de classe C^k , $\theta \mapsto \langle T_{\theta}, h \rangle$ soit continue. Alors $(z, \theta) \mapsto \phi(z, \theta) = \langle T_{\theta}, \frac{1}{\cdot - z} \rangle$ est une fonction continue, holomorphe en z pour tout θ .

Proposition 18. Si la famille de distributions $(T_{\theta})_{\theta \in \mathbb{R}}$ vérifie : pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, pour tout $\tilde{\gamma} \in \tilde{\Gamma}$, on a :

$$\tilde{\gamma}^* T_{\tilde{\gamma}(\theta)} = j_{1-s}(\tilde{\gamma}, \cdot) T_{\theta},$$

alors ϕ définit une forme automorphe feuilletée de poids s pour Γ .

Démonstration. Il suffit de vérifier la propriété d'automorphie (2). On reprend ligne à ligne la démonstration précédente. L'hypothèse de la proposition entraîne (32) qui entraîne (31). D'après la définition de ϕ , cette dernière égalité est équivalente à la relation d'automorphie (29). \square

6.2. La famille de distributions sur \mathbb{R} d'une forme automorphe feuilletée.

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, soit $\mathbb{R} \times \{\theta\}$ le revêtement universel de $\partial\mathbb{D} \times \{\theta\}$, $(\psi, \theta) \mapsto (e^{i\psi}, \theta)$. Nous donnons d'abord un façon de relever la famille de distributions $(T_\theta)_{\theta \in \mathbb{R}}$ en une famille de distributions $(\widetilde{T}_\theta)_{\theta \in \mathbb{R}}$ sur \mathbb{R} . Cette construction utilise la propriété que chaque distribution T_θ est la dérivée au sens des distributions d'une fonction Hölder (cf section précédente).

Affirmation 19. *Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, il existe une unique distribution \widetilde{T}_θ sur \mathbb{R} avec les propriétés suivantes :*

- (1) \widetilde{T}_θ est la dérivée d'une fonction Hölder ;
- (2) \widetilde{T}_θ est $(1-s)$ -conforme pour l'action sur \mathbb{R} de la translation $\psi \mapsto \psi + 2\pi$, c'est-à-dire qu'elle vérifie : pour toute fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, C^∞ et à support compact, $e^{2i\pi(1-s)}\widetilde{T}_\theta(g(\cdot - 2\pi)) = \widetilde{T}_\theta(g)$;
- (3) pour toute fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, C^∞ et à support contenu dans $[\theta, \theta + 2\pi]$, on a : $\widetilde{T}_\theta(g) = T_\theta(\hat{g})$, où $\hat{g} : \partial\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ est la fonction définie par $\hat{g}(e^{i\phi}) = g(\phi)$.

Démonstration. Supposons d'abord qu'il existe une distribution \widetilde{T}_θ avec les trois propriétés ci-dessus. Alors la valeur de \widetilde{T}_θ sur les fonctions à support contenu dans $]\theta, \theta + 2\pi[$ est déterminée par (3). Puisque \widetilde{T}_θ est la dérivée au sens des distributions d'une fonction Hölder, elle se prolonge continûment à l'espace des fonctions dérivables sur $[\theta, \theta + 2\pi]$ et est égale, en restriction à cet espace, à la dérivée au sens des distributions de la fonction $\psi \mapsto \frac{1}{2i\pi}F_\theta(e^{i\psi})$ (lemme 12). D'après la propriété (1), sur l'intervalle $[\theta + 2k\pi, \theta + 2(k+1)\pi]$, \widetilde{T}_θ est alors la dérivée au sens des distributions de la fonction $\psi \mapsto \frac{1}{2i\pi}e^{2i\pi ks}F_\theta(e^{i\psi})$.

Réciproquement, on montre rapidement que la distribution sur \mathbb{R} qui est égale sur chaque intervalle $[\theta + 2k\pi, \theta + 2(k+1)\pi]$ à la dérivée au sens des distributions de la fonction ci-dessus est la dérivée au sens des distributions d'une fonction Hölder, bien définie à une constante additive près. \square

Nous allons maintenant étudier comment les distributions (\widetilde{T}_θ) se transforment sous l'action de $\widetilde{\Gamma}$.

L'action de $\widetilde{\text{PSU}}(1,1)$ sur $\partial\mathbb{D} \times \mathbb{R}$ se relève en une action sur le revêtement universel. Soit $\tilde{\gamma} \in \widetilde{\text{PSU}}(1,1)$ un élément au-dessus de $\gamma \in \text{PSU}(1,1)$. Son action $\tilde{\gamma} : \partial\mathbb{D} \times \mathbb{R} \rightarrow \partial\mathbb{D} \times \mathbb{R}$, $(\xi, \theta) \mapsto (\gamma(\xi), \tilde{\gamma}(\theta))$ se relève en une action sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et ce relevé envoie (θ, θ) sur $(\tilde{\gamma}(\theta), \tilde{\gamma}(\theta))$.

On note $\tilde{j}_{1-s}(\tilde{\gamma}, \cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ le relevé du cocycle $j_{1-s}(\tilde{\gamma}, \cdot) : \partial\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C} : \tilde{j}_{1-s}(\tilde{\gamma}, \psi) = j_{1-s}(\tilde{\gamma}, e^{i\psi})$.

Prenons un exemple : soit $C \in \widetilde{\text{PSU}}(1,1)$ l'extrémité du relèvement du lacet $c : [0, 2\pi] \rightarrow \text{PSU}(1,1)$ défini par $c(\tau) = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\tau}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\tau}{2}} \end{pmatrix}$. C'est un élément au-dessus de $\text{Id} \in \text{PSU}(1,1)$; le relevé de l'action de C est $(\psi, \theta) \mapsto (\psi + 2\pi, \theta + 2\pi)$ et $j_{1-s}(C, \psi) = e^{(1-s)2i\pi} = e^{-2is\pi}$. Par ailleurs, C étant un générateur du centre de $\widetilde{\text{PSU}}(1,1)$, l'action de tout élément $\tilde{\gamma} \in \widetilde{\text{PSU}}(1,1)$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ commute avec la translation $(\psi, \theta) \mapsto (\psi + 2\pi, \theta + 2\pi)$.

Affirmation 20. *Sous l'action de $\widetilde{\Gamma}$, la famille de distributions $(\widetilde{T}_\theta)_{\theta \in \mathbb{R}}$ vérifie la relation d'automorphie suivante : pour tout $\tilde{\gamma} \in \widetilde{\Gamma}$, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,*

$$\tilde{\gamma}^* \widetilde{T}_{\tilde{\gamma}(\theta)} = \tilde{j}_{1-s}(\tilde{\gamma}, \cdot) \widetilde{T}_\theta.$$

Démonstration. En effet, d'après la proposition et la définition de $(\widetilde{T}_\theta)_{\theta \in \mathbb{R}}$, cette relation est vérifiée dans le cas des fonctions dont le support est contenu dans un intervalle de la forme $[\theta, \theta + 2\pi] \times \{\theta\}$. On la déduit ensuite pour les fonctions dont le support est contenu dans un intervalle $[\theta + 2k\pi, \theta + 2(k+1)\pi]$ en se ramenant au premier cas en utilisant la propriété (2) de \widetilde{T}_θ . \square

7. Formes automorphes feuilletées de poids s et $1-s$

Soit Γ un groupe Fuchsien cocompact. Soit $s \in \mathbb{C}$ avec $\Re s \in]0, 1[$. Le but de cette section est de construire un isomorphisme entre les espaces $\mathcal{A}_s(\Gamma)$ et $\mathcal{A}_{1-s}(\Gamma)$.

7.1. Un opérateur entre $\mathcal{A}_s(\Gamma)$ et $\mathcal{A}_{1-s}(\Gamma)$.

Nous allons définir une application linéaire $\Phi_s : \mathcal{A}_s(\Gamma) \rightarrow \mathcal{A}_{1-s}(\Gamma)$. Nous donnons d'abord une première définition qui utilise la famille de distributions $(\widetilde{T}_\theta)_{\theta \in \mathbb{R}}$ construite précédemment à partir d'un élément de $\mathcal{A}_s(\Gamma)$. Nous donnerons ensuite une autre définition en termes de l'intégrale de Riemann-Liouville.

Soit $\phi \in \mathcal{A}_s(\Gamma)$.

Première définition. On pose, pour $(z, \theta) \in \mathbb{D} \times \mathbb{R}$:

$$(33) \quad \psi(z, \theta) = \langle \widetilde{T}_\theta, \left(\frac{1}{e^{i\cdot} - z} \right)^{2(1-s)} \chi_{[\theta, \theta+2\pi]} \rangle.$$

Affirmation 21. La fonction $\psi : \mathbb{D} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ définit une forme automorphe feuilletée de poids $1-s$.

Démonstration. La fonction ψ est continue : ceci découle du fait que $\theta \mapsto F_\theta(\cdot)$ est continue, comme fonction à valeurs dans l'espace des fonctions Hölder d'exposant $1-\sigma$ sur $\partial\mathbb{D}$, muni de la norme Hölder. Par définition, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $z \mapsto \psi(z, \theta)$ est holomorphe. Étant donnée la relation vérifiée par les distributions (\widetilde{T}_θ) établie dans l'affirmation 20, on montre que $\psi \in \mathcal{A}_{1-s}(\Gamma)$ comme dans le théorème 11. \square

Deuxième définition.

Nous allons maintenant définir différemment la forme automorphe feuilletée ψ , en termes cette fois de l'intégrale de Riemann-Liouville. Désignons toujours par

$$F_\theta(z) = \int_0^z \phi(\zeta, \theta) d\zeta$$

la primitive de $\phi(\cdot, \theta)$. On a, par définition de ψ :

$$\begin{aligned} \psi(z, \theta) &= \langle \widetilde{T}_\theta, \left(\frac{1}{(e^{i\cdot} - z)^{2(1-s)}} \right) \chi_{[\theta, \theta+2\pi]} \rangle = \langle \frac{1}{2i\pi} DF_\theta(e^{i\cdot}), \left(\frac{1}{(e^{i\cdot} - z)^{2(1-s)}} \right) \chi_{[\theta, \theta+2\pi]} \rangle \\ &= -\frac{1}{2i\pi} \int_\theta^{\theta+2\pi} F_\theta(e^{i\psi}) \left(\frac{1}{(e^{i\psi} - z)^{2(1-s)}} \right)' d\psi + \frac{1}{2i\pi} (e^{-4(1-s)i\pi} - 1) F_\theta(e^{i\theta}) \frac{1}{(e^{i\theta} - z)^{2(1-s)}}. \end{aligned}$$

On peut écrire aussi :

$$2i\pi\psi(z, \theta) = 2(1-s) \int_{e^{i\theta}}^{e^{i(\theta+2\pi)}} F_\theta(\zeta) \frac{1}{(\zeta - z)^{2(1-s)+1}} d\zeta + (e^{-4(1-s)i\pi} - 1) F_\theta(e^{i\theta}) \frac{1}{(e^{i\theta} - z)^{2(1-s)}}.$$

Nous allons simplifier cette expression de $\psi(z, \theta)$ et calculer l'intégrale en la remplaçant par une intégrale curviligne. Choisissons un chemin plongé c contenu dans \mathbb{D} joignant z à $e^{i\theta}$, par exemple un segment de droite, ou bien la géodésique hyperbolique. Considérons la surface de Riemann à bord \mathbb{D}_θ obtenue en découpant \mathbb{D} le long de ce chemin. Le bord de \mathbb{D}_θ est formé du chemin contenu dans $\partial\mathbb{D}$ qui joint $e^{i\theta}$ à lui-même et de deux copies de c parcourues dans des sens opposés ; l'une des copies de c , c^+ , aboutit au point $e^{i\theta}$, l'autre, c^- , aboutit au point $e^{i(\theta+2\pi)}$.

Pour $r \in \mathbb{C}$, considérons la fonction $G_\theta : \mathbb{D}_\theta \rightarrow \mathbb{C}$, définie par

$$G_\theta(\zeta) = F_\theta(\zeta) \frac{1}{(\zeta - z)^{2(1-r)+1}}$$

où on choisit la fonction $(\zeta - z)^{2(1-r)+1}$ de sorte qu'elle soit égale à $(e^{i\psi} - z)^{2(1-r)+1}$ sur le chemin $]e^{i\theta} e^{i(\theta+2\pi)}[$ contenu dans $\partial\mathbb{D}_\theta$. Alors, G_θ est continue sur \mathbb{D}_θ et holomorphe en la variable ζ sur

l'intérieur de \mathbb{D}_θ . Si ζ^+ et ζ^- sont les deux copies respectivement contenues dans c^+ et dans c^- d'un point $\zeta \in c$, on a : $G_\theta(\zeta^-) = e^{-4(1-r)i\pi} G_\theta(\zeta^+)$.

Pour tous les $r \in \mathbb{C}$ tels que $\Re r > 1$, on a alors :

$$\int_{e^{i\theta}}^{e^{i(\theta+2\pi)}} F_\theta(\zeta) \frac{1}{(\zeta - z)^{2(1-r)+1}} d\zeta = (e^{-4(1-r)i\pi} - 1) \int_c F_\theta(\zeta) \frac{1}{(\zeta - z)^{2(1-r)+1}} d\zeta$$

en appliquant la formule de Cauchy à G_θ sur la surface D_θ , étant donné que F_θ est continue sur $\overline{\mathbb{D}}$. Dans cette expression le terme de gauche est une fonction entière de r , ce qui montre que l'intégrale $\int_c F_\theta(\zeta) \frac{1}{(\zeta - z)^{2(1-r)+1}} d\zeta$ se prolonge, comme fonction de r , en une fonction méromorphe sur tout le plan complexe. Plus généralement, si la fonction holomorphe $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ a une certaine croissance au voisinage du point $e^{i\theta} \in \partial\mathbb{D}$, et si c est un chemin joignant z à $e^{i\theta}$, alors

$$\alpha \mapsto \mathcal{I}_\alpha f(z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_c f(\zeta) \frac{1}{(\zeta - z)^{-\alpha+1}} d\zeta$$

a un prolongement holomorphe à tout le plan complexe d'après la théorie de *l'intégrale de Riemann-Liouville*. Nous rappellerons plus loin quelques résultats importants de cette théorie [Ri] mais disons tout de suite que la propriété de croissance au voisinage de $e^{i\theta}$ est satisfaite par la fonction F_θ (qui est continue jusqu'au bord) et aussi par $\phi(\cdot, \theta)$. Une intégration par parties donne, pour tout $r \in \mathbb{C}$ avec $\Re r > 1$:

$$2(1-r) \int_c F_\theta(\zeta) \frac{1}{(\zeta - z)^{2(1-r)+1}} d\zeta = \int_c \phi(\zeta, \theta) \frac{1}{(\zeta - z)^{2(1-r)}} d\zeta - F_\theta(e^{i\theta}) \frac{1}{(e^{i\theta} - z)^{2(1-r)}},$$

et donc

$$-\mathcal{I}_{2r-2} F_\theta = \mathcal{I}_{2r-1} \phi(\cdot, \theta) - \frac{1}{\Gamma(2r-1)} F_\theta(e^{i\theta}) \frac{1}{(e^{i\theta} - z)^{2(1-r)}}.$$

Par prolongement analytique, la même relation est vérifiée pour toutes les valeurs de r , et en particulier pour celles qui nous intéressent : $0 < \Re r < 1$. En reportant dans l'expression de $\psi(z, \theta)$, il vient après simplification :

$$\begin{aligned} \psi(z, \theta) &= \frac{1}{2i\pi} (e^{-4(1-s)i\pi} - 1) \int_c \phi(\zeta, \theta) \frac{1}{(\zeta - z)^{2(1-s)}} d\zeta \\ &= \frac{(e^{-4(1-s)i\pi} - 1)\Gamma(2s-1)}{2i\pi} \mathcal{I}_{2s-1} \phi(\cdot, \theta). \end{aligned}$$

On note que le facteur $(e^{-4(1-s)i\pi} - 1)\Gamma(2s-1)$ est une fonction holomorphe de s qui ne s'annule pas dans la bande $0 < \Re s < 1$. On définit un opérateur $\Phi_s : \mathcal{A}_s(\Gamma) \rightarrow \mathcal{A}_{1-s}(\Gamma)$ en normalisant ψ .

Définition 22. Soit $s \in \mathbb{C}$, $\Re s \in]0, 1[$. On note $\Phi_s : \mathcal{A}_s(\Gamma) \rightarrow \mathcal{A}_{1-s}(\Gamma)$ l'opérateur défini en posant, pour tout $\phi \in \mathcal{A}_s(\Gamma)$:

$$\Phi_s(\phi)(z, \theta) = \frac{2i\pi}{(e^{-4(1-s)i\pi} - 1)\Gamma(2s-1)} \psi(z, \theta) = \mathcal{I}_{2s-1} \phi(\cdot, \theta).$$

Dans cette expression, l'opérateur d'intégration fractionnaire est appliqué feuille à feuille, et sur la feuille $\mathbb{D} \times \{\theta\}$, en intégrant le long d'un chemin joignant le point z au point $e^{i\theta}$. Si $\frac{1}{2} < \Re s < 1$, l'intégrale est à prendre au sens ordinaire car $\phi(\zeta, \theta) \frac{1}{(\zeta - z)^{2(1-s)}}$ est absolument intégrable, mais si $0 < \Re s \leq \frac{1}{2}$, le terme de droite est une intégrale de Riemann-Liouville.

7.2. Rappels sur l'intégrale de Riemann-Liouville.

Nous rappelons maintenant quelques éléments de l'intégrale de Riemann-Liouville en renvoyant à l'article de Marcel Riesz [Ri] pour les démonstrations. Dans le cas le plus classique, l'intégrale de Riemann-Liouville de f est définie pour les fonctions intégrables sur un intervalle

borné $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Parmi ses propriétés, elle envoie l'espace $L^p([a, b])$ continûment dans lui-même, pour tout $p \geq 1$. Dans notre cas, les fonctions étudiées sont holomorphes et les espaces fonctionnels suivants apparaissent de façon naturelle.

Définissons d'abord pour un point $\xi \in \partial\mathbb{D}$ et un réel $\beta > 0$, le cône $V_\beta(\xi)$ centré en ξ comme l'ensemble des points $z \in \mathbb{D}$ tels que $|z - \xi| \leq \beta(1 - |z|)$.

Définition des espaces fonctionnels. Soit $e^{i\theta} \in \partial\mathbb{D}$ un point du bord du disque. Soit $\sigma \in \mathbb{R}$. On définit $\mathcal{H}_\sigma(e^{i\theta})$ comme l'ensemble des fonctions holomorphes $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ qui vérifient la propriété de croissance suivante au voisinage de $e^{i\theta}$:

il existe un cône centré en $e^{i\theta}$, $V_\beta(e^{i\theta})$ pour un $\beta > 0$, et une constante $C_\beta > 0$ tels que pour tout $z \in V_\beta(e^{i\theta})$ suffisamment proche de $e^{i\theta}$:

$$|f(z)| \leq C \frac{1}{(1 - |z|)^\sigma}.$$

Remarque 23. D'après l'inégalité 26, si $\phi(\cdot, \cdot)$ est une forme feuilletée automorphe de poids s pour un groupe Fuchsien cocompact Γ , alors $\phi(\cdot, \theta) \in \mathcal{H}_\sigma(e^{i\theta})$ pour tout θ et l'inégalité est même satisfaite pour tous les choix de cônes.

L'observation suivante sera importante dans la suite.

Affirmation 24. Si $f \in \mathcal{H}_\sigma(e^{i\theta})$, sa dérivée f' appartient à $\mathcal{H}_{\sigma+1}(e^{i\theta})$.

Démonstration. Soit $V_\beta(e^{i\theta})$ un cône centré en $e^{i\theta}$ tel que $|f(z)| \leq C \frac{1}{(1 - |z|)^\sigma}$ pour tout z dans un voisinage $\mathcal{V}_\beta(e^{i\theta})$ de $e^{i\theta}$ contenu dans $V_\beta(e^{i\theta})$. Soit $\beta' < \beta$, il existe $\rho > 0$ tel que en tout point z de $V_{\beta'}(e^{i\theta})$ suffisamment proche de $e^{i\theta}$, la boule euclidienne de rayon $\rho(1 - |z|)$ centrée en z est contenue dans $V_\beta(e^{i\theta})$. D'après la formule de Cauchy, la valeur de la dérivée d'une fonction holomorphe en un point est contrôlée par les valeurs de cette fonction sur un cercle autour de ce point. On a ici : $|f'(z)| \leq \frac{C'}{(1 - |z|)} \sup\{|f(z')|, |z - z'| = \rho(1 - |z|)\}$ pour une constante C' indépendante de ρ . Ceci entraîne le résultat cherché. \square

Définition de l'intégrale de Riemann-Liouville.

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ avec $\Re\alpha > 0$. Soit $\sigma < 1$. Si $f \in \mathcal{H}_\sigma$, on définit l'intégrale de Riemann-Liouville d'ordre α de f :

$$(34) \quad \mathcal{I}_\alpha f(z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_c f(\zeta) \frac{1}{(\zeta - z)^{-\alpha+1}} d\zeta.$$

Le chemin d'intégration c est un chemin rectifiable et quasi-géodésique dans le disque hyperbolique \mathbb{D} qui joint z à $e^{i\theta}$; ceci entraîne que c reste à distance hyperbolique bornée de la géodésique entre ces deux points. On peut prendre pour c le segment de droite entre z et $e^{i\theta}$, par exemple. Comme $\sigma < 1$, la majoration (i) de $|f|$ entraîne que l'intégrale est absolument convergente au voisinage de $e^{i\theta}$ et que sa valeur ne dépend pas du chemin c choisi ; de plus $\mathcal{I}_\alpha f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction holomorphe.

Supposons $\sigma < 1$. Si $f \in \mathcal{H}_\sigma$, on pose pour simplifier $\mathcal{I}f = \mathcal{I}_1 f$. Alors $\mathcal{I}f$ est une primitive de $-f$, et $\mathcal{I}f \in \mathcal{H}_{\sigma-1}$.

Rappelons que l'opérateur Φ_s défini dans la section précédente est, à un facteur près, l'opérateur d'intégration de Riemann-Liouville \mathcal{I}_{2s-1} (Définition 22). Comme nous nous sommes restreints aux formes automorphes de poids s avec $\Re s \in]0, 1[$, les ordres des intégrales de Riemann-Liouville qui nous intéresseront auront leur partie réelle dans l'intervalle $] - 1, 1[$.

Prolongement holomorphe.

Une propriété remarquable de l'intégrale de Riemann-Liouville est que $\alpha \mapsto \mathcal{I}_\alpha f(z)$ se prolonge en une fonction holomorphe sur tout le plan complexe. Nous ne montrerons que le prolongement au demi-plan $\{\Re\alpha > -1\}$. Soit $\sigma < 1$ et soit $f \in \mathcal{H}_\sigma$. Si $\Re\alpha > 0$, on a :

$$\mathcal{I}_\alpha f(z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_c \frac{f(\zeta) - f(z)}{(\zeta - z)^{1-\alpha}} d\zeta + \frac{f(z)}{\Gamma(\alpha)} \int_c (\zeta - z)^{\alpha-1} d\zeta,$$

Donc,

$$\mathcal{I}_\alpha f(z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_c \frac{f(\zeta) - f(z)}{(\zeta - z)^{1-\alpha}} d\zeta + \frac{f(z)}{\Gamma(\alpha+1)} (e^{i\theta} - z)^\alpha.$$

Par ailleurs, si $\Re\alpha > -1$, le membre de droite reste bien défini pour $f \in \mathcal{H}_\sigma$ puisque chacun des deux termes l'est. C'est évident pour le deuxième ; quant au premier, il est bien défini puisque f est dérivable au point z . D'autre part, ce membre de droite est une fonction holomorphe de α sur $\{\Re\alpha > -1\}$; on obtient ainsi le prolongement analytique de $\mathcal{I}_\alpha f$ au demi-plan $\{\Re\alpha > -1\}$.

Ce raisonnement peut facilement être modifié pour établir le prolongement de $\mathcal{I}_\alpha f$ à tout le plan complexe : il suffit de retrancher de la même manière sous l'intégrale le développement de Taylor de f au point z , développement effectué à un ordre fini quelconque. Par exemple, pour prolonger à $\{\Re\alpha > -2\}$, on écrit :

$$\mathcal{I}_\alpha f(z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_c \frac{f(\zeta) - f(z) - f'(z)(\zeta - z)}{(\zeta - z)^{1-\alpha}} d\zeta + \frac{f(z)}{\Gamma(\alpha+1)} (e^{i\theta} - z)^\alpha + \frac{f'(z)}{(\alpha+1)\Gamma(\alpha)} (e^{i\theta} - z)^{\alpha+1}.$$

Le membre de droite est toujours défini lorsque $\Re\alpha > -2$ et donne le prolongement cherché de $\mathcal{I}_\alpha f$.

L'expression ci-dessus de $\mathcal{I}_\alpha f$, pour $\Re\alpha > -2$, donne les cas particuliers suivants (puisque 0 et -1 sont des pôles de la fonction Γ) :

Remarque 25. Soit $\sigma < 1$. Pour tout $f \in \mathcal{H}_\sigma$, $\mathcal{I}_0 f = f$ et $\mathcal{I}_{-1} f = -f'$.

Remarque 26. Soit $\sigma < 1$: pour tout $f \in \mathcal{H}_\sigma$, une intégration par parties donne, quand $\alpha > 0$, $\mathcal{I}_\alpha \circ \mathcal{I} f = \mathcal{I}_{\alpha+1} f$. Par prolongement analytique, cette relation reste vérifiée pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$.

Équation fonctionnelle.

Dans le cas de fonctions d'une variable réelle, on sait que pour tout α et $\beta \in \mathbb{C}$, $\mathcal{I}_\alpha(\mathcal{I}_\beta f) = \mathcal{I}_{\alpha+\beta} f$ pour les fonctions f dans le bon espace fonctionnel ; cette relation s'obtient par prolongement analytique à partir de la même relation lorsque $\Re\alpha$ et $\Re\beta$ sont positifs [Ri, p.10]. Nous allons montrer que cette relation est encore vérifiée dans notre cas. Nous allons d'abord nous assurer que si $f \in \mathcal{H}_\sigma$, alors $\mathcal{I}_\alpha(\mathcal{I}_\beta f)$ est bien défini, en montrant que $\mathcal{I}_\beta f$ est dans un espace $\mathcal{H}_{\sigma'}$ pour un certain $\sigma' < 1$; après ce qui a déjà été dit, il reste à étudier la croissance de $\mathcal{I}_\beta f$ au voisinage de $e^{i\theta}$.

Affirmation 27. Soient $\beta \in \mathbb{C}$ avec $\Re\beta > 0$ et $\sigma \in \mathbb{R}$ avec $\sigma < 1$. Si $f \in \mathcal{H}_\sigma$, alors $\mathcal{I}_\beta f \in \mathcal{H}_{\sigma-\Re\beta}$.

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{H}_\sigma$ et soit \mathcal{V} le voisinage de $e^{i\theta}$ dans un cône centré en $e^{i\theta}$ sur lequel on a la majoration : $|f(z)| \leq C \frac{1}{(1-|z|)^\sigma}$ pour $z \neq e^{i\theta}$. Nous allons donner une majoration du même type pour $|\mathcal{I}_\beta f(z)|$, quand z est dans ce même voisinage \mathcal{V} . On choisit comme chemin c le segment de droite entre z et $e^{i\theta}$ que l'on paramètre par l'intervalle $[0, 1]$ avec l'application $x \mapsto z + x(e^{i\theta} - z)$. On a donc, pour tout $z \in \mathcal{V}$:

$$\begin{aligned} |\mathcal{I}_\beta f(z)| &= \left| \frac{1}{\Gamma(\beta)} (e^{i\theta} - z)^\beta \int_0^1 f(z + x(e^{i\theta} - z)) \frac{1}{x^{1-\beta}} dx \right| \\ &\leq C_{\sigma,\beta} |e^{i\theta} - z|^{\Re\beta-\sigma} \int_0^1 (1-x)^{-\sigma} x^{\Re\beta-1} dx \\ &\leq C' |e^{i\theta} - z|^{\Re\beta-\sigma}, \end{aligned}$$

ce qui montre l'affirmation avec $C' = C_{\sigma,\beta} \int_0^1 (1-x)^{-\sigma} x^{\Re\beta-1} dx$. □

Sous l'hypothèse que $\Re\alpha$ et $\Re\beta$ sont positifs, on montre alors la relation $\mathcal{I}_\alpha(\mathcal{I}_\beta f) = \mathcal{I}_{\alpha+\beta}f$ comme dans [Ri]. On a plus généralement :

Proposition 28. *Soit $\sigma \in \mathbb{R}$ avec $0 < \sigma < 1$; soient α et $\beta \in \mathbb{C}$, avec $\Re\beta > -1$, $\Re\beta > \sigma - 1$ et $\Re(\alpha + \beta) > -1$. Alors si $f \in \mathcal{H}_\sigma$, $\mathcal{I}_\alpha(\mathcal{I}_\beta f) = \mathcal{I}_{\alpha+\beta}f$.*

Les hypothèses sur les parties réelles de α et $\alpha + \beta$ pourraient être affaiblies, mais nous n'utiliserons la proposition que sous ces hypothèses.

Démonstration. Supposons dans un premier temps $\Re\beta > 0$. D'après l'affirmation (27), $\mathcal{I}_\beta f \in \mathcal{H}_{\sigma-\Re\beta}$ et donc, puisque $\sigma - \Re\beta < 1$, $\mathcal{I}_\alpha(\mathcal{I}_\beta(f))$ est bien défini pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$ et $\alpha \mapsto \mathcal{I}_\alpha(\mathcal{I}_\beta f(z))$ est une fonction holomorphe sur \mathbb{C} , pour tout $z \in \mathbb{D}$. Sur l'ouvert $\{0 < \Re\alpha < 1\}$, elle coïncide avec la fonction holomorphe $\alpha \mapsto \mathcal{I}_{\alpha+\beta}f(z)$ d'après ce qui a été dit plus haut. Donc, par prolongement analytique, on a $\mathcal{I}_\alpha(\mathcal{I}_\beta f) = \mathcal{I}_{\alpha+\beta}f$ pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$.

Supposons maintenant $\Re\beta \leq 0$. On écrit $\beta = \beta' - 1$. Alors, par hypothèse, $\Re\beta' > \sigma$ et $\Re\beta' > 0$. On est donc sous les hypothèses du paragraphe précédent mais avec β' au lieu de β . En particulier, $\mathcal{I}_\beta f = \mathcal{I}_{-1}(\mathcal{I}_{\beta'} f)$. Comme $\mathcal{I}_{\beta'} f \in \mathcal{H}_{\sigma-\Re\beta'}$ (affirmation (27)) et que $\sigma - \Re\beta' < 0$ et en particulier $\sigma - \Re\beta' < 1$, $\mathcal{I}_{-1}(\mathcal{I}_{\beta'} f) = -(\mathcal{I}_{\beta'} f)'$ (remarque (25)). Donc $\mathcal{I}_\alpha(\mathcal{I}_\beta f) = -\mathcal{I}_\alpha((\mathcal{I}_{\beta'} f)')$. Mais une intégration par parties montre que

$$\mathcal{I}_\alpha((\mathcal{I}_{\beta'} f)') = -\mathcal{I}_{\alpha-1}(\mathcal{I}_{\beta'} f).$$

Pour conclure, on utilise que d'après la partie de la démonstration, $\mathcal{I}_{\alpha-1}(\mathcal{I}_{\beta'} f) = \mathcal{I}_{\alpha-1+\beta'} f = \mathcal{I}_{\alpha+\beta} f$. □

On en déduit :

Corollaire 29. *Soit $s \in \mathbb{C}$ avec $0 < \Re s < 1$. Pour tout $f \in \mathcal{H}_\sigma$, on a : $\mathcal{I}_{1-2s}(\mathcal{I}_{2s-1} f) = f$.*

D'après la remarque 23, ce résultat s'applique aux opérateurs $\Phi_s : \mathcal{A}_s(\Gamma) \rightarrow \mathcal{A}_{1-s}(\Gamma)$; on obtient immédiatement :

Théorème 30. *Soit $s \in \mathbb{C}$ avec $0 < \Re s < 1$. Alors*

$$\Phi_{1-s} \circ \Phi_s = \text{Id}_{\mathcal{A}_s(\Gamma)}.$$

REFERENCES

- [BM] Indranil Biswas et Gadadhar Misra, $\widetilde{SL(2, \mathbb{R})}$ -homogeneous vector bundles, International Journal of Mathematics, 19 (1), (2008), 1-19.
- [B] Gerrit Bol, *Invarianten linearer Differentialgleichungen*, Abh. Math. Sem. Hamburger Univ., 16, (1949), 1-28.
- [De] Bertrand Deroin, *Non-rigidity of hyperbolic surfaces laminations*, Proc. AMS, Paris, 135 (3), (2007), 873-881.
- [Du] Peter Duren, *Theory of H^p spaces*, Pure and applied mathematics, vol. 38, Academic Press, New York (1970).
- [GGPS] Israel Gel'fand, Mark Graev et Ilya Pyatetskii-Shapiro, *Representation Theory and Automorphic Functions*, W. B. Saunders Company, Philadelphia (1969).
- [Gh] Étienne Ghys, *Laminations par surfaces de Riemann*, Dynamique et géométrie complexes (Lyon, 1997), 49-95, Panor. et Synthèses, 8, SMF, Paris, 1999.
- [He] Sigurdur Helgason, *Topics in Harmonic Analysis on Homogeneous Spaces*, Progress in Mathematics, vol. 13, Birkhäuser, Boston-Basel-Stuttgart (1981).
- [O] Jean-Pierre Otal, *Sur les fonctions propres du Laplacien du disque hyperbolique*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris, 327 (1998), 161-166.
- [Ri] Marcel Riesz, *L'intégrale de Riemann-Liouville et le problème de Cauchy*, Acta Math. 81, (1949), 1-223.
- [S] Paul J. Sally, *Intertwining operators and the representations of $SL(2, \mathbb{R})$* , J. Func. Anal. 6, (1970), 441-453.

Institut de Mathématiques de Toulouse,
 Université Paul Sabatier
 118, route de Narbonne,
 31330 Toulouse