



MELBA: UNA BOA LAGRANGIANA PER LO STUDIO DEL MARE MEDITERRANEO. EQUAZIONE DEL MOTO E SUA SOLUZIONE NUMERICA

Ramiro Dell'Erba

► To cite this version:

Ramiro Dell'Erba. MELBA: UNA BOA LAGRANGIANA PER LO STUDIO DEL MARE MEDITERRANEO. EQUAZIONE DEL MOTO E SUA SOLUZIONE NUMERICA. [Research Report] ENEA. 2009. <hal-01977255>

HAL Id: hal-01977255

<https://hal.science/hal-01977255v1>

Submitted on 10 Jan 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization



Italian National Agency for New Technologies, Energy and
Sustainable Economic Development

<http://www.enea.it/en>

<http://robotica.casaccia.enea.it/index.php?lang=en>

This paper is available on the Open Archives of ENEA

<http://openarchive.enea.it/>

MELBA: UNA BOA LAGRANGIANA PER LO STUDIO DEL MARE MEDITERRANEO. EQUAZIONE DEL MOTO E SUA SOLUZIONE NUMERICA

RAMIRO DELL'ERBA

ENEA - Unità Tecnico Scientifica Fusione
Centro Ricerche Casaccia, Roma

Questo rapporto è stato preparato e distribuito da: Servizio Edizioni Scientifiche - ENEA
Centro Ricerche Frascati, C.P. 65 - 00044 Frascati, Rome, Italy

I contenuti tecnico-scientifici dei rapporti tecnici dell'ENEA rispecchiano l'opinione degli autori e non necessariamente l'opinione dell'Ente.

TITOLO IN ITALIANO

Riassunto

Lo scopo del progetto MELBA (Boa Lagrangiana derivante per il Mediterraneo) è la realizzazione di una boa derivante Lagrangiana, ovvero il cui moto segue i flussi di corrente marina, dedicata alla particolare morfologia del mare mediterraneo. Questo è infatti caratterizzato da rapide variazioni della profondità rispetto ai più piatti fondali oceanici; l'influenza della costa è, inoltre, determinante per le correnti marine: L'elemento di acqua in studio riflette queste peculiarità. Il sistema di controllo di MELBA deve tenere presente queste considerazioni, sia per missioni di medio o lungo periodo, sia per missioni di breve periodo molto ripetitive e dedicate allo studio dell'ambiente marino costiero su scale spazio temporali brevi. La boa è formata da un tubo di alluminio, capace di resistere fino a 2000 metri di profondità e contenente il motore di ascesa e discesa (unico moto consentito alla boa), il sistema di comunicazione satellitare, nonché il sistema di controllo della missione. La strumentazione sensoristica accessoria è variabile in base al tipo di missione da eseguire che può comprendere misure di conducibilità, salinità, temperatura, clorofilla etc... Il sistema di comunicazione, attraverso il quale la boa invia i dati misurati e riceve le nuove missioni conseguenti, è a due vie supportato tramite la costellazione satellitare Orbcom. Un gps (Global Position System) è integrato per la georeferenziazione dei dati misurati, una volta che la boa è emersa. Le novità principali di MELBA, rispetto a prodotti commerciali, sono due: L'utilizzo di una costellazione satellitare affidabile per lo scarico dei dati e la comunicazione a due vie che consentono all'operatore nel laboratorio di riprogrammare la missione della boa via satellite. La seconda è un sistema di controllo "intelligente" capace di intervenire in situazioni semplici mediante una serie di regole.

Parole chiavi: Derivante, boa, robot, automazione

TITLE

Abstract

The MEditerranean Lagrangian Buoy Appliance project (MELBA) is a project oriented towards the realisation of an instrument (buoy) for the specific conformation of the Mediterranean area, which presents restricted spatial dimensions in many cases associated to a high variability of the sea-depth. The dynamic of the body-of-water flux, in the Mediterranean area, is affected by the deep-sea and coastal line high variability. The MELBA project purpose is the realisation of a profiling drifter, dedicated to the Mediterranean environment. The control system is improving taking into account the above considerations, for long and medium term missions, but also for very short, repetitive, coastal missions that are dedicated to short time and space scale biological, ecological or anti-pollution studies. The carrier is formed by a pressure hull containing the instrumentation, by the engine for the vertical moving, by the electronic control system for the mission handling and for the emergency system. The carrier is the base system for all mission typology. The only variation is to change the sensors and the relative data acquisition system for the specific mission. The provided communication system is a double way satellite channel. A Global Position System (GPS) will support this system. The GPS use is essential to the data geo-reference and to have the exact buoy position for all emersion and transmission of data. One of the most important features of MELBA buoy can be outlined in the control system. The control system is responsible for the realisation of the programmed mission.

Key words: Drifter, buoy, robot, automation

INDEX

SCOPO DEL DOCUMENTO	7
CONTESTO E RUOLO DELL'ENEA NEL PROGETTO	8
1. INTRODUZIONE	8
1.1 BOE DERIVANTI	10
1.2 CARATTERISTICHE DEL MARE MEDITERRANEO	10
I.2 MELBA.....	10
1.3 CONCLUSIONI	14
RINGRAZIAMENTI.....	15
A1. IL PROBLEMA DEL MOTO DI MELBA	17
A1.2 ASSEGNAZIONE PARAMETRI DELLA BOA	18
A2. L'EQUAZIONE DEL MOTO E LE SUE COMPONENTI.....	19
A2.1 L'EQUAZIONE DEL MOTO.....	19
A2.2 LA SPINTA IDROSTATICA	20
A2.3 L'EQUAZIONE DI STATO DELL'ACQUA MARINA	20
A2.4 LA FORZA IDRODINAMICA	22
A3. L' EQUILIBRIO STATICO DELLA BOA	28
A4. PRIMA SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE DEL MOTO	30
A4.1 CASO DELLA CADUTA LIBERA	30
A4.2 UN ESEMPIO A FISSATA PROFONDITÀ.....	30
A.5 L'APPROSSIMAZIONE DELLA TRAIETTORIA MEDIANTE UNA PARABOLA	32
A) TEMPO DI VIAGGIO	33
A.6 LA VALVOLA HA PORTATA FINITA: STIMA DELLA PORTATA.....	36
A.6.1 CONSIDERAZIONE	36
A.7 LA SOLUZIONE COMPLETA.....	38
A.7.1 VALUTAZIONE DELL'OLIO SPIAZZATO	38
A.7.2 TRE CASI A CONFRONTO	39
A.7.3 UN ALTRO MODO POSSIBILE	41
A.8 LA POMPA.....	41
A.9 CONCLUSIONI.....	42

MELBA: UNA BOA LAGRANGIANA PER LO STUDIO DEL MARE MEDITERRANEO. EQUAZIONE DEL MOTO E SUA SOLUZIONE NUMERICA

SCOPO DEL DOCUMENTO

Lo scopo di questo documento è la soluzione dell'equazione del moto di MELBA (Mediterranean Lagrangian Buoy Appliance) e la sua approssimazione con una più trattabile equazione algebrica parametrica.

MELBA è una boa Lagrangiana derivante usabile per misurazioni scientifiche in ambito subacqueo; essa non è dotata di motore proprio ma è in balia delle correnti oceaniche (da qui il nome di Lagrangiana derivante). E' però dotata di vescica natatoria che le consente di salire o scendere secondo quanto programmato e di effettuare misurazioni di temperatura, salinità etc... in profondità variabili da 0 a 2000 metri, questo comporta la realizzazione di un sofisticato sistema di controllo della vescica.

Al fine di confrontare il moto verticale desiderato della boa con quello effettivamente realizzato, in modo che il sistema di controllo possa intervenire con le correzioni necessarie, è stato necessario risolvere il problema dinamico del moto di MELBA descritto mediante un sistema di equazioni differenziali accoppiate, descriventi le forze agenti su MELBA e le relative condizioni iniziali. Le forze in gioco sono la forza peso, la spinta di Archimede e la forza di resistenza idrodinamica; vi è inoltre da tenere presente che il gonfiaggio e lo sgonfiaggio della vescica natatoria non sono istantanei e che nel frattempo la quota della boa cambia. Purtroppo anche la portata della valvola e delle pompe predisposti al

gonfiaggio/sgonfiaggio della vescica sono dipendenti dalla profondità, il problema si presenta quindi accoppiato e di difficile soluzione.

Prima di entrare nel problema del moto vero e proprio un'introduzione di MELBA è data nelle prime pagine per familiarizzare il lettore con l'oggetto in questione. Lo svolgimento dei calcoli con dettaglio è fatto in appendice.

CONTESTO E RUOLO DELL'ENEA NEL PROGETTO

La prima applicazione della legge 95/95, art. 3, ha comportato, fra le altre iniziative, il lancio di un programma di ricerca di interesse dell'ENEA, denominato "Ambiente Mediterraneo"; tale programma, nello spirito della legge, prevedeva che imprese nazionali contribuissero allo sviluppo di tecnologie innovative da utilizzare per attività di ricerca in campo ambientale marino.

A seguito di apposito bando nazionale furono individuati 17 progetti, proposti da un certo numero di operatori nazionali, fra industrie e enti di ricerca; il finanziamento globale previsto a carico del MURST (ora MIUR – Ministero dell'Università e della Ricerca Scientifica e Tecnologica), che poteva allora coprire una quota attorno al 60% dell'impegno totale, fu opportunamente suddiviso fra i singoli progetti. All'interno di ciascuno di tali progetti compariva ENEA come uno dei partner, oggetto quindi anche di una parte del suddetto finanziamento.

Fra i succitati progetti, contrassegnato dalla sigla 3.3.1.4, trova luogo quello dedicato allo sviluppo di un robot sottomarino autonomo, da adibire a campagne di misure di lunga portata e fino a profondità di 2000 m. L'acronimo MELBA sta per Boa Lagrangiana derivante per il Mediterraneo. Il Ministero Italiano della Ricerca Scientifica e dell'Università ha indicato l'ENEA quale organizzatore esecutivo di questo progetto.

1. INTRODUZIONE

Il progetto MELBA ha come scopo la realizzazione di una boa derivante lagrangiana dedicata alla particolare morfologia del mare mediterraneo, il quale presenta ristrette dimensioni spaziali, rispetto agli oceani, ma, in molti casi, una grande variabilità dei fondali. Le boe lagrangiane seguono i flussi di corrente marina misurando le proprietà di un elemento di acqua solidale con la boa stessa (da cui il nome lagrangiana) per gli scopi più svariati, dalla sorveglianza ambientale agli studi oceanografici. La boa può immergersi e risalire, fornendo

così misure eseguite a profondità prestabilite; alcuni tipi di siffatte boe sono in commercio per lo studio di correnti oceaniche. Il Mediterraneo, però, è caratterizzato da rapide variazioni della profondità, rispetto ai più piatti fondali oceanici, nonché dall'influenza della costa, caratteristiche che risultano determinanti per le correnti marine: l'elemento di acqua in studio riflette queste peculiarità. La nostra boa, inoltre, è progettata per operare in vicinanza della costa che rende le missioni operative molto differenti da quelle in oceano aperto nelle quali simili boe sono in uso ad oggi. La dinamica di un elemento acquoso è infatti grandemente influenzata da questi fattori; l'analisi dello stesso va quindi svolta su scale spaziali inferiori, tipicamente delle decine di miglia; conseguentemente anche la durata delle missioni è inferiore, rispetto a quelle oceaniche.

Poiché il nostro studio concerne prevalentemente l'inquinamento ambientale abbiamo concentrato la nostra attenzione verso la zona costiera, maggiormente influenzata dalle attività umane. Una delle possibili attività costiere di MELBA, ad esempio, è il campionamento ad alta frequenza (ovvero ad intervalli di alcune ore) di acque di bassa profondità (minori di 100m) in cui è osservabile l'evoluzione della massa di plankton e le conseguenze dell'attività umana sullo stesso. Il sistema di controllo di MELBA deve tenere presente queste considerazioni, sia per missioni di medio o lungo periodo in mare aperto, sia per missioni di breve periodo molto ripetitive e dedicate allo studio dell'ambiente marino costiero su scale spazio temporali brevi.

Il corpo della boa è formata da un tubo di alluminio, capace di resistere fino a 2000 metri di profondità, e contenente il motore di ascesa e discesa (unico moto consentito alla boa), il sistema di comunicazione satellitare (attivo in superficie) e il sistema di controllo della missione. La strumentazione sensoristica accessoria è variabile in base al tipo di missione da eseguire: essa può comprendere misure di conducibilità, salinità, temperatura, clorofilla etc... Il sistema di comunicazione, attraverso il quale la boa invia i dati misurati ricevendone le nuove missioni conseguenti, è a due vie supportato tramite la costellazione satellitare Orbcom. Un gps (Global Position System) è integrato per la georeferenziazione dei dati misurati, una volta che la boa è emersa.

Le novità principali di MELBA, rispetto a prodotti commerciali, sono due: L'utilizzo di una costellazione satellitare affidabile per lo scarico dei dati e la comunicazione a due vie che consentono all'operatore nel laboratorio di riprogrammare la missione della boa via satellite in base ai risultati di una missione precedente o altro. Inoltre vi è un sistema di controllo "intelligente" capace di intervenire in situazioni semplici mediante una serie di regole.

1.1 Boe derivanti

Le boe Lagrangiane, sono così chiamate poiché solidali nel moto con l'elemento acquoso in studio; esse sono sia di superficie che di profondità. In particolare queste ultime, dette anche "profilatori" dato il loro moto verticale, sono strumenti di misura capaci di scendere ad una predefinita profondità, misurare alcune caratteristiche, risalire alla superficie e trasmettere i dati ad una stazione di terra. Alla fine del loro lavoro sono vanno generalmente perdute.

L'uso di tali strumenti ha aperto vasti e nuovi orizzonti nel campo degli studi climatici ed oceanografici; i loro costi, infatti, sono incomparabilmente minori (il valore di una boa è di circa 10000 euro) rispetto alla conduzione di una campagna di misure con strumenti usuali quali una nave oceanografica, che costa sì 10000 euro, ma al giorno.

1.2 Caratteristiche del mare mediterraneo

L'applicazione di queste tecnologie in mari chiusi, quali il mediterraneo, dove le scale spazio temporali sono spesso ridotte rispetto agli oceani e le dinamiche mostrano alti gradienti dovuti alla struttura del fondo e delle coste, quasi sempre presenti nell'area di esplorazione, richiedono l'uso di strumenti intelligenti. Un sistema di controllo flessibile è di grande utilità per programmare e soprattutto riprogrammare le missioni così come la realizzazione di procedure di fuga per evitare che la boa possa rimanere intrappolata sul fondo marino.

2 MELBA

Lo scopo del progetto MELBA è la realizzazione di una boa Lagrangiana profilante dedicata all'ambiente marino mediterraneo. Il sistema di controllo è stato realizzato tenendo presente le considerazioni di cui sopra per missioni di lungo e medio termine ma anche per missioni brevi e molto ripetitive; in particolare missioni costiere, brevi e dedicate a misurazioni di inquinamento e biologiche.

La boa derivante (mostrata in Fig. 1) ha una profondità operativa massima di 2000 metri.

Il progetto è organizzato in cinque blocchi funzionali per la boa ed uno per l'interfaccia uomo macchina. Ogni blocco sarà implementato separatamente e sarà poi connesso con gli altri tre. La struttura è descritta nei seguenti sottoinsiemi:

- a) Corpo
- b) Batterie
- c) Sensori
- d) Elettronica di bordo
- e) Interfaccia uomo macchina

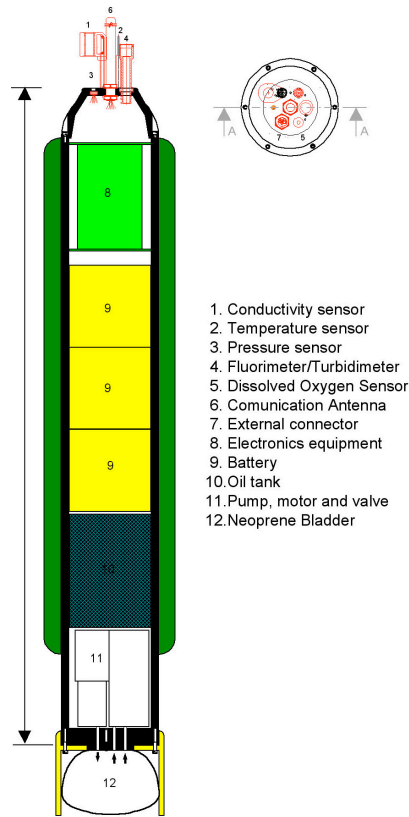


Fig. I.1 – La boa MELBA

a) Corpo

Il corpo è formato da un cilindro di alluminio (costruito con tecniche di derivazione aeronautica per essere capace di resistere fino a 2000 metri di profondità) contenete la

strumentazione elettronica, il motore a vescica per il movimento verticale, il sistema di controllo per la missione ed il sistema di emergenza.

Il corpo è lo stesso in ogni missione. L'unica variazione ammessa è la tipologia dei sensori esterni in base ai dati che è necessario acquisire nella specifica missione, allo scopo di ridurre il peso della boa.

Il movimento verticale della boa è assicurato dal pompaggio di olio in una vescica esterna, similmente a quanto fatto dai pesci, per controllare il livello di profondità a cui la boa è in equilibrio.

b) Batterie

Una parte considerevole del peso del corpo è costituito dalle batterie, le quali devono durare per l'intera vita della boa (200 cicli circa nel caso di missioni brevi). Il pacco batterie è

realizzato dall'unione in serie ed in parallelo di 72 batterie al litio di alta capacità (16,5 Ah 3,6 V).

c) Sensori

Nel corpo di Melba sarà possibile caricare diverse tipologie di teste equipaggiate con sensori di base CTD (Conducibilità, temperatura e profondità) e con altri sensori per la misura della quantità di ossigeno disciolto, torbidità, fluorescenza; sarà possibile montare diversi sensori specifici per l'uso in particolari missioni. La boa è capace di effettuare misure idrologiche, chimiche, biologiche e di geologia oceanografica.

d) Elettronica di bordo

L'elettronica di bordo consiste in:

- Sistema di comunicazione
- Sistema di controllo
- Sistema di acquisizione dati

Sistema di comunicazione

Il sistema di comunicazione è del tipo satellitare a due vie (full duplex). Un GPS è utilizzato per la georeferenziazione dei dati all'atto dell'emersione della boa, quando questa trasmette i dati acquisiti. Per questo specifico sistema di comunicazione stiamo sviluppando un'antenna unica adatta sia a ricevere dati GPS che a trasmettere e ricevere dati dal satellite. Caratteristica essenziale di questa antenna è la capacità di resistere alle pressioni marine operative (2000 metri pari circa 200 atmosfere). La gestione di questo software sarà un compito del sistema di controllo della boa.

Il sistema di controllo e supervisione

Il sistema di controllo è responsabile per la realizzazione della missione programmata. Nonostante i soli movimenti e i permessi alla boa siano dei sali e scendi noi proveremo ad implementare un sistema di controllo sofisticato. Sottolineiamo, ancora una volta alcune peculiarità che distinguono le necessità di una boa operante nel Mare Mediterraneo rispetto ad una operante nell'oceano. La principale differenza è l'alta variabilità del fondale marino e del contorno della costa, che produce vortici su una scala spazio temporale ristretta. Noi vorremmo che la boa sia capace di seguire un certo cammino non solo seguendo un certo programmato profilo di profondità ma anche seguendo certi altri parametri. Un sistema di supervisione dovrebbe quindi essere implementato per migliorare le probabilità di successo di una missione. Il sistema di supervisione dovrebbe essere capace di mantenere la boa in un elemento di acqua a temperatura costante seguendo una corrente termica. Inoltre lo stesso dovrebbe essere capace di prendere qualche decisione elementare in caso di rotture o malfunzionamenti non vitali quali, ad esempio, una cattiva trasmissione dei dati o un assorbimento elettrico anomalo da parte di una utenza. L'eccessivo assorbimento di corrente

da parte di una utenza, ad esempio, può far decidere al sistema di supervisione di isolare quell'utenza e di continuare la missione senza quel sensore. Le attuali boe sono totalmente passive nella trasmissione dei dati cosicché molti di essi sono persi.

In pratica c'è la possibilità di cambiare parametri della missione mentre questa viene effettuata. Il sistema di supervisione dovrebbe poi ripianificare la missione ottimizzando le prestazioni ottenibili anche nel caso di attrezzatura ridotta. La nostra intenzione è di partire da un semplice metodo di regole e di incrementarle progressivamente in complessità. Si vuole cioè partire da una semplice tabella di regole e del tipo “Se... allora” per le decisioni da assumere o di chiedere aiuto umano, grazie al sistema di comunicazione bidirezionale.

A questo punto diviene necessario poter prevedere il moto di MELba al fine di confrontare il moto aspettato con quello effettivamente realizzato: ovvero occorre risolvere l'equazione del moto. Questo è stato fatto mediante il software Mathematica della Wolfram Research, in cui si è utilizzato il metodo di Runge-Kutta del quarto ordine.

Acquisizione dati

Allo scopo di rendere maggiormente flessibile la boa, è stato deciso durante la fase di progettazione di inserire un micro controllore per il controllo di tutti i sensori di bordo. Il micro controllore è capace di verificare un primo livello di congruità dei dati misurati e di controllare lo stato dei sensori.

e) L'interfaccia uomo macchina e il programma di missione

L'interfaccia uomo macchina HCI (Human computing Interface) trae spunto dalla esperienza condotta con il progetto ARAMIS (Advanced Remotely Operation Vehicle (ROV) Package for Automatic Mobile Investigation of Sediments; an EC MAST III project). Per aiutare il pilota/scienziato nel compito di programmare la missione è stato usato un linguaggio di tipo visuale simile a quello realizzato per il progetto ARAMIS. Naturalmente l'insieme di comandi adottato è diverso in quanto la boa si può muovere solo verticalmente.

Esso è formato da:

- comandi di movimento (del tipo da “vai su”, “vai giù”, “stop”) per pilotare su e giù la boa;
- comandi di controllo per testare le variabili di stato della boa. (del tipo “Se...allora”) e prendere semplici decisioni in accordo con il valore della temperatura, pressione posizione geografica, tempo, piazza ecc.;
- comandi e istruzioni di misura per i sensori.

L'ambiente di sviluppo integrato IDE (Integrated Development Environment), insieme al simulatore di scenario e della boa, se le informazioni ambientali sono sufficienti, permette di

prevedere il reale comportamento della boa nell'acqua e di pianificare quindi la missione con alta probabilità di sopravvivenza.

Così la missione viene simulata e ricalcolata ad ogni emersione.

Il modello dei dati è scaricato, dall'operatore a terra, periodicamente da National and European projects (as MFSP - Mediterranean Forecasting System Pilot Project, MODB - Mediterranean Oceanic Data Base, SINAPSI - Seasonal, Interannual and decadal variability of the atmosphere, ocean and related marine ecosystems etc.) ed integrato con il modello della boa e i suoi programmi.

Per fare questo necessario della boa possa contattare il pilota o scienziato ovunque esso sia. Per questa ragione l'interfaccia è mobile e il legame con la boa è realizzato attraverso una stazione server. Naturalmente il sistema deve operare anche se le connessioni non sono possibili, cosicché il server deve essere capace di prendere decisioni circa la continuazione della missione giocando il ruolo del sistema di controllo missione.

A questo punto approfondiamo come è possibile prevedere il moto della boa. Per fare ciò dobbiamo risolvere l'equazione del moto, cosa che sarà fatta in Appendice. Al fine di semplificare il lavoro del sistema di controllo, inoltre, la soluzione dell'equazione del moto sarà approssimata con una più semplice equazione algebrica dipendente da parametri.

3. CONCLUSIONI

Lo scopo finale del progetto MELBA e la realizzazione di uno strumento a basso costo multifunzionale, che si accordi facilmente con le specifiche attività, che sia possibile usarlo sia mare aperto sia (con molto maggiore probabilità) vicino alle coste e che sia capace di spedire una grande quantità di dati ben georeferenziati. Tale strumento potrebbe essere anche usato anche al livello comunale, per le periodiche misurazioni dello stato della costa prospiciente.

Il vero elemento innovativo del progetto è la realizzazione di una boa capace di seguire uno dei parametri (densità, salinità, temperatura, profondità chiusa) calcolato dalle misure effettuate dal proprio sistema sensoriale. Per esempio è possibile mantenere la boa in una zona temperatura costante.

Un sistema di comunicazione bidirezionale dà la possibilità sia di trasmettere dati che di ricevere ordini (ad esempio una nuova missione chiusa) dalla stazione terrestre o dalla stazione navale.

Per questo tipo di applicazioni è importante che lo strumento sia espandibile ed anche che la capacità di trasmissione venga aumentata, in modo da potervi programmare la missione ho un facile ritrovamento di MELBA alla sua naturale o forzata fine.

RINGRAZIAMENTI

In particolare vorrei ringraziare Il Dr. Fiorello Cavallini, in qualità di capo progetto MELBA e l'Ing. Bruno Papalia che per primo mi ha istruito sui progetti di robotica subacquea.

BIBLIOGRAFIA

- [1] A. Terribile and other, “*ARAMIS: a system for robotic inspection of sediments*” - Conference Proceedings Oceanology International 2000, Brighton (UK), 7-10 March 2000.
- [2] D. Maffei, B. Papalia, G. Allasia, F. Bagnoli, “*A computer interface for controlling the ROV mission in scientific survey*”, Conference Proceedings Oceans 2000, Providence (RI), 11-14 September, 2000.
- [4] EU-MAST Project, <http://www.cineca.it/mfspp/>
- [5] EU-MAST Project, <http://modb.oce.ulg.ac.be/>
Italian-MIUR Project, <http://sinapsi.cineca.it/>
- [6] V. Rupolo, A. Babiano, V. Artale, D. Iudicone “*Horizontal space-time dependent tracer diffusivity parameterization for a OGCM. A sensitivity study in the Mediterranean Sea*” *Nuovo Cimento* **26(C4)**, 387 (2003)

APPENDICE

A1. IL PROBLEMA DEL MOTO DI MELBA

A1.1 Premessa

In questo lavoro ci proponiamo di risolvere una versione semplificata dell'equazione differenziale che descrive il moto di MELBA; il moto verticale di MELBA è governato dalla vescica natatoria che viene riempita o svuotata di olio (che ha densità minore di quella dell'acqua) a seconda che si voglia salire o scendere. Il moto orizzontale è dovuto unicamente alle correnti marine e non è governabile.

Lo scopo è di trovare un'equazione algebrica, parametrica nel tempo, che ne simuli in modo "soddisfacente" il moto, una volta impostati i parametri fondamentali del caso quali peso, profondità iniziale e stazza: un'equazione algebrica è, infatti, più facile da risolvere per il sistema di controllo che deve calcolare la stazza della boa, in altre parole la quantità d'olio da far fuoriuscire nella vescica natatoria ("spiazzare") in funzione dei parametri principali soprannominati e, di conseguenza, l'intervallo di funzionamento delle valvole e della pompa. Il sistema di controllo, inoltre, potrà così controllare, ad intervalli di tempo predefiniti, se la posizione della boa corrisponde a quella calcolata usando quest'equazione.

Lo scopo finale è quindi quello di ottenere un'equazione algebrica che simuli l'equazione oraria del moto verticale di MELBA, in modo tale che dati la profondità iniziale e la finale desiderata si possa calcolare in modo algebrico e con "ragionevole" precisione il tempo di apertura della valvola spiazzare l'olio nella vescica natatoria (o il tempo di azionamento della pompa per farlo rientrare nel serbatoio e far scendere la boa) e ad ogni istante di tempo la sua posizione.

Supponiamo ad esempio di essere alla profondità di 1000m e di volere scendere a 2000m. E' possibile calcolare facilmente ed algebricamente la quantità d'olio da spiazzare impostando la condizione di equilibrio statico nell'equazione del moto. Tuttavia restano da conoscere due incognite: Il tempo di apertura della valvola, che permette all'olio di fluire nella vescica natatoria, e l'equazione oraria del moto della boa. Il primo è un problema importante quanto complicato giacché si tratta di un tipico problema accoppiato: la portata della valvola, infatti, dipende dalla profondità che sta variando mentre la boa scende. Valuteremo in quali casi questa si può considerare costante semplificando enormemente il problema; tuttavia è proprio nei casi principali, di partenza a basse profondità, che date le caratteristiche di portata della valvola (o anche della pompa) in funzione della profondità che questo non può essere fatto; occorre perciò trovare un'equazione apposita che tenga conto dei parametri di partenza.

L'equazione oraria del moto serve al sistema di controllo per controllare, punto per punto, che la posizione della boa ad un certo tempo corrisponda, entro i limiti richiesti, alla posizione teorica; in caso contrario esso può e deve intervenire con le correzioni opportune.

Iniziamo con il risolvere un problema semplificato; il tempo di spiazzamento dell'olio (dalla valvola o dalla pompa) è considerato istantaneo. Questo semplifica di molto il problema e ci permette di risolvere l'equazione differenziale e di trovare una valida approssimazione della traiettoria in funzione dei parametri di interesse.

In un secondo momento introdurremo l'equazione della portata della valvola (o della pompa) e valuteremo le differenze con il modello semplificato.

Procederemo quindi con i seguenti passi:

- 1) Impostazione dell'equazione del moto e valutazione dei componenti.
- 2) Valutazione quantitativa dei singoli componenti l'equazione nel caso di MELBA.
- 3) Risoluzione numerica dell'equazione differenziale del moto per un caso semplificato, in cui si considera il tempo d'azione della valvola di spiazzamento (o della pompa) istantaneo.
- 4) Approssimazione dell'equazione oraria del moto mediante equazione algebrica e valutazione dell'errore commesso.
- 5) Risoluzione numerica dell'equazione differenziale del moto per il caso completo, in cui il tempo d'azionamento della valvola (o della pompa) non è più trascurabile rispetto al tempo complessivo di viaggio della boa.
- 6) Approssimazione dell'equazione oraria del moto mediante equazione algebrica e valutazione dell'errore commesso.
- 7) Calcolo del tempo d'azionamento della valvola (o della pompa) per spiazzare una determinata quantità d'olio.
- 8) Conclusioni.

A1.2 Assegnazione parametri della boa

In Tabella 1 sono mostrati alcuni parametri fissi di MELBA, quail peso, volume, etc.

Tabella A1 – Alcuni parametri costruttivi di MELBA

Parametro	Dimensioni
Massa=M=39,5	Massa della boa espressa in Kg, olio compreso
Massaagg=Ma=10,5	Massa aggiunta alla boa espressa in Kg
L=1,6	Lunghezza della boa espressa in m
rag=0,171/2	Raggio esterno della boa espresso in m

thickcil=0,0127	Spessore del cilindro espresso in m
thichsfe=0,007	Spessore della calotta sferica espresso in m
Veme=0	Volume emerso espresso in m ³
Nu=0,34	Fattore di Poisson
Ey=69000	Modulo di Young espresso in Mpa ovvero N/m ²
G=9,8	Accelerazione di gravità espressa in m/sec ²
Volio=0	Volume olio espresso in m ³
profmax=2500	Profondità massima operativa espressa in m

A2. L'EQUAZIONE DEL MOTO E LE SUE COMPONENTI

A2.1 L'equazione del moto

Le boe derivanti in profondità hanno un moto caratterizzabile da due gradi di libertà disaccoppiati: uno spostamento verticale comandato dal sistema di controllo ed un moto orizzontale causato dalle correnti. E' evidente che in questo ambito interessa unicamente il moto verticale, che può essere descritto dalla seguente equazione di bilancio delle forze:

$$\text{equ1} := (M + Ma) * z''[T] - (M + Ma) * g * r[z] * g * (V[z] + \text{volio} - V_{\text{eme}}) + F_{\text{drag}}[z]$$

Ovvero la forza di gravità la spinta idrostatica e la forza idrodinamica (F_{drag}).

In tabella 2 sono definite le quantità che compaiono nella equazione.

Tabella A2 – Quantità che compaiono nella equ1

Parametro	Dimensioni
z[t]	Coordinata verticale [m]
ro[z]	Densità dell'acqua [Kg][m ⁻³]
V[z]	Volume della boa [m ³]
Fdrag[z]	Forza idrodinamica [Kg][m] [sec ⁻²]

Nel seguito sono descritti in dettaglio come sono stati modellati i vari termini dell'equazione del moto. In particolare assumeremo alcune forme funzionali per:

- 1) L'equazione di stato dell'acqua marina, ovvero la densità in funzione della temperatura, salinità e profondità.
- 2) La forza idrodinamica, F_{drag} , in funzione della geometria della boa e della sua velocità.
- 3) La comprimibilità del corpo, $V[z]$, della boa in funzione della profondità.

Il problema si presenta quindi complesso.

La valutazione del peso dei singoli termini è effettuata e mostrata in grafico per una maggiore comprensione del ruolo degli stessi.

A2.2 La spinta idrostatica

La forza di spinta cui è soggetta la boa varia con la profondità per la variazione con la stessa della densità dell'acqua.

Altro effetto concomitante è la diminuzione del volume all'aumentare della pressione esterna a causa delle deformazioni elastiche del materiale.

Vi è inoltre una variazione di volume comandata dal sistema di controllo ed originata dal flusso e riflusso di olio nella/dalla membrana esterna, che è evidentemente una funzione del tempo.

A2.3 L'equazione di stato dell'acqua marina

La densità dell'acqua di mare dipende da tre parametri: temperatura, pressione e salinità, attraverso l'equazione di Eckart:

$$\rho[z] := \frac{1}{\alpha[z]} ;$$

$$\alpha[z] := \frac{\lambda[z]}{(\rho[z] + p_0[z])} * \frac{1}{g} + \alpha_0 ;$$

$$p[z] := \frac{1 + 0.1 * z[t]}{g} ;$$

$$p_0 := \frac{(5890 + 38) * T[z] - 0.375 * T[z]^2 + 3 * S}{g} ;$$

$$\lambda[z] := 1.7795 + 0.011125 * T[z] - 0.0745 * 10^{-3} * T[z]^2 - \\ - (3.8 + 0.01) * T[z] \times 10^{-3} * S$$

$$T[z] := 12 - \frac{z[t] * 3}{500} ;$$

$$\alpha_0 = 698 * 10^{-6} ;$$

$$S = 34.6$$

Essendo le quantità usate nell'equazione di Eckart descritte in Tabella 3

Tabella A3 – Quantità usate nell'equazione di Eckart

Parametro	Dimensioni
$\alpha[z]$	Inverso della densità dell'acqua
$p[z]$	Pressione idrostatica espressa in Mpa
$\lambda[z]$	Fattore lineare in metri
$T[z]$	Temperatura espressa in gradi Celsius
S	Salinità in millesimi

Mentre la pressione è facilmente valutabile in quanto funzione lineare della profondità (pressione idrostatica), la temperatura varia, ovviamente, con le stagioni, la latitudine e la profondità. In generale, vi è una zona che si estende fino a 50-200 m in cui la temperatura è prossima a quella della superficie. Fra i 200m e i 1000m la temperatura decresce rapidamente, per poi stabilizzarsi attorno ad un valore (7°C - 5°C) che decresce invece molto lentamente. Nel modello matematico i valori della temperatura vengono assegnati per un numero limitato di quote; i valori intermedi vengono ottenuti mediante interpolazione polinomiale (metodo "spline"). A titolo di esempio, in figura A.1 è riportato un tipico andamento della densità dell'acqua in funzione della profondità (la salinità è stata assunta essere 34.6 0/00).

In questo lavoro abbiamo assunto la temperatura una funzione lineare decrescente della profondità.

Valutiamo a titolo di esempio la densità alla superficie e alla massima profondità operativa (2500 metri, in realtà 500 metri in più della massima profondità tollerata dalla boa). I risultati sono:

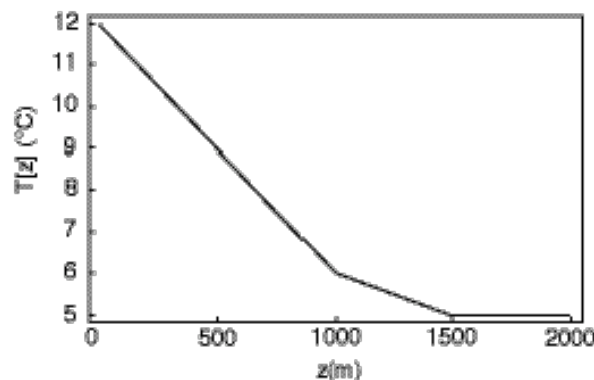


Fig. A1 – Temperatura dell'acqua vs profondità

$$\rho[0]=1036,51 \text{ Kg/m}^3$$

$$\rho[2500]=1039,96 \text{ Kg/m}^3$$

Mostriamoli nella figura A2.

Possiamo notare come, con buona approssimazione, siano tutte funzioni lineari della profondità.

A2.4 La forza idrodinamica

L'azione idrodinamica dominante nel moto della boa è rappresentata dalla resistenza dovuta alla natura viscosa del fluido o forza di drag. Tale forza può essere considerata come composta da due contributi: il primo, noto come "pressure drag", è dovuto alla presenza di

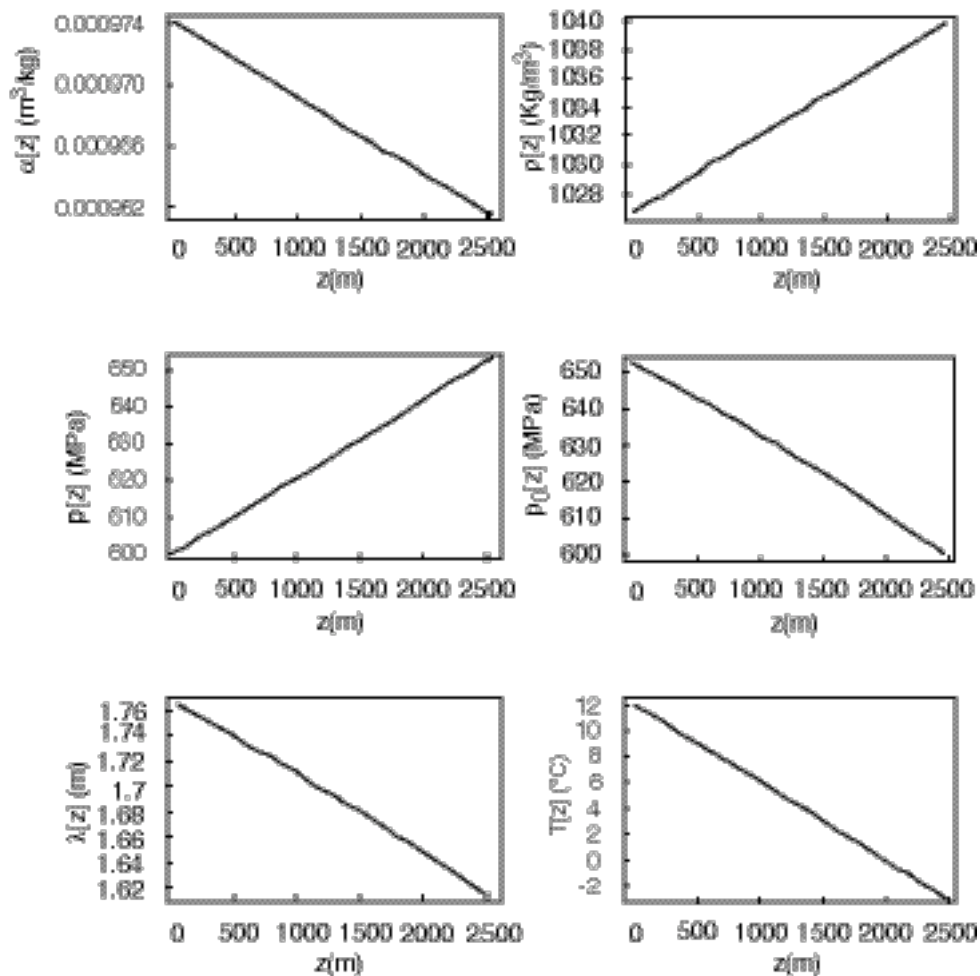


Fig. A2 – Variazione in funzione delle profondità delle seguenti quantità $=\alpha, \rho, p, p_0, \lambda, T$

una scia ed al conseguente mancato recupero di pressione; il secondo, noto come "skin-friction drag", è dovuto all'attrito superficiale. Nella pratica corrente il secondo viene trascurato, in quanto di modesta entità rispetto al primo; nel caso attuale si è ritenuto opportuno tenerne conto a causa delle piccole velocità in gioco, che ne accrescono l'importanza.

L'espressione completa della forza di drag può essere quindi scritta come:

$$\text{rey}[z_] := \text{abs}[z'[t]] * L / \text{vcin};$$

$$\text{vcin} = 10^{-6};$$

$$\text{Cf}[z_] := 0.026;$$

$$\text{Cf}[z_] := \frac{0.45}{(\text{Log}[10, \text{rey}[z]])^{2.58}};$$

$$\text{Cd} = 1.2;$$

$$\text{Fdrag1}[z_] := \frac{1}{2} * (\text{Cd} * \rho[z] * \pi * (2 * \text{rag})^2) * z'[t] * \text{Abs}[z'[t]];$$

$$\text{Fdrag2}[z_] := \frac{1}{2} * (\text{Cf}[z] * \rho[z] * \pi * L * 2 * \text{rag}) * z'[t] * \text{Abs}[z'[t]];$$

$$\text{Fdrag}[z_] := \text{Fdrag1}[z] + \text{Fdrag2}[z]$$

Come prima sono riportate le quantità utilizzate nella tabella A4.

Tabella A4 – Quantità utilizzate per il calcolo della forza di drag

Parametro	Dimensioni
rey[z]	Numero di Reynolds dimensionale
vcin	Parametro cinetico [m] ² /[sec]
Cf[z]	Parametro adimensionale
Cd	Parametro adimensionale
Fdrag1[z]	Forza idrodinamica primo termine [Kg][m][sec] ⁻²
Fdrag2[z]	Forza idrodinamica secondo termine [Kg][m][sec] ⁻²
Fdrag[z]	Forza idrodinamica totale [Kg][m][sec] ⁻²

Valutiamo per z=0, profmax, il comportamento di tali funzioni. Rey lo vediamo per z' tra 0 e 1 m/sec. Fdrag la valutiamo per z'=0.1 m/sec., valore ragionevole. Mostriamolo nella fig. A3.

Anche in questo caso, a parte il coefficiente C_f , sono tutte funzioni lineari della profondità. Da notare come F_{drag2} è molto minore di F_{drag1} , come da letteratura.

E) La deformazione dello scafo

Sotto l'azione della pressione idrostatica il volume dello scafo, di diametro d e lunghezza L , si riduce di una quantità che può essere stimata come segue. Si assume che il cilindro e l'emisfera si deformino indipendentemente sotto l'azione degli stress circonferenziale σ_{θ} e longitudinale σ_z l'uno e sotto l'azione di uno stress uniforme s l'altra. Per quanto riguarda il

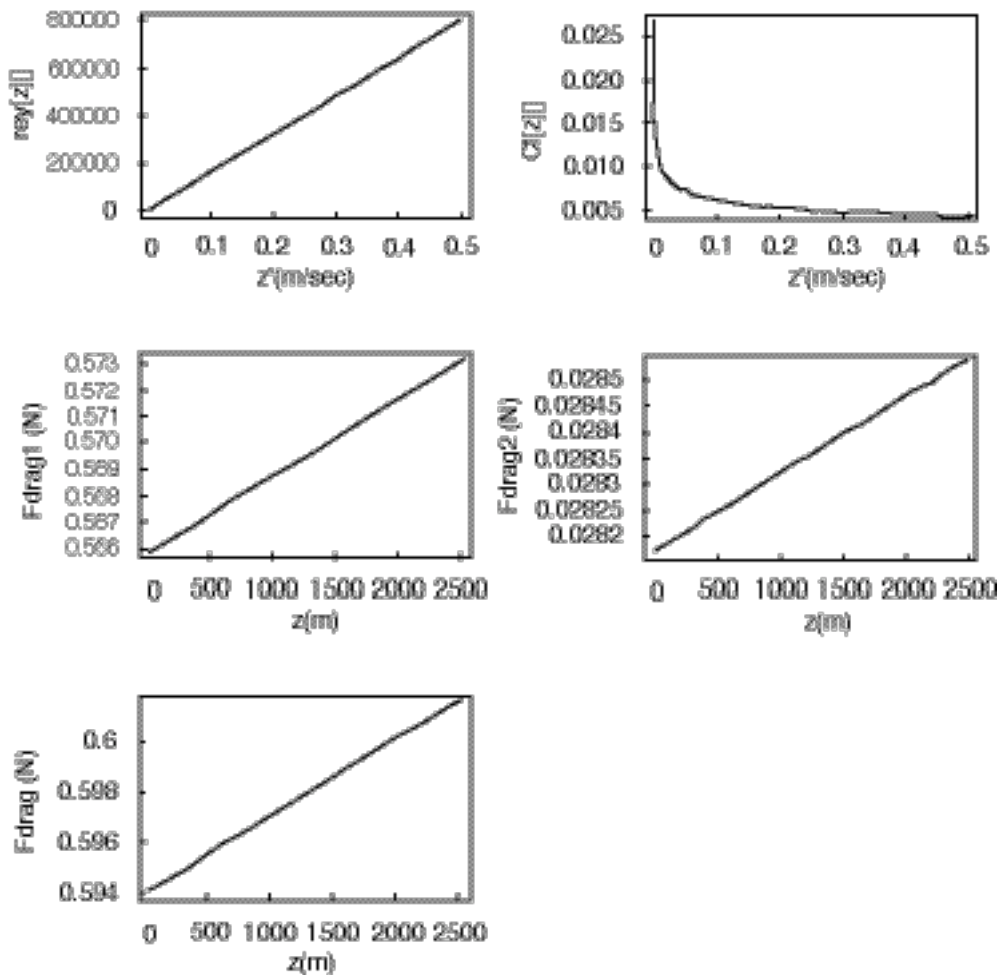


Fig. A3 – Rey e C_f in funzione delle velocità z' . Le componenti delle forze di drag F_{drag1} e F_{drag2} , e la loro somma, F_{drag} in funzione delle profondità z x $z'=0.1$ m/sec

cilindro, e passando dagli stress agli strain, la variazione del diametro medio d_0 è nota ed il corrispondente cambio di volume risulta anche esso noto.

La variazione di volume, dovuta allo stress longitudinale, è conseguente alla variazione di lunghezza. La variazione di volume totale del cilindro è perciò la somma delle due.

Valgono naturalmente le seguenti relazioni fra stress e strain (nu è il modulo di Poisson e ey il modulo di Young).

(* CILINDRO *)

(* raggio interno cilindro *)

$$r_i = r_{ag} - thick_{cil};$$

(* Diametro medio cilindro *)

$$d_{0cil} = 2 * r_{ag} - 1 * thick_{cil};$$

(* area calcolata con il raggio medio *)

$$area_{est} = p * \left(\frac{d_{0cil}}{2} \right)^2;$$

(* area calcolata con il raggio interno *)

$$area_{int} = \pi * (r_i)^2;$$

(* volume cilindro calcolato con il raggio medio *)

$$V_{cil} = area_{est} * L;$$

(* SEMISFERA *)

(* Volume semisfera *)

$$V_{sfe} = \frac{2}{3} * p * (r_{ag})^3;$$

(* Diametro medio semisfera *)

$$d_{0sfe} = 2 * r_{ag} - thick_{sfe};$$

(* PRESSIONE IDROSTATICA MPa *)

$$press[z_]:= -0.1 + p[z];$$

```

(* CILINDRO TENSIONE CIRCONFERENZIALE MPa *)
sigz[z_] := press[z] * rag/thichcil;

(* CILINDRO TENSIONE LONGITUDINALE MPa *)
sigz[z_] := areaest * press[z] / (areaest - areaint);

(* CILINDRO DEFORMAZIONE CIRCONFERENZIALE *)
epst[z_] := (sigt[z] - nu * sigz[z]) / ey;

(* CILINDRO DEFORMAZIONE LONGITUDINALE [] *)
epsz[z_] := (sigz[z] - nu * sigt[z]) / ey;

(* CILINDRO VARIAZIONE VOLUME m3 *)
dvol1[z_] :=  $\pi * d_{0cil} * L * (epst[z] * rag * 2 + epsz[z] * d_{0cil} / 2) / 2;$ 

(* SEMISFERA TENSIONE MPa *)
sigsfe[z_] := press[z] * rag / (2 * thicksfe);

(* SEMISFERA DEFORMAZIONE [] *)
epssf[z_] := sigsfe[z] * (1 - nu) / ey;

(* SEMISFERA VARIAZIONE VOLUME m3 *)
dvol2[z_] :=  $\frac{\pi * d_{0sfe}^2 * rag * 2 * epssf[z]}{4};$ 

(* VOLUME EFFETTIVO TOTALE m3 *)
V[z_] := Vcil + Vsfe - dvol1[z] - dvol2[z];

```

Valutiamo, sempre a titolo di esempio, per $z=0$ e $profmax$, il volume della boa e la massa di acqua spostata (ovvero la spinta di Archimede espressa in Kg).

$V[z]=0,032799 \text{ m}^3$ e la spinta vale $\rho[z]*V[z]=33,6684 \text{ Kg}$ per $z=0\text{m}$

$V[z]=0,0326231 \text{ m}^3$ e la spinta vale $\rho[z]*V[z]=33,9269 \text{ Kg}$ per $z=2500\text{m}$

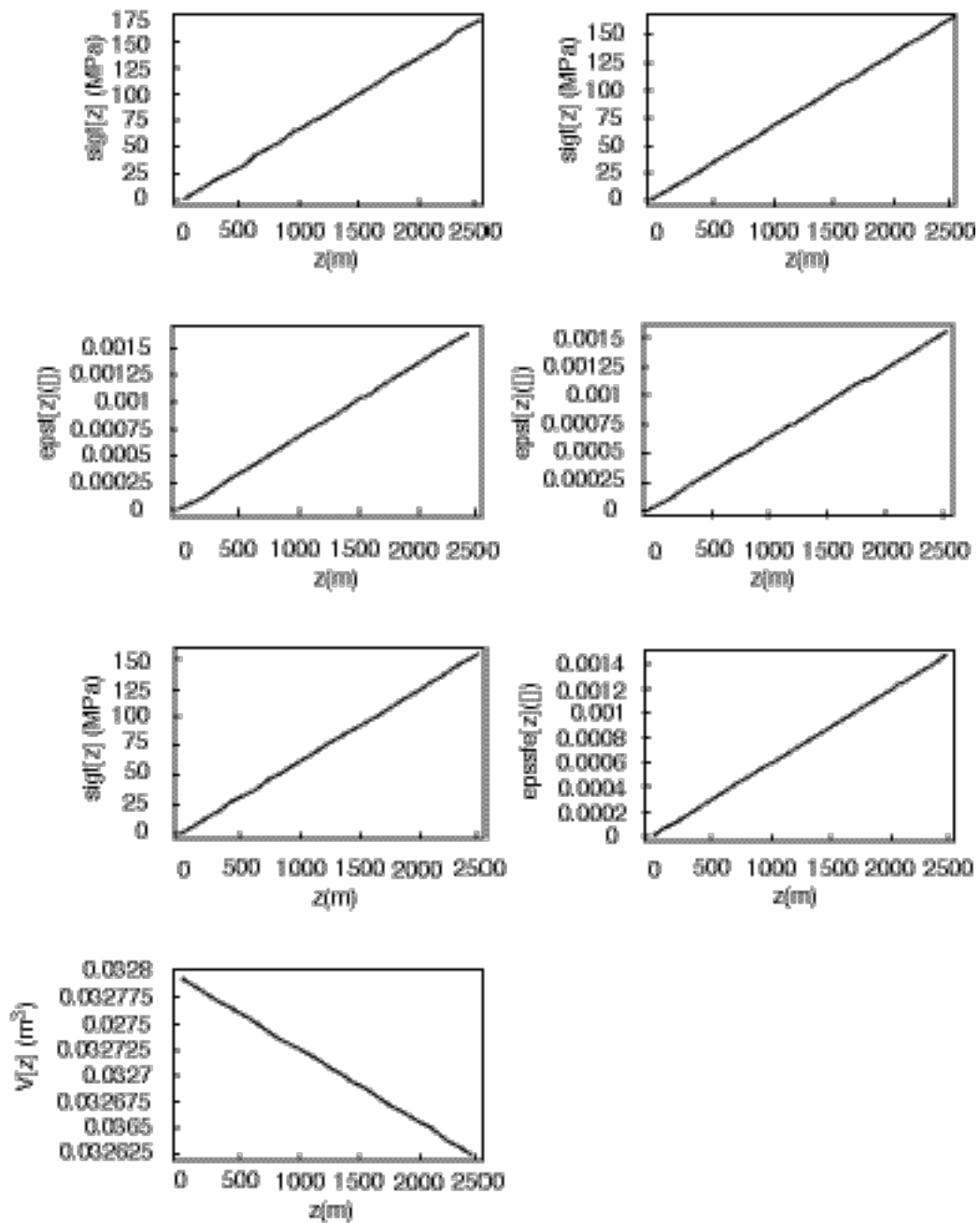


Fig. A4 – Componenti dello stress E della deformazione di MELBA in funzione della profondità z

Mostriamo in Fig. A4 i grafici delle grandezze calcolate per avere sempre chiare in mente gli ordini di grandezze delle stesse.

Ancora abbiamo a che fare con funzioni lineari.

A3. L' EQUILIBRIO STATICO DELLA BOA

Calcoliamo il volume di olio da "spiazzare" per l'equilibrio statico della boa. Ovvero ci chiediamo, in funzione della profondità, la quantità di olio che dovrà essere posta nella vescica natatoria affinché la boa sia neutra ad una data profondità $z[t]$ = Kostante e mantenga quindi la quota; risolvendo l'equazione (1) nel caso statico ($z''=0$ e $z'=0$) otteniamo la soluzione che ci interessa.

Affinché sia in equilibrio data profondità z Volio deve valere Volioequ. Valutiamolo a prescindere dalla massa che è un parametro che ci interessa mantenere libero; infatti cambiando la testa sensoria della boa cambia la massa ma la geometria rimane simile.

Volio equ=

$$0.102041 \left(\begin{aligned} & 9.8(10.5 + M) - \frac{0.32143}{0.000698 + \frac{0.102041 \left(1.7795 - 0.0346(3.8 + 0.01(12. - 0.006z[t])) + 0.011125(12. - 0.006z[t]) - 0.0000745(12. - 0.006z[t])^2 \right)}{0.102041 \left(5993.8 + 38.(12. - 0.006z[t]) - 0.375(12. - 0.006z[t])^2 \right) + 0.102041(1. + 0.1z[t])}} + \\ & + \frac{0.0000675427(-0.1 + 0.102041(1. + 0.1z[t]))}{0.000698 + \frac{0.102041 \left(1.7795 - 0.0346(3.8 + 0.01(12. - 0.006z[t])) + 0.011125(12. - 0.006z[t]) - 0.0000745(12. - 0.006z[t])^2 \right)}{0.102041 \left(5993.8 + 38.(12. - 0.006z[t]) - 0.375(12. - 0.006z[t])^2 \right) + 0.102041(1. + 0.1z[t])}} \end{aligned} \right) \cdot \left(\frac{0.102041 \left(1.7795 - 0.0346(3.8 + 0.01(12. - 0.006z[t])) + 0.011125(12. - 0.006z[t]) - 0.0000745(12. - 0.006z[t])^2 \right)}{0.000698 + \frac{0.102041 \left(5993.8 + 38.(12. - 0.006z[t]) - 0.375(12. - 0.006z[t])^2 \right) + 0.102041(1. + 0.1z[t])}} \right)$$

Ad esempio per $z=0$ o profmax ED $M=39.5$ kg si ottengono i valore della quantità di olio (espressi in metri cubi) che mantengono in assetto neutro la boa:

volioequ[0]=0,0159098 m³ per $z=0$ m

volioequ[2500]=0,0154554 m³ per $z=2500$ m

la differenza tra la superficie e la massima profondità è quindi di 454,4 cm³. Questo è il massimo quantitativo di olio che sarà necessario far fluire dalla vescica al serbatoio e viceversa.

Mostriamo, in Fig. A5, il volume di olio in equilibrio in funzione della profondità

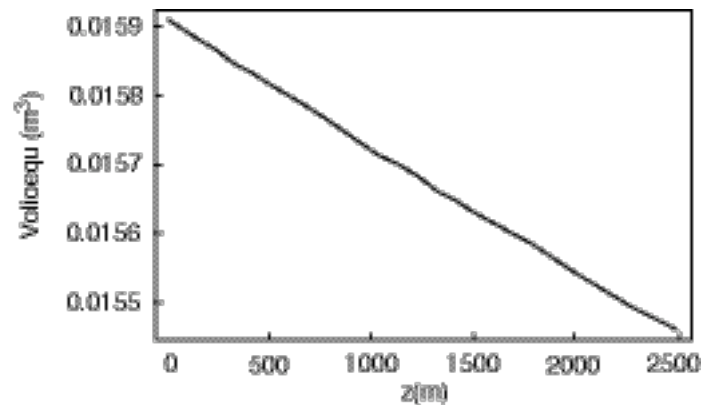


Fig. A5 – Volume di olio che necessita spazzare per mantenere MELBA in equilibrio in funzione della profondità

Possiamo notare come, nelle attuali condizioni vi sia una variazione della quota di equilibrio di circa 180 cm^3 di olio per 1000m di quota. Quindi un errore di spazzamento di soli 18 cm^3 corrisponde ad errore della quota di equilibrio di 100 metri.

A titolo di esempio valutiamo la spinta di Archimede, espressa in Kg, in questo caso il volume di olio (Volio) è quello di equilibrio alla superficie del mare ($z=0$) e la spinta vale:

$$\text{volio} = \text{volioequ} / z[t] \rightarrow 0.$$

$$\text{spinta}[z_] := \rho[z] * (V[z] + \text{Volio} - \text{Veme}) * g$$

$$0.0159098$$

$$\text{spinta}[z] =$$

$$\frac{9.8 \left(0.0487088 - 6.89211 \times 10^{-6} (-0.1 + 0.102041(1 + 0.1z[t])) \right)}{\frac{349}{500000} + \frac{0.102041 \left(1.7795 - 0.0346 \left(3.8 + 0.01 \left(12 \frac{3z[t]}{500} \right) \right) + 0.011125 \left(12 \frac{3z[t]}{500} \right) - 0.0000745 \left(12 \frac{3z[t]}{500} \right)^2 \right)}{0.102041 \left(5993.8 + 38 \left(12 \frac{3z[t]}{500} \right) - 0.375 \left(12 \frac{3z[t]}{500} \right)^2 \right) + 0.102041(1 + 0.1z[t])}}$$

Ovvero variando la profondità z, confrontiamola con le forze statiche (Fig. A6):

$$(\mathbf{M} + \mathbf{Ma}) * g$$

$$490 \text{ Newton}$$

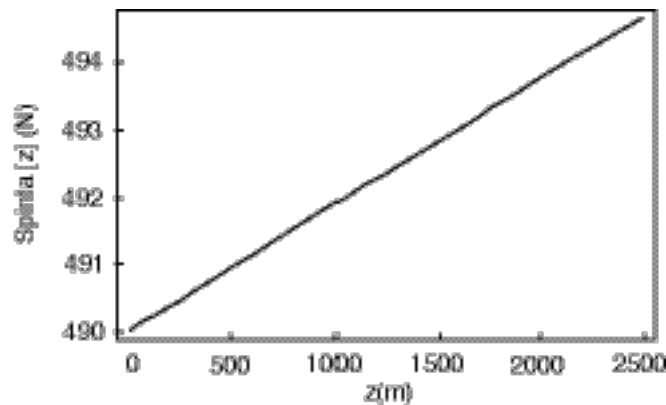


Fig. A6 - Spinta di Archimede in funzione della profondità z

La situazione è delicata in quanto normalmente la boa è quasi neutra. Dai grafici precedenti notiamo come la forza peso è quasi eguagliata dalla spinta di Archimede per cui risulta importante il contributo della forza viscosa idrodinamica, normalmente dell'ordine di 0.5 N contro la forza peso dell'ordine dei 500N. L'equazione del moto è quindi dominata anche da questo termine all'equilibrio.

A4. PRIMA SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE DEL MOTO

A4.1 Caso della caduta libera

Mostriamo, a titolo di esempio, la caduta indefinita, senza la spinta dell'olio; Risolvendo l'equazione del moto in maniera numerica mediante il software Mathematica della Wolfram Research, che fa uso di diversi metodi tra cui quello di Runge-Knutta del quarto ordine. Posto $V_{olio} = 0$ otteniamo per la $z[t]$ e la velocità $z'[t]$ le seguenti funzioni riportate nella Fig. A7:

Ovviamente la boa raggiunge i 15000 metri con appena un rallentamento, non essendoci la spinta dell'olio. Questo caso, naturalmente, è irrealistico ma serve a mostrare l'equilibrio raggiunto dalle forze cosicché il moto è quasi a velocità costante (Fig. A8).

A4.2 Un esempio a fissata profondità

Fissiamo ora una profondità desiderata di 1550 metri e assegnamo un tempo di viaggio sufficientemente lungo. Risolvendo l'equazione del moto in maniera numerica otteniamo (Fig. A9):

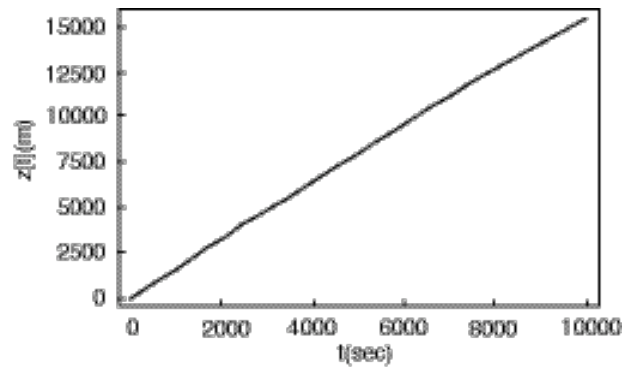


Fig. A7 – Equazione oraria del moto (caso senza la spinta dell'olio)

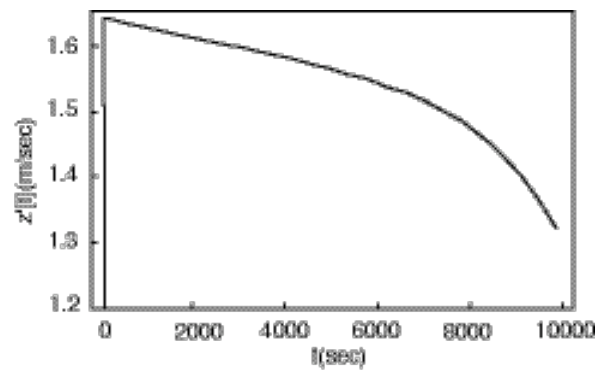


Fig. A8 – Velocità di MELBA in funzione del tempo (caso senza olio)

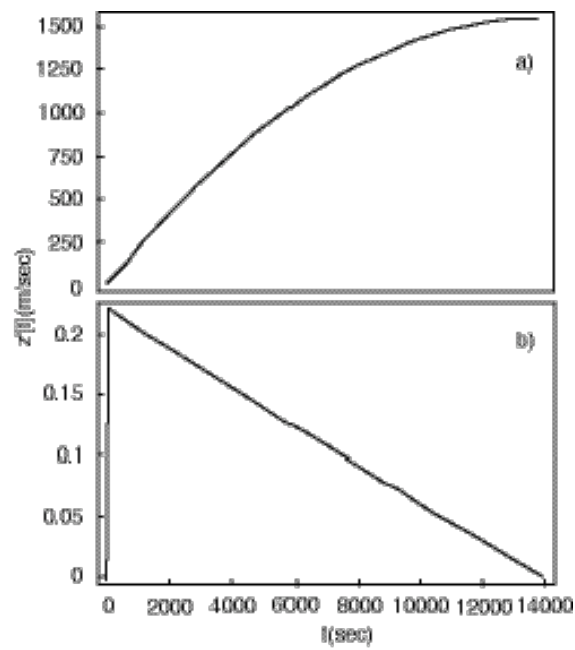


Fig. A.9 – a) Equazione oraria $z(t)$, b) velocità di MELBA

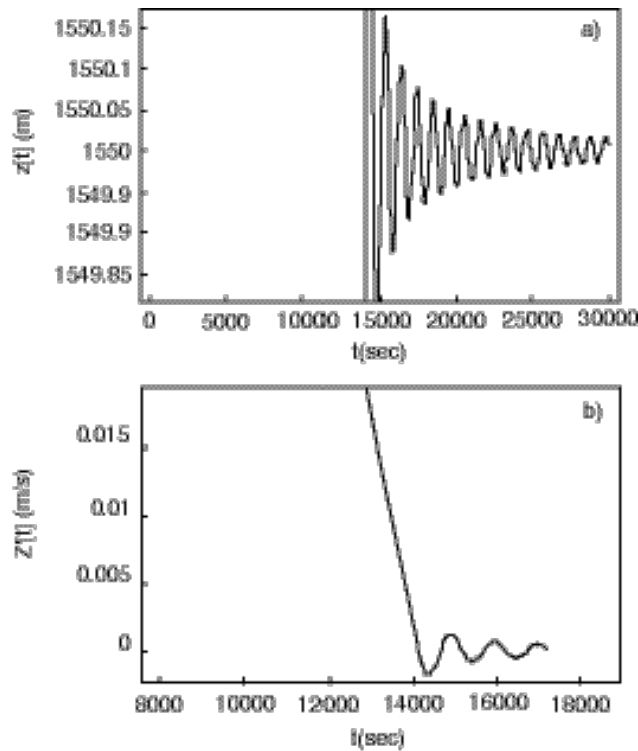


Fig. A.10 – a) Oscillazione attorno alla posizione di equilibrio (particolare), b) oscillazione attorno alla posizione di equilibrio della velocità

Ovvero un moto uniformemente decelerato. In particolare alla fine della discesa (Fig. A10):

Come potevamo aspettarci la traiettoria oscilla attorno alla posizione di equilibrio stabile.

A.5 L'APPROSSIMAZIONE DELLA TRAIETTORIA MEDIANTE UNA PARABOLA

La traiettoria calcolata nell'esempio precedente assomiglia molto ad una parabola (moto uniformemente decelerato come si evince anche dal grafico della velocità). Abbiamo quindi buone speranze di poter approssimare la traiettoria con una semplice equazione algebrica come ci proponevamo. La complicazioni sorgono nell'inserire i parametri della boa nell'equazione algebrica, onde non risolvere se non una volta, l'equazione differenziale se ad esempio cambiando la geometria della boa.

Nell'esempio precedente il tempo di viaggio della boa è stato assegnato ad hoc; troviamo adesso, mediante un fit non lineare, il tempo (t_{fin}) di viaggio in funzione della profondità che si desidera raggiungere (z_{fin}) e della massa M della boa. Poi troveremo il tempo di apertura

della valvola (o della pompa) necessari allo spiazzamento dell'olio. Ripetiamo il procedimento di prima, ma con M variabile. Nota bene: partiamo sempre con velocità circa 0.

A) Tempo di viaggio

Effettuando molti calcoli come il precedente e provando diverse funzioni di prova abbiamo trovato la seguente forma che mi da il tempo di viaggio (t_{fin}) in funzione della massa (M) e della profondità (z_{fin}) desiderata.

$$t_{fin} = 2312.51 \sqrt{\frac{z_{fin}}{M}}$$

La formula ha un comportamento abbastanza ovvio in funzione di z_{fin} ed M.

Mostriamo l'accordo tra il fit ed i dati calcolati precedentemente per due diverse masse della boa, 19,5 Kg (curva superiore) e 59,5 Kg (curva inferiore) (Fig. A11).

L'accordo è molto soddisfacente. Ridiamo alla Massa il suo valore originario variabile.

Il tempo impiegato dalla boa è dunque funzione della radice quadrata della profondità da raggiungere per la quale è stato spiazzato *istantaneamente* il corrispondente quantitativo di olio affinché l'equilibrio sia raggiunto a quella profondità. La profondità iniziale è sempre 0, ma se parto da una quota intermedia posso ricavare il tempo dalla equazione sottraendo il tempo impiegato per raggiungere la quota iniziale.

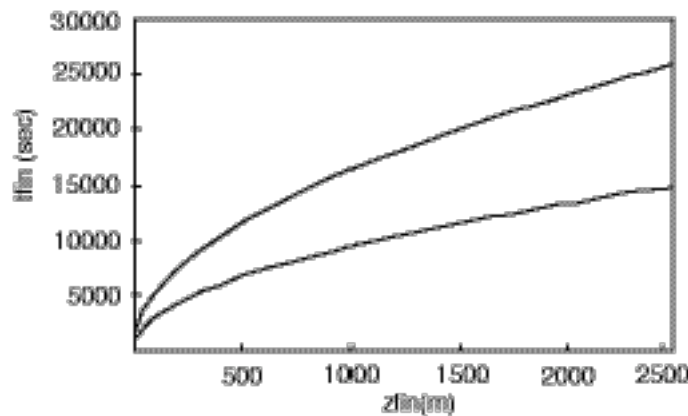


Fig. A11 – Tempo di viaggio di MELBA in funzione della profondità di arrivo (partenza dalla superficie) il tempo inferiore è per la massa maggiore (59.5 kg), l'altro per massa di 19.5 kg

A questo punto sappiamo il tempo impiegato dalla boa data la profondità di arrivo. Come potevamo aspettarci si tratta di un moto uniformemente ritardato, per cui la legge del moto è molto semplice.

Quindi dati la Massa (M), il tempo iniziale (t_{in}), la quota iniziale (z_i) e quella finale (z_{fin}) risolvo l'equazione e paragono con la parabola corrispondente; ovvero dati quindi z_{fin} , t_{in} e z_i ho l'equazione del moto $z[t]$ (t_{fin} è stato determinato empiricamente)

Se l'approssimazione tramite parabola sarà soddisfacente ci dimenticheremo dell'equazione differenziale ed useremo una parabola $z_p[t]$ come equazione del moto per la boa. La parabola sarà caratterizzata solo dai parametri punto iniziale e finale, ovvero z_i , t_i e z_{fin} e t_{fin} . t_{fin} sarà espresso tramite l'interpolazione poiché è ignoto a priori.

Consideriamo allora la parabola $z_p[t]$ di equazione:

$$z_p[t] := z_{fin} + \frac{z_i - z_{fin}}{(t_{in} - t_{fin})^2} * (t - t_{fin})^2$$

Paragoniamo la soluzione esatta e la parabola (continua) (Fig. A12)

L'accordo è ottimo!

In particolare alla fine del moto (Fig. A13)

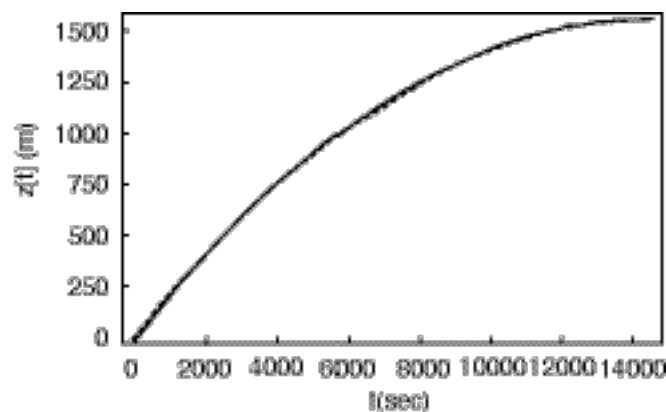


Fig. A12 – Equazione oraria del moto di MELBA soluzione esatta (continua) e approssimata (tratteggiata)

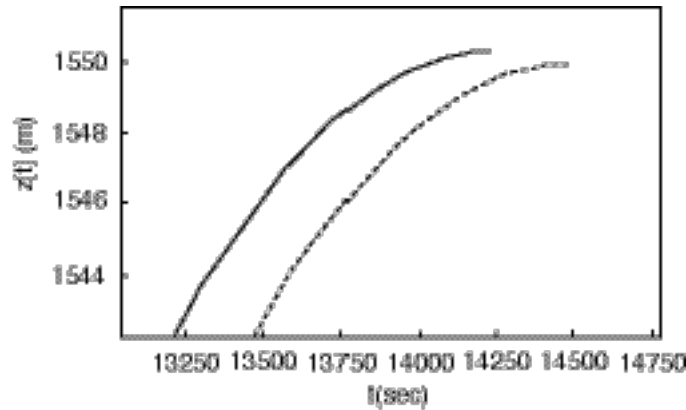


Fig. A13 - Equazione oraria del moto di MELBA soluzione esatta (continua) e approssimata (tratteggiata) (particolare finale)

D'ora in avanti avrò a che fare solo con una equazione algebrica.

Il passo successivo sarà di considerare non nullo il tempo di funzionamento della pompa o della valvola.

L'equazione della parabola allora è:

$$z(z) = z_{fin} + \frac{1.86996 \times 10^{-7} M (z - z_{fin} + z_i) \left(t - t_{in} - 2312.51 \sqrt{\frac{1}{M}} \sqrt{\text{Abs}[z_{fin} - z_i]} \right)^2}{\text{Abs}[z_{fin} - z_i]}$$

Funzione dei soli tre parametri noti: z iniziale (z_i) finale z_{fin} e la massa M

Eseguiamo una missione completa con salite discese e a quota fissa.

Aggiungiamo la possibilità di una missione "statica" a quota fissa con un certo tempo di permanenza; da notare che la quota z_{in} non può essere eguale a z_{fin} per problemi di singolarità, per cui la poniamo pochissimo differente (es 1000 e 1000.0001) (Fig. A14)

In particolare l'approssimazione "parabolica" taglia le oscillazioni, come mostrato nel grafico successivo (Fig. A15).

A questo punto dobbiamo ricordarci che il tempo di funzionamento della valvola e della pompa è finito e non istantaneo come supposto fino ad ora.

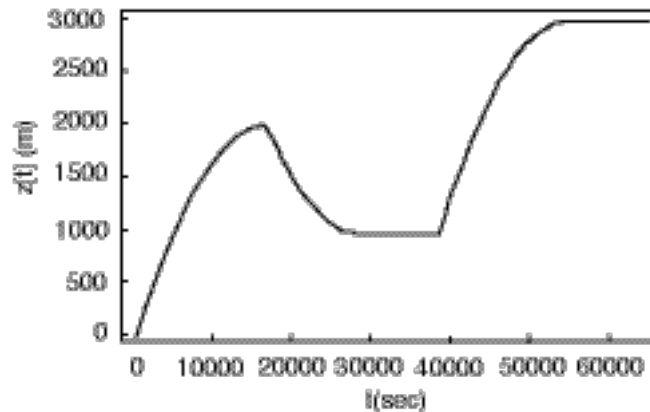


Fig. A14 – Possibile missione completa di MELBA. Soluzione esatta (continuo) ed approssimata (tratteggiata)

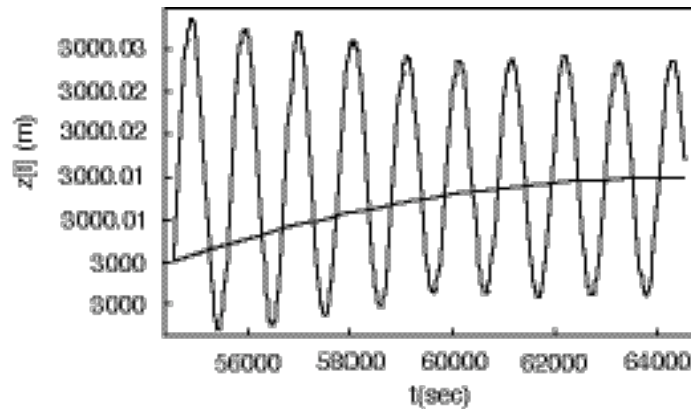


Fig. A15 – Particolare della fase finale del moto soluzione esatta (continuo) e approssimata (tratteggiata)

A.6 LA VALVOLA HA PORTATA FINITA: STIMA DELLA PORTATA

La portata della valvola, secondo le specifiche della casa produttrice Hydro Le-Luc è espressa in Fig. A16.

A.6.1 Considerazione

Il volume massimo di olio spiazzato è di circa 450 cm^3 ; la curva della portata è particolarmente sensibile alle basse profondità per cui il caso più difficile da trattare è quello in cui si parte da $z_{in}=0$ e si apre la valvola fino a spiazzare il massimo olio consentito, ovvero 450 cm^3 . Questo richiede un tempo che può essere stimato in circa 200sec (approssimazione di portata minima, 2cc/sec a quota 0) e 100 secondi (approssimazione di portata massima

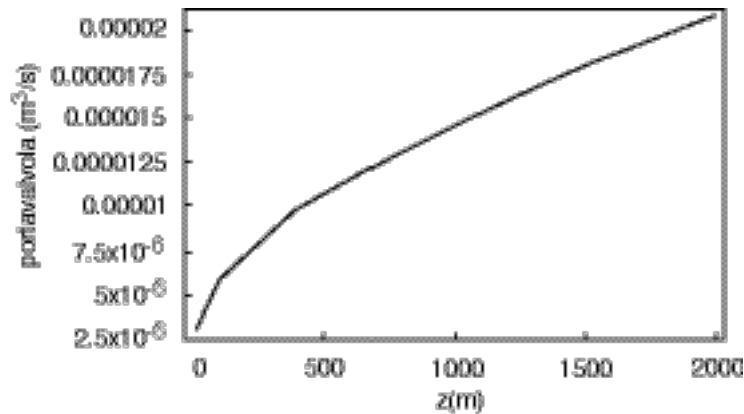


Fig. A16 – Portata della valvola in funzione della profondità

considerando, dai grafici precedenti, una velocità di 0.2 m/sec di discesa per 200 secondi = 30 metri e prendendo la portata, circa $4 \text{ cm}^3/\text{sec}$, a quella profondità). Con buona approssimazione il valore reale di olio spiazzato corrisponde alla portata della valvola ad una quota intermedia circa (20m e quindi $4 \text{ cm}^3/\text{sec}$) $4 \cdot 200 = 800 \text{ cm}^3$. Questo è il caso in cui commettiamo il massimo errore, che è quindi del 90% rispetto al caso in cui considero costante la profondità ad un valore intermedio.

Quindi nel primo caso aprendo la valvola per 200 sec crediamo di avere spiazzato 400 cm^3 di olio ma in realtà ne abbiamo spiazzato circa $4 \cdot 200 = 800 \text{ cm}^3$. Ricordando che per 18 cm^3 corrisponde un errore di quota di 100m approssimare la portata della valvola come costante al valore della quota iniziale è inaccettabile. Se invece consideriamo la portata costante al valore della quota finale desiderata andiamo già meglio sia perché l'errore è inferiore sia perché è meglio sbagliare per difetto di olio che per eccesso. Infatti altrimenti rischiamo o di danneggiare le boe o di spendere molta energia per risalire di quota.

Se la portata della valvola è variabile con la profondità la quantità di olio spiazzato nell'intervallo di tempo t_{open} e t_{close} (tempi di apertura e chiusura della valvola) sarà dato dall'integrale della funzione di $z[t]$ portata tra $z[t_{open}]$ e $z[t_{close}]$ moltiplicato per l'intervallo di tempo.

Le complicazioni sorgono dal fatto che conosciamo t_{open} , t_{close} e $z[t_{open}]$ ma $z[t_{close}]$ dipende dall'equazione del moto che a sua volta dipende da come agisce la valvola. Si tratta cioè di un problema accoppiato. Sebbene sia facilmente risolvibile con due sistemi di equazioni non è la strada migliore. Inoltre per fattori non calcolati (andamento della temperatura e della salinità diversa dal previsto, etc...) il sistema di controllo dovrà comunque intervenire lungo la discesa (o la salita) per cui affaticarci troppo sul modello è inutile. I

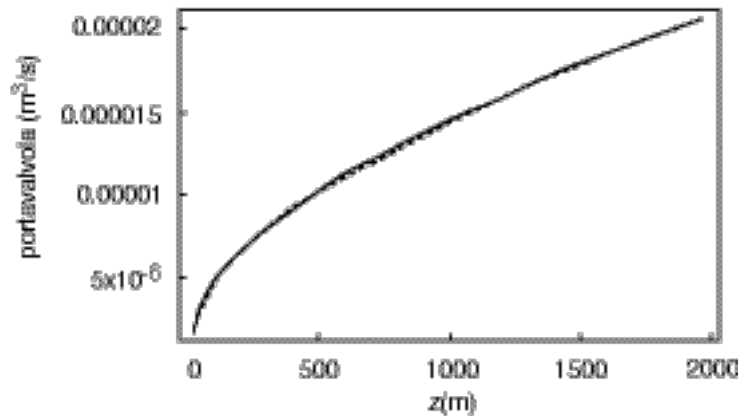


Fig. A17 – Portata della valvola in funzione della profondità e sua approssimazione

sistemi possono essere risolti ma a noi interessa una approssimazione algebrica, che appare particolarmente difficile nei casi sopraesposti (bassa profondità iniziale e alta finale). Esistono più modi. Il più semplice è di considerare costante la portata della valvola. Il secondo è di approssimare la $z[t]$ che compare nella equazione che descrive la portata della valvola con la $z_p[t]$, ovvero la parabola corrispondente. Per inciso la traiettoria, essendo la profondità finale dipendente solo dal quantitativo di olio spazzato e non dal suo modo, può essere considerata eguale alla parabola precedentemente calcolata. Ciò non sarà vero per i primi metri di percorso ma dopo sì.

Effettuiamo un fit della portata della valvola

$$\text{ModelPortvalv}(z) = 1.59869 \times 10^{-6} + 2.68774 \times 10^{-7} z[t]^{0.561458}$$

e corrispondentemente (Fig. A17)

Questo è il modello di fit che descrive la portata della valvola in funzione di z .

A.7 LA SOLUZIONE COMPLETA

A.7.1 Valutazione dell'olio spazzato

L'olio spazzato dalla valvola, al tempo t , vale $\text{oliotolto}[z]$

$$\text{oliotolto}[z] := \frac{(t - \text{topen})}{z[t] - z_{\text{topen}}} * \int_{z_{\text{topen}}}^{z[t]} \text{modelportvalv}[z] dz$$

Voglio sapere, dati z_{topen} quanto tempo devo aprire ($t - \text{topen}$) per spiazzare un certo quantitativo oliotolto . il problema nasce dalla presenza di $z[t]$ che è variabile e non conosco la z al tempo di chiusura.

Ripetiamo che le complicazioni sorgono dal fatto che conosciamo topen , tclose e $z[\text{topen}]$ ma $z[\text{tclose}]$ dipende dall'equazione del moto che a sua volta dipende da come agisce la valvola.

Iniziamo col risolvere l'equazione del moto per il tempo in cui la valvola è aperta; poi la risolviamo con la valvola chiusa ($\text{oliotolto}[z] = \text{Costante}$) e le condizioni iniziali per la equazione saranno le condizioni finali del sistema precedente (raccordo). L'unione delle due soluzioni sarà la soluzione completa. Confrontiamo poi inserendo come $z[t]$ l'approssimazione parabolica $z_p[t]$.

A.7.2 Tre casi a confronto

Caso1) Portata calcolata ponendo $z[t] = \text{Costante}$.

Come già valutato introduce degli errori eccessivi, dell'ordine del 90% sulla quota. Non può quindi essere preso in considerazione. E' migliore se poniamo la portata della valvola costante ed eguale al valore per la profondità massima desiderata, in modo da sottostimare notevolmente la quantità di olio spiazzato per la discesa, e sovrastimarla in salita. In entrambi i casi è meglio che il contrario.

Caso2) Portata calcolata ponendo $z[t] = z_p[t]$ e paragone con il Caso3) Esatto.

Per valutare il caso esatto devo risolvere l'equazione in due stadi in cui nel primo Valio è funzione di z e poi si stabilizza quando chiudo la valvola.

Valutando e confrontando questi ultimi due casi abbiamo i seguenti comportamenti.

Aperto la valvola per 130 secondi il moto di MELba, per i primi 130 secondi è il seguente (Fig. A18).

MELba percorre 18 metri circa e la portata della valvola raddoppia. Successivamente otteniamo la traiettoria esatta paragonata con quella parabolica (in rosso) e quella in cui si considera la portata della valvola istantanea (quasi simile alla parabola). I primi metri dal

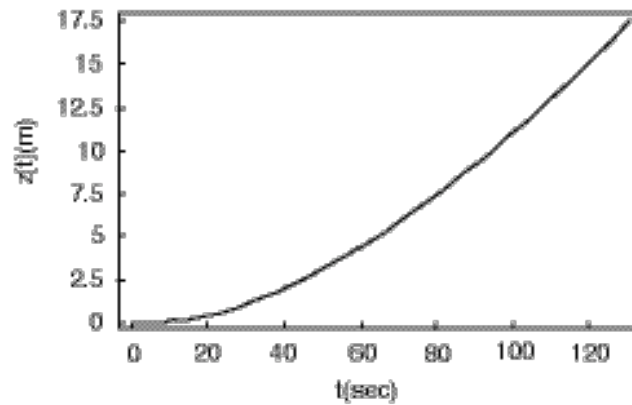


Fig. A18 -- Equazione oraria del moto con valvola aperta per 130 sec

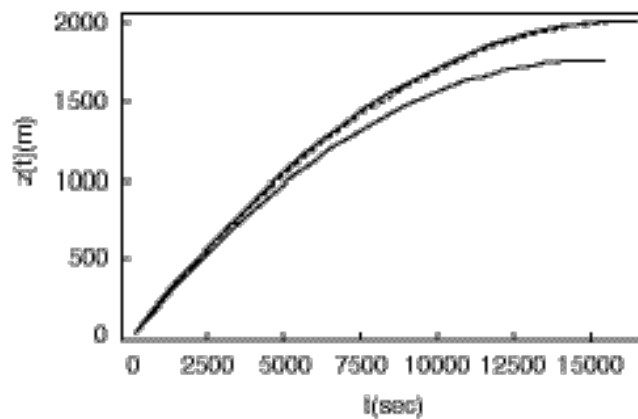


Fig. A19 – Equazione oraria del moto per istanti successivi alla chiusura delle valvole ($t > 130$). Traiettorie parabolica (continua) ed esatta (tratteggio), La parabola inferiore rappresenta il caso di spezzamento istantaneo dell'olio

punto di vista del sistema di controllo ci interessano poco; il sistema di controllo interverrà certamente più avanti (Fig. A19).

Ovvero nel caso più estremo (partenza da 0 ed arrivo a 2000 metri) sovrastimiamo di circa il 10%, 200 metri, la quota di arrivo. Questo è il caso peggiore in assoluto che può capitare. E' meglio sovrastimare che sottostimare, che comporta l'accensione della pompa con dispendio di energia. Lo abbiamo scelto apposta così il sistema di controllo può ritoccare la quota agendo solo sulla valvola.

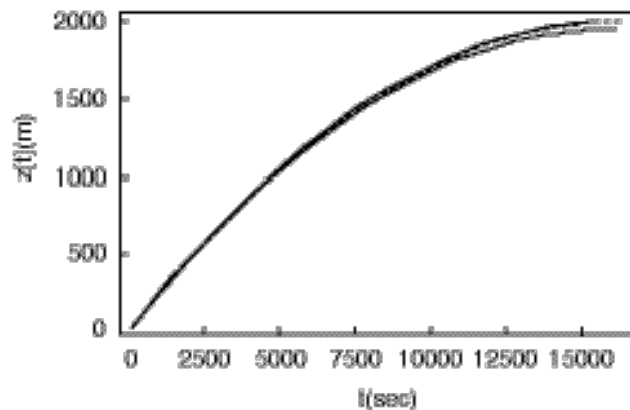


Fig. A20 – Equazione oraria del moto per istanti successivi alla chiusura delle valvole ($t > 130$). Traiettorie parabolica (continua) ed esatta (tratteggiata). La parabola inferiore rappresenta il caso di spezzamento istantaneo dell'olio + z iniziale = 40

Se parto da 40 metri l'approssimazione parabolica è migliore poiché la sensibilità della valvola alla profondità è minore (Fig. A20) e l'errore è di soli 50 metri, sempre sovrastimato come voluto.

Quindi se nell'integrale di oliotolto $[z]$ inserisco la parabola ed integro ottengo una sovrastima dell'olio tolto che comporta un errore massimo di circa il 10%. Il motivo per cui la quantità di olio è sempre sovrastimata è perché la parabola considerata è quella ottenuta spiazzando tutto l'olio istantaneamente.

A.7.3 Un altro modo possibile

Un altro sistema considerato è stato quello di stimare la quantità di olio tolta funzione del tempo di apertura e soprattutto (data la non linearità) della profondità iniziale.

Tale fit è stato eseguito in numerosi modi ma non ha dato risultati soddisfacenti; infatti a fronte di equazioni algebriche non lineari piuttosto complesse nelle variabili tempo e profondità iniziale l'errore massimo si è mantenuto intorno ai 60cc. Nelle condizioni "standard", ovvero la boa precedentemente considerata significa un errore di circa 300m sulla quota, troppo elevato.

A.8 LA POMPA

A differenza della valvola, la cui portata variava di un fattore 10, la portata della pompa può essere considerata costante; infatti varia tra $1.22 \text{ cm}^3/\text{sec}$ (0 m) $1.07 \text{ cm}^3/\text{s}$ (2000 m)

considerando un tempo di azionamento massimo di 300s ne risulta, se consideriamo il valore medio di $1.15 \text{ cm}^3/\text{s}$ di $0.08 \cdot 300 \text{ cm}^3 = 24 \text{ cm}^3$. Questo corrisponde ad un errore massimo di quota di circa 120m nelle peggiori condizioni, accettabile considerando le gradi semplificazioni che comporta. La traiettoria sarà quella di una parabola a "gonfiaggio istantaneo".

A.9 CONCLUSIONI

In questo lavoro ci proponevamo di risolvere una versione semplificata dell'equazione differenziale del moto di MELba, allo scopo di trovare una equazione algebrica parametrica che ne simuli in modo "soddisfacente" il moto dati i parametri fondamentali; il tutto allo scopo di poter sempre lavorare solo con una equazione algebrica al posto di un'equazione differenziale.

La procedura trovata è quindi la seguente:

Assegnati i parametri quali peso etc,

1) Scelta la profondità desiderata, z_{fin} si calcola l'olio da spiazzare tramite la valvola o la pompa in funzione della profondità finale desiderata (z_{fin}), mediante la formula:

$$\text{olio} = 0.102041 \left(\begin{aligned} & 9.8(10.5 + M) - \frac{0.32143}{0.000698 + \frac{0.102041 \left(1.7795 - 0.0346(3.8 + 0.01(12. - 0.006z[t]) \right) + 0.011125(12. - 0.006z[t]) - 0.0000745(12. - 0.006z[t])^2}{0.102041 \left(5993.8 + 38.(12. - 0.006z[t]) - 0.375(12. - 0.006z[t])^2 \right) + 0.102041(1. + 0.1z[t])} \right)} + \\ & + \frac{0.0000675427(-0.1 + 0.102041(1. + 0.1z[t]))}{0.000698 + \frac{0.102041 \left(1.7795 - 0.0346(3.8 + 0.01(12. - 0.006z[t]) \right) + 0.011125(12. - 0.006z[t]) - 0.0000745(12. - 0.006z[t])^2}{0.102041 \left(5993.8 + 38.(12. - 0.006z[t]) - 0.375(12. - 0.006z[t])^2 \right) + 0.102041(1. + 0.1z[t])} \right)} \end{aligned} \right) \cdot \left(\frac{0.102041 \left(1.7795 - 0.0346(3.8 + 0.01(12. - 0.006z[t]) \right) + 0.011125(12. - 0.006z[t]) - 0.0000745(12. - 0.006z[t])^2}{0.102041 \left(5993.8 + 38.(12. - 0.006z[t]) - 0.375(12. - 0.006z[t])^2 \right) + 0.102041(1. + 0.1z[t])} \right) \right)$$

dove a $z[t]$ va sostituita z_{fin} e M è la massa. Per quanto complicata è un'equazione algebrica.

2) Si calcola il tempo t_{fin} di viaggio necessario affinché la boa si porti in equilibrio con la pressione esterna mediante la formula

$$t_{fin} = 2312.51 \sqrt{\frac{z_{fin}}{M}}$$

Questa formula è valida se la geometria della boa non cambia. Tuttavia numerose prove sono state fatte per geometrie diverse dimostrando che è una formula “lentamente variabile”.

3) L'equazione del moto può allora, con ragionevole approssimazione (Max err=200m, errore medio 50metri) essere considerata la parabola di equazione data

$$z_p[t] := z_{fin} + \frac{z_i + z_{fin}}{(t_{in} - t_{fin})^2} * (t - t_{fin})^2$$

Ove t_{fin} è dato dalla formula precedente e t_{in} , z_{fin} , e z_i sono noti.

4) Si calcola il tempo di funzionamento della valvola o della pompa necessario a spiazzare la quantità di olio richiesta.

$$oliotolto[z] := \frac{(t - t_{open})}{z[t] - z_{topen}} * \int_{z_{topen}}^{z[t]} modelportvalv[z] dz$$

Ovvero

$$\frac{(t - t_{open}) \left(-1.59869 \times 10^{-6} z - t_{open} - 1.7213 \times 10^{-7} z_{topen}^{1.56146} + 1.59869 \times 10^{-6} z[t] + 1.7213 \times 10^{-7} z[t]^{1.561} \right)}{-z_{topen} + z[t]} = \text{olio}$$

Ove t_{open} e t sono i tempi di apertura e chiusura della valvola z_{topen} , la quota al momento dell' apertura e $z[t]$ è la quota al tempo ricavabile dall'equazione della parabola nota. Quindi introducendo nella formula precedente non la $z[t]$ soluzione esatta bensì la sua approssimazione parabolica si rende facilmente risolvibile.

Il sistema di controllo calcolerà le differenze tra la posizione $z(t)$ misurata e quella teorica prevista dal modello algebrico $z_p(t)$ intervenendo di conseguenza.

Edito dall' 
Unità Comunicazione e Informazione
Lungotevere Grande Ammiraglio Thaon di Revel, 76 - 00196 Roma
Stampa: Centro Stampa Tecnografico - C. R. Frascati
www.enea.it

Finito di stampare nel mese di Settembre 2004