



HAL
open science

L'ANNEAU DE COHOMOLOGIE DES VARIÉTÉS DE SEIFERT NON-ORIENTABLES

Anne Bauval, Claude Hayat

► **To cite this version:**

Anne Bauval, Claude Hayat. L'ANNEAU DE COHOMOLOGIE DES VARIÉTÉS DE SEIFERT NON-ORIENTABLES. Osaka J. Math., 2017, 54, pp.157 - 195. hal-01976438

HAL Id: hal-01976438

<https://hal.science/hal-01976438>

Submitted on 19 Jan 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

L'ANNEAU DE COHOMOLOGIE DES VARIÉTÉS DE SEIFERT NON-ORIENTABLES

A. BAUVAL, C. HAYAT

ABSTRACT. If p is a prime number, the cohomology ring with coefficients in $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ of an orientable or non-orientable Seifert manifold M is obtained using a Δ -simplicial decomposition of M . Several choices must be made before applying the Alexander-Whitney formula. The answers are given in terms of the classical cellular generators.

RESUME Si p est un nombre premier, l'anneau de cohomologie à coefficients dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ d'une variété de Seifert M , orientable ou non-orientable est obtenu à partir d'une décomposition Δ -simpliciale de M . Plusieurs choix sont à faire avant d'appliquer la formule d'Alexander-Whitney. Les réponses sont données en fonction des générateurs cellulaires classiques.

1. INTRODUCTION, NOTATIONS

1.1. Introduction. Dans cet article on détermine l'anneau de cohomologie à valeurs dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, où p est un entier premier, pour toutes les variétés de Seifert orientables ou non. Les résultats ont été annoncés dans [2]. Le cas où il s'agit de variétés de Seifert orientables dont la base est une sphère, et les coefficients à valeurs dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, a été étudié dans [3]. L'article [1] a généralisé ce résultat en supprimant l'hypothèse sur la base et l'article [5] a obtenu cet anneau de cohomologie des variétés de Seifert orientables à valeurs dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Dans l'article [15], sont déterminés les anneaux de cohomologie à coefficients entiers (et cycliques finis) des variétés S^3/Γ où Γ est un sous-groupe fini de $SO(4)$ agissant librement sur S^3 .

Notre attention pour le calcul des cup-produits a été attirée par les études portant sur une extension du Théorème de Borsuk-Ulam pour les variétés de dimension 3 [6]. En effet si τ est une involution sur une telle variété M , alors toute application continue f de M dans \mathbb{R}^3 admet un point $x \in M$ tel que $f(\tau(x)) = x$ si et seulement si la puissance trois pour le cup-produit de la classe de cohomologie, à coefficients dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, associée à τ est non nulle.

Les preuves détaillées des résultats annoncés dans [2] sont obtenues en utilisant un point de vue Δ -simplicial. Utiliser cette méthode d'abord pour les variétés orientables rend plus courte et plus facile son extension au cas non-orientable. Les choix les plus délicats sont ceux de relevés du complexe cellulaire dans le complexe Δ -simplicial auxquels on impose d'être des cocycles Δ -simpliciaux, Section 6. Décrivons les étapes de la méthode que nous avons choisie.

¹2010 Mathematics Subject Classification. Primary 13D03, 57S25; Secondary 55N45

Nous commençons par construire une décomposition cellulaire de la variété M , Section 4, en précisant dans la Sous-section 4.1 les mots qui permettent de paver les 2-cellules, bords du voisinage tubulaire des fibres singulières et de la dernière 3-sphère. Le complexe cellulaire $(C_*)_{cell}$ ainsi obtenu est subdivisé en un complexe Δ -simplicial $(C_*)_{simp}$.

Notons $T: (C_*)_{cell} \rightarrow (C_*)_{simp}$ le morphisme associé à cette subdivision, et $T^t: C_{simp}^* \rightarrow C_{cell}^*$ le morphisme transposé défini dans la Sous-section 5. Nous choisissons, pour chaque générateur ξ des cochaînes cellulaires, un relevé $R(\xi)$ de $T^t(\xi)$ dans les cochaînes Δ -simpliciales. Ce choix est fait de telle façon que $R(\xi)$ soit un cocycle et pas seulement une cochaîne, Section 6.

Le cup-produit de deux cochaînes Δ -simpliciales est calculé par la formule d'Alexander-Whitney. Pour les cup-produits sur $H^1(M, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \otimes H^1(M, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$, on décrit un calcul qui permet d'éviter l'évaluation sur les (nombreux !) 2-simplexes, Sous-sections 7.1, 7.2, 8.1. Pour les cup-produits sur $H^1(M, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \otimes H^2(M, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$, on applique la formule d'Alexander-Whitney de façon plus classique puis le quasi-isomorphisme T^t , Sous-sections 7.3 et 8.2.

Le plan de cet article est comme suit. Après cette section d'introduction, de notations sur les variétés de Seifert et de quelques invariants associés, la Section 2 décrit une décomposition cellulaire d'une variété de Seifert quelconque M et donne une présentation des groupes de cohomologie $H^*(M, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$. Dans la Section 3, les théorèmes principaux présentent tous les cup-produits. La preuve de ces résultats constitue le reste de l'article. Dans les Sections et Sous-sections 4, 5, 6 sont décrits les choix faits pour une décomposition Δ -simpliciale, le quasi-isomorphisme T , et les relevés des cocycles cellulaires en cocycles Δ -simpliciaux.

Dans la Section 7, on applique, via la formule d'Alexander-Whitney, tous ces choix pour le calcul des cup-produits lorsque les coefficients de la cohomologie sont égaux à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, et dans la Section 8 lorsque les coefficients de la cohomologie sont égaux à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ où $p > 2$ est un entier premier.

La Section 9 est faite de figures symbolisant les décompositions cellulaires et simpliciales.

1.2. Notations. Dans la suite, le groupe $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sera noté \mathbb{Z}_p .

En suivant essentiellement les notations de Orlik [11], mais aussi celles de [13], [14], M est une variété de Seifert décrite par une liste d'invariants de Seifert

$$\{e; (\Upsilon, g); (a_1, b_1), \dots, (a_m, b_m)\}.$$

Ici e est un entier, le TYPE Υ sera décrit plus bas, g est le genre de la surface de base (l'espace des orbites obtenues en identifiant chaque fibre S^1 de M à un point), et pour chaque k , les entiers a_k, b_k sont premiers entre eux avec $a_k \neq 0$ (si $b_k = 0$ alors $a_k = \pm 1$).

Comme dans [11], p.74 (et aussi pour d'autres auteurs), nous introduisons une fibre supplémentaire, non-exceptionnelle $a_0 = 1, b_0 = e$ et utilisons la présentation

suivante du groupe fondamental de M :

$$(1) \quad \pi_1(M) = \left\langle \begin{array}{l} q_0, \dots, q_m \\ t_1, \dots, t_{g'} \\ h \end{array} \left| \begin{array}{l} [q_k, h] \text{ and } q_k^{a_k} h^{b_k}, \quad 0 \leq k \leq m \\ t_j h t_j^{-1} h^{-\varepsilon_j}, \quad 1 \leq j \leq g' \\ q_0 \dots q_m V \end{array} \right. \right\rangle,$$

où les générateurs et g', V sont décrits ci-dessous.

- Le TYPE Υ de M est égal à:
 - o_1 si la surface de base et l'espace total sont orientables (alors tous les ε_j sont égaux à 1) ;
 - o_2 si la surface de base est orientable et l'espace total non-orientable, alors $g \geq 1$ (forcément tous les ε_j sont égaux à -1) ;
 - n_1 si la surface de base et l'espace total sont non-orientables alors $g \geq 1$ et de plus tous les ε_j sont égaux à 1 ;
 - n_2 si la surface de base est non-orientable (alors $g \geq 1$) et l'espace total est orientable (forcément tous les ε_j sont égaux à -1) ;
 - n_3 si la surface de base et l'espace total sont non-orientables avec de plus, tous les ε_j égaux à -1 sauf $\varepsilon_1 = 1$, et $g \geq 2$;
 - n_4 si la surface de base et l'espace total sont non-orientables avec de plus, tous les ε_j égaux à -1 sauf $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$, et $g \geq 3$.
- L'orientabilité de la surface de base et le genre g déterminent le nombre g' de générateurs t_j et le mot V dans la longue relation de $\pi_1(M)$ de la façon suivante:
 - quand la surface de base est orientable, i.e. $\Upsilon = o_i$, $g' = 2g$ et $V = [t_1, t_2] \dots [t_{2g-1}, t_{2g}]$;
 - quand la surface de base est non-orientable, i.e. $\Upsilon = n_i$, $g' = g$ et $V = t_1^2 \dots t_g^2$.
- Le générateur h correspond à la fibre générique régulière.
- Les générateurs q_k pour $0 \leq k \leq m$ correspondent aux (possibles) fibres exceptionnelles.

Dans ce papier nous utiliserons les notations suivantes.

Notations 1. Soit M une variété de Seifert décrite par une liste d'invariants de Seifert

$$\{e; (\Upsilon, g); (a_1, b_1), \dots, (a_m, b_m)\},$$

et soit p un entier premier.

- Notons a le plus petit commun multiple des a_k , avec de plus $a_0 = 1$ et $b_0 = e$, alors

$$c = \sum_{k=0}^m b_k (a/a_k).$$

- Le nombre de a_k divisibles par p sera noté n .
 - Quand $n = 0$, on suppose que b_k est divisible par p si et seulement si $0 \leq k < r$;

- quand $n > 0$, on suppose que a_k est divisible par p si et seulement si $0 \leq k \leq n$, les indices k sont réordonnés par p -valuation décroissante $\nu_p(a_k)$.
- On distingue trois cas :
 - Cas 1, $n = 0$ et c est divisible par p ;
 - Cas 2, $n = 0$ et c n'est pas divisible par p ;
 - Cas 3, $n > 0$.

2. LES GROUPES DE COHOMOLOGIE

2.1. Le complexe cellulaire. La variété de Seifert M admet une décomposition cellulaire en cellules de dimension de 0 à 3 qui est décrite ci-dessous. Voir Figures 1, 2, 3, 4, Section 9.

- une 0-cellule σ ;
- des 1-cellules (d'origine et d'extrémité l'unique 0-cellule) t_j, q_k, h ;
- des 2-cellules :
 - δ de bord :
 - $\prod [t_{2i-1}, t_{2i}] \prod q_k$ pour les TYPES o_i ; $\prod t_j^2 \prod q_k$ pour les TYPES n_i ;
 - ρ_k de bords $[h, q_k]$ qui correspondent à des tores ;
 - ν_j de bords $ht_j h^{-\varepsilon_j} t_j^{-1}$ qui correspondent à des tores si $\varepsilon_j = 1$ et à des bouteilles de Klein si $\varepsilon_j = -1$;
 - μ_k disques de bords $w_{a_k, b_k}(q_k, h)$, qui est un mot en q_k, h comportant a_k fois la lettre q_k et b_k fois la lettre h , mais dans un ordre très particulier qui sera précisé plus loin (Sous-section 4.1) ;
- des 3-cellules :
 - ϵ dont le bord est pavé par deux exemplaires de δ et de chaque ν_j et un exemplaire de chaque ρ_k ;
 - ζ_k dont le bord est pavé par deux exemplaires de μ_k et un exemplaire de ρ_k . Ce pavage, assez délicat, est lié à une propriété essentielle du mot $w_{a_k, b_k}(q_k, h)$, sera expliqué plus loin.

2.2. Groupes et générateurs de $H^*(M, \mathbb{Z}_p)$. On note \hat{x} le dual de x . Sauf précision, les indices j sont des entiers vérifiant $1 \leq j \leq g'$ et sont absents si $g = 0$.

Théorème 2. Pour $p = 2$.

Les groupes de cohomologie à coefficients dans \mathbb{Z}_2 sont :

- $H^0(M, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$ et $H^3(M, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2\{\gamma\}$.

$H^1(M, \mathbb{Z}_2)$ et $H^2(M, \mathbb{Z}_2)$ dépendent des Cas 1, 2, 3 et non des TYPES :

- Cas 1

- $H^1(M, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2^{g'+1} = \mathbb{Z}_2\{\theta_j, 1 \leq j \leq g'; \alpha\}$ où $\theta_j = [\hat{t}_j]$ et $\alpha = [\hat{h} - \sum b_k a_k^{-1} \hat{q}_k]$;
- $H^2(M, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2^{g'+1} = \mathbb{Z}_2\{\varphi_j, 1 \leq j \leq g'; \beta\}$ où $\varphi_j = [\hat{\nu}_j]$ et $\beta = [\hat{\delta}]$.

- Cas 2

- $H^1(M, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2^{g'} = \mathbb{Z}_2\{\theta_j\}$ où $\theta_j = [\hat{t}_j]$;

- $H^2(M, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2^{g'} = \mathbb{Z}_2\{\varphi_j\}$ où $\varphi_j = [\hat{\nu}_j]$.

– Cas 3

- $H^1(M, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2^{g'+n-1} = \mathbb{Z}_2\{\theta_j; \alpha_k, 0 < k \leq n-1\}$ où $\theta_j = [\hat{t}_j]$ et $\alpha_k = [\hat{q}_k - \hat{q}_0]$;
- $H^2(M, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2^{g'+n-1} = \mathbb{Z}_2\{\varphi_j; \beta_k\}$ où $\varphi_j = [\hat{\nu}_j]$ et $\beta_k = [\hat{\mu}_k]$ pour $0 < k$.

Pour $p > 2$.

Les groupes de cohomologie à coefficients dans \mathbb{Z}_p sont :

- $H^0(M, \mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p$ et $H^3(M, \mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p\{\gamma\}$ pour o_1 et n_2 tandis que $H^3(M, \mathbb{Z}_p) = 0$ pour o_2, n_1, n_3, n_4 .

$H^1(M, \mathbb{Z}_p)$ et $H^2(M, \mathbb{Z}_p)$ dépendent des Cas 1,2,3 et du TYPE :

TYPE o_1 Les résultats sont les mêmes que lorsque $p = 2$ avec $g' = 2g$ éventuellement nul.

TYPE o_2

– Cas 1,2

- $H^1(M, \mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p^{2g} = \mathbb{Z}_p\{\theta_j\}$ où $\theta_j = [\hat{t}_j]$;
- $H^2(M, \mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p^{2g-1} = \mathbb{Z}_p\{\varphi_j; \beta\}$ où $\varphi_j = [\hat{\nu}_j + (-1)^j \hat{\nu}_1]$ pour $j > 2$ et $\beta = [\hat{\delta}]$.

– Cas 3

- $H^1(M, \mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p^{2g+n-1} = \mathbb{Z}_p\{\theta_j; \alpha_k\}$ où $\theta_j = [\hat{t}_j]$ et $\alpha_k = [\hat{q}_k - \hat{q}_0]$ pour $0 < k$;
- $H^2(M, \mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p^{2g+n-1} = \mathbb{Z}_p\{\varphi_j; \beta_k\}$ où $\varphi_j = [\hat{\nu}_j + (-1)^j \hat{\nu}_1]$ pour $j > 2$ et $\beta_k = [\hat{\mu}_k]$.

TYPE n_1

– Cas 1,2

- $H^1(M, \mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p^g = \mathbb{Z}_p\{\theta_j; \alpha\}$ où $\theta_j = [\hat{t}_j - \hat{t}_1]$ pour $j > 1$ et $\alpha = [\frac{c}{2a}\hat{t}_1 + \hat{h} - \sum b_k a_k^{-1} \hat{q}_k]$, la constante c étant égale à 0 dans le Cas 1 ;
- $H^2 = \mathbb{Z}_p^{g-1} = \mathbb{Z}_p\{\varphi_j\}$ où $\varphi_j = [\hat{\nu}_j - \hat{\nu}_1]$ pour $j > 1$.

– Cas 3

- $H^1(M, \mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p^{g+n-1} = \mathbb{Z}_p\{\theta_j; \alpha_k\}$ où $\theta_j = [\hat{t}_j - \hat{t}_1]$ pour $j > 1$ et $\alpha_k = [\hat{q}_k - \frac{1}{2}\hat{t}_g]$;
- $H^2(M, \mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p^{g+n-2} = \mathbb{Z}_p\{\varphi_j; \beta_k\}$ où $\varphi_j = [\hat{\nu}_j - \hat{\nu}_1]$ pour $j > 1$ et $\beta_k = [\hat{\mu}_k]$ pour $0 < k$.

TYPE n_2

– Cas 1,2,3

- $H^1(M, \mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p^{g-1+n} = \mathbb{Z}_p\{\theta_j, j > 1; \alpha_k\}$ où $\theta_j = [\hat{t}_j - \hat{t}_1]$ pour $j > 1$ et $\alpha_k = [\hat{q}_k - 1/2\hat{t}_g]$;
- $H^2(M, \mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p^{n+g-1} = \mathbb{Z}_p\{\varphi_j; \beta_k\}$ où $\varphi_j = [\hat{\nu}_j]$ pour $j > 1$ et $\beta_k = [\hat{\mu}_k]$.

TYPE n_3

– Cas 1,2,3

- $H^1(M, \mathbb{Z}_p)$ a les mêmes générateurs que pour le TYPE n_2 ;

- $H^2(M, \mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p^{g-2+n} = \mathbb{Z}_p\{\varphi_j; \beta_k\}$ où $\varphi_j = [\hat{\nu}_j]$ pour $j > 2$ et $\beta_k = [\hat{\mu}_k]$.

TYPE n_4

– Cas 1, 2, 3

- $H^1(M, \mathbb{Z}_p)$ a les mêmes générateurs que pour le TYPE n_2 ;
- $H^2(M, \mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p^{g-2+n} = \mathbb{Z}_p\{\varphi_3; \varphi_j, j > 3; \beta_k\}$ où $\varphi_3 = [\hat{\nu}_2 - \hat{\nu}_1]$, $\varphi_j = [\hat{\nu}_j]$ pour $j > 3$ et $\beta_k = [\hat{\mu}_k]$.

Les quatre lemmes suivants constituent la preuve de ce théorème. Ils détaillent les bords des chaînes, les bords des cochaînes et les expressions de $H^1(M, \mathbb{Z}_p)$ et $H^2(M, \mathbb{Z}_p)$ pour un p premier quelconque.

De la décomposition cellulaire, on déduit la description suivante des bords des chaînes :

Lemme 3. *Bord des chaînes cellulaires*

$$\begin{aligned} \partial\sigma &= 0, \partial t_j = \partial q_k = \partial h = 0, \partial\rho_k = 0, \\ \partial\delta &= \sum q_k \text{ pour } o_i, \partial\delta = 2\sum t_j + \sum q_k \text{ pour } n_i, \\ \partial\nu_j &= 0 \text{ lorsque } \varepsilon_j = 1, \partial\nu_j = 2h \text{ lorsque } \varepsilon_j = -1, \\ \partial\mu_k &= a_k q_k + b_k h, \\ \partial\epsilon &= \sum \rho_k \text{ pour } o_1, \partial\epsilon = \sum \rho_k + 2\sum (-1)^j \nu_j \text{ pour } o_2, \partial\epsilon = \sum \rho_k + 2\sum_{\varepsilon_j=1} \nu_j \text{ pour } \\ &n_i, \\ \partial\zeta_k &= -\rho_k. \end{aligned}$$

Par dualité, on obtient les bords des cochaînes :

Lemme 4. *Bord des cochaînes cellulaires*

$$\begin{aligned} \partial\hat{\sigma} &= 0, \partial\hat{\delta} = \partial\hat{\mu}_k = 0, \partial\hat{\epsilon} = \partial\hat{\zeta}_k = 0, \\ \partial\hat{t}_j &= 0 \text{ pour } o_i, \partial\hat{t}_j = 2\hat{\delta} \text{ pour } n_i, \\ \partial\hat{q}_k &= \hat{\delta} + a_k \hat{\mu}_k, \\ \partial\hat{h} &= \sum b_k \hat{\mu}_k + 2\sum_{\varepsilon_j=-1} \hat{\nu}_j, \\ \partial\hat{\nu}_j &= 0 \text{ pour } o_1, n_2, \text{ et pour } n_1, n_3, n_4 \text{ lorsque } \varepsilon_j = -1, \\ \partial\hat{\nu}_j &= 2(-1)^j \hat{\epsilon} \text{ pour } o_2, \partial\hat{\nu}_j = 2\hat{\epsilon} \text{ pour } n_1, n_3, n_4 \text{ lorsque } \varepsilon_j = 1, \\ \partial\hat{\rho}_k &= \hat{\epsilon} - \hat{\zeta}_k. \end{aligned}$$

Quel que soit l'anneau de coefficients A , $H^0(M, A) = A$ est engendré par $1 := [\hat{\sigma}]$. Le groupe $H^3(M, \mathbb{Z}_p)$ est égal à A pour o_1 et n_2 , et à $A/2A$ pour o_2, n_1, n_3, n_4 . Il est engendré par $\gamma := [\hat{\epsilon}] = [\hat{\zeta}_k]$.

Lemme 5. *Présentation du groupe $H^1(M, \mathbb{Z}_p)$*

1) *Quelque soit l'anneau de coefficients A , on a*

$H^1(M, A) = \{x\hat{h} + \sum y_j \hat{t}_j + \sum z_k \hat{q}_k \mid x, y_j, z_k \in A, (*)\}$ où la condition $(*)$ de cocycle est

$$\forall k, a_k z_k + b_k x = 0,$$

avec en plus, pour n_i , $\sum z_k = 0$; pour o_i , $\sum z_k = -2\sum y_j$; et pour o_2, n_2, n_3, n_4 , $2x = 0$.

2) *Si l'anneau $A = \mathbb{Z}$, ou \mathbb{Z}_p avec $p > 2$ premier, ceci se simplifie en*

pour o_2 , $H^1(M, A) = A^{2g} \times \{\sum z_k \hat{q}_k \mid z_k \in A, \forall k, a_k z_k = 0, \sum z_k = 0\}$;
 pour n_2, n_3, n_4 , $H^1(M, A) = \{\sum y_j \hat{t}_j + \sum z_k \hat{q}_k \mid y_j, z_k \in A, \forall k, a_k z_k = 0, 2 \sum y_j + \sum z_k = 0\}$.

3) Si l'anneau $A = \mathbb{Z}_2$, ceci se simplifie pour tous les TYPES en

$$H^1(M, A) = \{x \hat{h} + \sum y_j \hat{t}_j + \sum z_k \hat{q}_k \mid x, y_j, z_k \in A, \forall k, a_k z_k + b_k x = 0, \sum z_k = 0\}.$$

Lemme 6. *Présentation du groupe $H^2(M, \mathbb{Z}_p)$*

$H^2 = \{x \hat{\delta} + \sum y_j \hat{v}_j + \sum z_k \hat{\mu}_k \mid x, y_j, z_k \in A, (*)\} / \text{Im}(\partial)$ où la condition $(*)$ est vide pour o_1, n_2 ; pour o_2 , $2 \sum (-1)^j y_j = 0$; pour n_1, n_3, n_4 , $2 \sum_{\varepsilon_j=1} y_j = 0$.

De plus $\text{Im}(\partial)$ est engendré par les $\hat{\delta} + a_k \hat{\mu}_k$, $\sum b_k \hat{\mu}_k + 2 \sum_{\varepsilon_j=-1} \hat{v}_j$, avec de plus $2 \hat{\delta}$ pour n_i .

3. LES THÉORÈMES PRINCIPAUX

Théorème 7. *Pour $p = 2$, les seuls cup-produits $\cup : H^1(M, \mathbb{Z}_2) \otimes H^1(M, \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^2(M, \mathbb{Z}_2)$ sont :*

- Dans le Cas 1 :

- $\theta_i \cup \theta_j$

- Pour les TYPES o_i , les cup-produits $\theta_i \cup \theta_j$ sont nuls sauf $\theta_{2i} \cup \theta_{2i-1} = \beta$;
- Pour les TYPES n_i , les cup-produits $\theta_i \cup \theta_j$ sont nuls sauf $\theta_i \cup \theta_i = \beta$.

- $\theta_j \cup \alpha$

- Pour tous les TYPES, on a $\theta_j \cup \alpha = \varphi_j$.

- $\alpha \cup \alpha$

- Pour les TYPES o_1 et n_1 , on a $\alpha \cup \alpha = c/2\beta$;
- Pour les TYPES o_2 et n_2 , on a $\alpha \cup \alpha = c/2\beta + \sum_{1 \leq j} \varphi_j$;
- Pour le TYPE n_3 , on a $\alpha \cup \alpha = c/2\beta + \sum_{j>1} \varphi_j$;
- Pour le TYPE n_4 , on a $\alpha \cup \alpha = c/2\beta + \sum_{j>2} \varphi_j$.²

- Dans le Cas 2 :

- $\theta_i \cup \theta_j$

- Pour tous les TYPES, $\theta_i \cup \theta_j = 0$.

- Dans le Cas 3 :

- $\theta_i \cup \theta_j$

- Pour tous les TYPES, on a $\theta_i \cup \theta_j = 0$.

- $\theta_j \cup \alpha_k$

- Pour tous les TYPES, on a $\theta_j \cup \alpha_k = 0$.

- $\alpha_k \cup \alpha_i$

- Pour tous les TYPES, on a $\alpha_k \cup \alpha_i = \frac{a_0}{2} \sum_{0 < \ell \leq n-1} \beta_\ell + \delta_{k,\ell} \frac{a_k}{2} \beta_k$.

Théorème 8. *Pour $p = 2$, les seuls cup-produits $\cup : H^1(M, \mathbb{Z}_2) \otimes H^2(M, \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^3(M, \mathbb{Z}_2)$ sont :*

- Dans les trois Cas :

²Dans [5], Theorem 1.3 (i), le coefficient de β devrait être remplacé par $c/2$.

- $\theta_i \cup \varphi_j$
 - Pour les TYPES o_i , les $\theta_i \cup \varphi_j$ non nuls sont :
si j est impair $\theta_{j+1} \cup \varphi_j = \gamma$, si j est pair $\theta_{j-1} \cup \varphi_j = \gamma$;
 - Pour les TYPES n_i , on a $\theta_j \cup \varphi_j = \gamma$ et 0 sinon.
- Dans le Cas 1 :
 - $\alpha \cup \varphi_j$
 - Pour les TYPES o_1 et n_1 , $\alpha \cup \varphi_j = 0$;
 - Pour les TYPES o_2 et n_2 , $\alpha \cup \varphi_j = \gamma$;
 - Pour le TYPE n_3 , $\alpha \cup \varphi_j = \gamma$ si $j \neq 1$ et 0 sinon ;
 - Pour le TYPE n_4 , $\alpha \cup \varphi_j = \gamma$ si $j \neq 1, 2$ et 0 sinon.
 - $\theta_i \cup \beta$
 - Pour tous les TYPES, $\theta_i \cup \beta = 0$.
 - $\alpha \cup \beta$
 - Pour tous les TYPES, $\alpha \cup \beta = \gamma$.
- Dans le Cas 3 :
 - $\alpha_k \cup \varphi_j$
 - Pour tous les TYPES, $\alpha_k \cup \varphi_j = 0$.
 - $\alpha_k \cup \beta_k$
 - Pour tous les TYPES, $\alpha_k \cup \beta_k = \gamma$ et 0 sinon.
 - $\theta_i \cup \beta_j$
 - Pour tous les TYPES, $\theta_i \cup \beta_k = 0$.

Théorème 9. Pour $p > 2$,

- Dans le Cas 1, les seuls cup-produits $\cup : H^1(M, \mathbb{Z}_p) \otimes H^1(M, \mathbb{Z}_p) \rightarrow H^2(M, \mathbb{Z}_p)$ sont :

- $\theta_i \cup \theta_j$
 - Pour les TYPES o_i , les cup-produits $\theta_i \cup \theta_j$ sont nuls sauf $\theta_{2i-1} \cup \theta_{2i} = \beta$;
 - Pour les TYPES n_i , les cup-produits $\theta_i \cup \theta_j$ sont nuls.
- $\theta_j \cup \alpha$
 - Pour le TYPE o_1 , on a $\theta_j \cup \alpha = \varphi_j$;
 - Pour le TYPE n_1 , on a $\theta_j \cup \alpha = \varphi_j, j > 1$.

- $\alpha \cup \alpha$
 - Pour les TYPES o_1 et n_1 , les cup-produits $\alpha \cup \alpha$ sont nuls.

- Dans le Cas 2, les seuls cup-produits $\cup : H^1(M, \mathbb{Z}_p) \otimes H^1(M, \mathbb{Z}_p) \rightarrow H^2(M, \mathbb{Z}_p)$ sont :

- $\theta_i \cup \theta_j$
 - Pour le TYPE o_2 , les cup-produits $\theta_i \cup \theta_j$ sont nuls sauf $\theta_{2i-1} \cup \theta_{2i} = \beta$;
 - Pour tous les autres TYPES, $\theta_i \cup \theta_j = 0$.
- $\theta_j \cup \alpha$
 - Pour le TYPE n_1 , on a $\theta_j \cup \alpha = \varphi_j, j > 1$.

- Dans le Cas 3, les seuls cup-produits $\cup : H^1(M, \mathbb{Z}_p) \otimes H^1(M, \mathbb{Z}_p) \rightarrow H^2(M, \mathbb{Z}_p)$ sont :

- $\theta_i \cup \theta_j$
- Pour tous les TYPES, on a $\theta_i \cup \theta_j = 0$.
- $\theta_j \cup \alpha_k$
- Pour tous les TYPES, on a $\theta_j \cup \alpha_k = 0$.
- $\alpha_k \cup \alpha_i$
- Pour tous les TYPES, on a $\alpha_k \cup \alpha_i = 0$ sont nuls.

Théorème 10. Pour $p > 2$, les seuls cup-produits $\cup : H^1(M, \mathbb{Z}_p) \otimes H^2(M, \mathbb{Z}_p) \rightarrow H^3(M, \mathbb{Z}_p)$ sont :

- Dans les trois Cas :
 - $\theta_i \cup \varphi_j$
- Pour le TYPE o_1 , on a pour j impair $\theta_{j+1} \cup \varphi_j = -\gamma$ et pour j pair $\theta_{j-1} \cup \varphi_j = \gamma$;
- Pour le TYPE n_2 , on a $\theta_j \cup \varphi_j = \gamma$, et 0 sinon.
- Dans le Cas 1, pour tous les TYPES :
 - $\theta_i \cup \beta = 0$
 - $\alpha \cup \beta = \gamma$
 - $\alpha \cup \varphi_j = 0$
- Dans le Cas 3 :
 - $\alpha_i \cup \beta_k$
- Pour les TYPES o_1 et n_2 , on a $\alpha_i \cup \beta_k = 0$ sauf si $i = k$ et dans cette situation on a $\alpha_k \cup \beta_k = b_k^{-1}\gamma$.
 - $\alpha_k \cup \varphi_j$
- Pour le TYPE o_1 , on a $\alpha_k \cup \varphi_j = 0$.
 - $\alpha_k \cup \varphi_j$
- Pour le TYPE n_2 , pour tout indice k , on a $\alpha_k \cup \varphi_g = -\frac{1}{2}\gamma$.

4. DÉCOMPOSITION Δ -SIMPLICIALE

Avant de décrire le découpage Δ -simplicial, nous donnons la définition et les propriétés du mot $w_{a_k, b_k}(q_k, h)$ qui permet de paver la sphère bordant ζ_k comme décrit dans 2.1.

4.1. Définition et propriétés de $w_{\alpha, \beta}$. Le cas $a_k = 1, b_k \leq 0$ sera très simple, mais dans le cas général $a_k, b_k > 0$, pour pouvoir paver comme évoqué dans 2.1 la sphère bordant ζ_k , le bord $w_{a_k, b_k}(q_k, h)$ de μ_k doit être un mot tel qu'en effectuant sur ce mot une certaine permutation circulaire et en remplaçant un certain hq_k par $q_k h$, on retombe sur le mot de départ. C'est cette propriété qui permet le pavage de la sphère par deux exemplaires de μ_k et un exemplaire de ρ_k pour former le bord de la 3-cellule ζ_k .

Définition 11. Le mot $w_{\alpha, \beta}$ (pour α, β premiers entre eux) est défini récursivement par :

$$w_{1,0}(a, t) = a, w_{0,1}(a, t) = t, w_{1,1}(a, t) = at,$$

$$\text{si } 0 < \alpha < \beta, w_{\alpha, \alpha+\beta}(a, t) = w_{\alpha, \beta}(at, t),$$

si $0 < \beta < \alpha$, $w_{\alpha+\beta,\beta}(a, t) = w_{\alpha,\beta}(a, at)$, si bien que le mot $w_{\alpha,\beta}(a, t)$ contient α fois la lettre a et β fois la lettre t .

Par une preuve similaire à celle des articles [12], [10], [7], [9], on montre que ces mots $w_{\alpha,\beta}$ vérifient les relations suivantes :

Proposition 12. *Soient α, β, u, v entiers tels que*

$$\alpha u - \beta v = 1, \quad 0 < u \leq \beta, \quad 0 \leq v < \alpha,$$

alors

$$\begin{aligned} w_{\alpha,\beta}(a, t) &= w_{\alpha-v,\beta-u}(a, t)w_{v,u}(a, t) = \\ &= (w_{v,u}(a, t)t^{-1})at(a^{-1}w_{\alpha-v,\beta-u}(a, t)). \end{aligned}$$

Notations 13. *Dans la suite, nous appliquerons ce théorème à $\alpha = a_k, \beta = b_k$ et noterons u_k, v_k les entiers u, v correspondants. En notant $w_{a_k, b_k}(q_k, h)$ sous la forme $x_{k,1} \dots x_{k,z_k}$ avec les $x_{k,i}$ égaux à q_k (pour a_k d'entre eux dont le premier) ou h (pour b_k d'entre eux dont le dernier) (donc $z_k = a_k + b_k$), le théorème exprime que pour $w_k = z_k - u_k - v_k + 1$, le mot $w_{a_k, b_k}(q_k, h)$ est aussi égal à $x_{k,w_k} \dots x_{k,z_k-1} q_k h x_{k,2} \dots x_{k,w_k-1}$, et que de plus, le morceau $x_{k,w_k} \dots x_{k,z_k}$ de ce mot contient v_k fois q_k et u_k fois h .*

Dans le cas $b_k \leq 0$ (donc $a_k = 1$), nous poserons $u_k = 1, v_k = 0, w_k = z_k = 1 + |b_k|$, et $x_{k,1} = q_k, x_{k,\ell} = h$ pour $2 \leq \ell \leq z_k$.

4.2. Découpage Δ -simplicial. Transformons ce complexe cellulaire en complexe Δ -simplicial en rajoutant :

- un centre et des rayons aux 2-cellules δ et μ_k , pour remplacer chacune par une juxtaposition de triangles ;
- une “diagonale” aux ν_j, ρ_k , pour remplacer chacun par deux triangles ;
- pour chacune des 3-cellules ϵ, ζ_k , dont le bord est une sphère pavée par les 2-simplexes déjà construits : un centre, des rayons joignant ce centre aux sommets marqués sur la sphère ; des triangles joignant ce centre aux arêtes marquées sur la sphère, de manière à remplacer chaque 3-cellule par une juxtaposition de tétraèdres.

Plus précisément, on remplace la décomposition cellulaire ci-dessus par la décomposition Δ -simpliciale suivante.

1) Le 0-simplexe σ et les 1-simplexes t_j, q_k, h ,

2) Découpage des ρ_k , Figure 5 :

- des 1-simplexes g_k (d'origine et d'extrémité σ) et des 2-simplexes $\rho_{k,1}, \rho_{k,2}$, (de faces respectives $(h, g_k, q_k), (q_k, g_k, h)$).

3) Découpage des ν_j , Figures 6, 7, 8 :

- des 1-simplexes f_j (d'origine et d'extrémité σ) et des 2-simplexes $\nu_{j,2}$ (de faces (t_j, f_j, h)) et $\nu_{j,1}$ (de faces (h, f_j, t_j) si $\varepsilon_j = 1$, (h, t_j, f_j) si $\varepsilon_j = -1$).

4) Découpage de δ , Figures 9, 10 :

Dans le découpage de δ, ϵ , il faudra distinguer les TYPES o_1, o_2, n_1 à n_4 :

- Un 0-simplexe a , des 1-simplexes $e_0, \dots, e_{2g'+m}$ (d'origine a et d'extrémité σ).
On rappelle que le symbole g' est égal à $2g$ pour le Υ_{o_i} , et à g pour le $\Upsilon = n_i$.
- des 2-simplexes $\delta_0, \dots, \delta_{2g'+m}$, plus précisément :
 - pour les TYPES o_1, o_2 : δ_i , de faces, respectivement
 $(t_1, e_1, e_0), (t_2, e_2, e_1), (t_1, e_2, e_3), (t_2, e_3, e_4), \dots, (q_0, e_{4g+1}, e_{4g}), \dots, (q_m, e_0, e_{4g+m})$;
 - pour les TYPES n_1 à n_4 :
 $(t_1, e_1, e_0), (t_1, e_2, e_1), \dots, (q_0, e_{2g+1}, e_{2g}), \dots, (q_m, e_0, e_{2g+m})$.

5) Découpage de chaque μ_k , Figure 11, 12 :

Dans le découpage de μ_k, ζ_k il faudra distinguer le cas particulier $b_k \leq 0$ (et $a_k = 1$) du cas général :

- Un 0-simplexe c_k , des 1-simplexes $p_{k,1}, \dots, p_{k,z_k}$ (d'origine c_k et d'extrémité σ) ;
- des 2-simplexes $\mu_{k,1}, \dots, \mu_{k,z_k}$, de faces :
 - si $b_k > 0$: $(x_{k,1}, p_{k,2}, p_{k,1}), \dots, (x_{k,z_k}, p_{k,1}, p_{k,z_k})$
 - si $b_k < 0$: $(q_k, p_{k,2}, p_{k,1}), (h, p_{k,2}, p_{k,3}), \dots, (h, p_{k,z_k}, p_{k,1})$
 - si $b_k = 0$: $(q_k, p_{k,1}, p_{k,1})$.

6) Découpage de ϵ , Figures 13 à 17 :

- un 0-simplexe b ;
- des 1-simplexes A^+, A^- (d'origine b , d'extrémité a) ;
- des 1-simplexes $S_0^+, \dots, S_{2g'+m}^+, S_0^-, \dots, S_{2g'+m}^-$ (d'origine b et d'extrémité σ),
et des 2-simplexes $E_0^+, \dots, E_{2g'+m}^+, E_0^-, \dots, E_{2g'+m}^-$ avec E_ℓ^\pm de faces $(e_\ell, S_\ell^\pm, A^\pm)$;
- des 2-simplexes $T_0^+, \dots, T_{2g'+m}^+, T_0^-, \dots, T_{2g'+m}^-$, plus précisément :
 - pour les TYPES o_1, o_2 : $T_0^\pm, \dots, T_{4g+m}^\pm$ de faces
 $(t_1, S_1^\pm, S_0^\pm), (t_2, S_2^\pm, S_1^\pm), (t_1, S_2^\pm, S_3^\pm), (t_2, S_3^\pm, S_4^\pm), \dots, (q_m, S_0^\pm, S_{4g+m}^\pm)$;
 - pour les TYPES n_1 à n_4 : $T_0^\pm, \dots, T_{2g+m}^\pm$ de faces
 $(t_1, S_1^\pm, S_0^\pm), (t_1, S_2^\pm, S_1^\pm), \dots, (q_m, S_0^\pm, S_{2g+m}^\pm)$.

Notations 14. Ici la notation T_0^\pm de faces (t_1, S_1^\pm, S_0^\pm) signifie que les faces de T_0^+ sont (t_1, S_1^+, S_0^+) et celles de T_0^- sont (t_1, S_1^-, S_0^-) etc.

- des 2-simplexes $H_0, \dots, H_{2g'+m}$:
les faces de H_ℓ étant en général (h, S_ℓ^+, S_ℓ^-) , mais étant (h, S_ℓ^-, S_ℓ^+) si $\ell = 2j - 1 < 2g'$ avec $\varepsilon_j = -1$, i.e. dans les TYPES suivants : TYPE o_2 , ℓ impair $< 4g$; TYPE n_2 , ℓ impair $< 2g$; TYPE n_3 , ℓ impair, $3 \leq \ell < 2g$; TYPE n_4 , ℓ impair, $5 \leq \ell < 2g$;

- des 2-simplexes $F_0, \dots, F_{2g'+m}$, de faces :
 - pour le TYPE $o_1 : (f_1, S_1^+, S_0^-), (f_2, S_2^+, S_1^-), (f_1, S_2^+, S_3^-), (f_2, S_3^+, S_4^-), \dots, (g_m, S_0^+, S_{4g+m}^-)$;
 - pour le TYPE $o_2 : (f_1, S_1^+, S_0^-), (f_2, S_2^-, S_1^+), (f_1, S_2^-, S_3^+), (f_2, S_3^+, S_4^-), \dots, (g_m, S_0^+, S_{4g+m}^-)$;
 - pour le TYPE $n_1 : (f_1, S_1^+, S_0^-), (f_1, S_2^+, S_1^-), \dots, (g_m, S_0^+, S_{2g+m}^-)$;
 - pour le TYPE $n_2 : (f_1, S_1^+, S_0^-), (f_1, S_2^-, S_1^+), \dots, (g_m, S_0^+, S_{2g+m}^-)$;
 - pour le TYPE $n_3 : (f_1, S_1^+, S_0^-), (f_1, S_2^+, S_1^-), (f_2, S_3^+, S_2^-), (f_2, S_4^-, S_3^+), \dots, (g_m, S_0^+, S_{2g+m}^-)$;
 - pour le TYPE $n_4 : (f_1, S_1^+, S_0^-), (f_1, S_2^+, S_1^-), (f_2, S_3^+, S_2^-), (f_2, S_4^+, S_3^-), (f_3, S_5^+, S_4^-), (f_3, S_6^-, S_5^+), \dots, (g_m, S_0^+, S_{2g+m}^-)$;
- des 3-simplexes $D_0^+, \dots, D_{2g'+m}^+, D_0^-, \dots, D_{2g'+m}^-$, plus précisément :
 - pour les TYPES $o_1, o_2 : D_0^\pm, \dots, D_{4g+m}^\pm$ de faces $(\delta_0, T_0^\pm, E_1^\pm, E_0^\pm), (\delta_1, T_1^\pm, E_2^\pm, E_1^\pm), (\delta_2, T_2^\pm, E_3^\pm, E_2^\pm), (\delta_3, T_3^\pm, E_4^\pm, E_3^\pm), \dots, (\delta_{4g+m}, T_{4g+m}^\pm, E_0^\pm, E_{4g+m}^\pm)$;
 - pour les TYPES n_1 à $n_4 : D_0^\pm, \dots, D_{2g+m}^\pm$ de faces $(\delta_0, T_0^\pm, E_1^\pm, E_0^\pm), \dots, (\delta_{2g+m}, T_{2g+m}^\pm, E_0^\pm, E_{2g+m}^\pm)$;
- des 3-simplexes $N_{j,1}, N'_{j,1}, N_{j,2}, N'_{j,2}$ de faces,
 - pour le TYPE o_1 :
 - si j impair, $(\nu_{j,1}, H_{2j-1}, F_{2j-2}, T_{2j-2}^-), (\nu_{j,1}, H_{2j}, F_{2j}, T_{2j}^-), (\nu_{j,2}, T_{2j-2}^+, F_{2j-2}, H_{2j-2}), (\nu_{j,2}, T_{2j}^+, F_{2j}, H_{2j+1})$
 - si j pair, $(\nu_{j,1}, H_{2j-2}, F_{2j-3}, T_{2j-3}^-), (\nu_{j,1}, H_{2j-1}, F_{2j-1}, T_{2j-1}^-), (\nu_{j,2}, T_{2j-3}^+, F_{2j-3}, H_{2j-3}), (\nu_{j,2}, T_{2j-1}^+, F_{2j-1}, H_{2j})$;
 - pour le TYPE o_2 :
 - si j impair, $(\nu_{j,1}, H_{2j-1}, T_{2j-2}^-, F_{2j-2}), (\nu_{j,1}, H_{2j}, T_{2j}^+, F_{2j}), (\nu_{j,2}, T_{2j-2}^+, F_{2j-2}, H_{2j-2}), (\nu_{j,2}, T_{2j}^-, F_{2j}, H_{2j+1})$,
 - si j pair, $(\nu_{j,1}, H_{2j-2}, T_{2j-3}^+, F_{2j-3}), (\nu_{j,1}, H_{2j-1}, T_{2j-1}^-, F_{2j-1}), (\nu_{j,2}, T_{2j-3}^-, F_{2j-3}, H_{2j-3}), (\nu_{j,2}, T_{2j-1}^+, F_{2j-1}, H_{2j})$;
 - pour les TYPES n_1 à n_4 :
 - si $\varepsilon_j = 1$, $(\nu_{j,1}, H_{2j-1}, F_{2j-2}, T_{2j-2}^-), (\nu_{j,1}, H_{2j}, F_{2j-1}, T_{2j-1}^-), (\nu_{j,2}, T_{2j-2}^+, F_{2j-2}, H_{2j-2}), (\nu_{j,2}, T_{2j-1}^+, F_{2j-1}, H_{2j-1})$;
 - si $\varepsilon_j = -1$, $(\nu_{j,1}, H_{2j-1}, T_{2j-2}^-, F_{2j-2}), (\nu_{j,1}, H_{2j}, T_{2j-1}^+, F_{2j-1}), (\nu_{j,2}, T_{2j-2}^+, F_{2j-2}, H_{2j-2}), (\nu_{j,2}, T_{2j-1}^-, F_{2j-1}, H_{2j-1})$;
- des 3-simplexes $R_{k,1}, R_{k,2}$, de faces $(\rho_{k,1}, H_{2g'+k+1}, F_{2g'+k}, T_{2g'+k}^-), (\rho_{k,2}, T_{2g'+k}^+, F_{2g'+k}, H_{2g'+k})$ (avec par convention $H_{2g'+m+1} = H_0$).

7) Découpage de chaque ζ_k , Figures 18, 19, 20 :

- un 0-simplexe d_k ;

- des 1-simplexes C_k^+, C_k^- (d'origine d_k et d'extrémité c_k) et $S_{k,0}, \dots, S_{k,z_k}$ (d'origine d_k et d'extrémité σ) ;
- des 2-simplexes $P_{k,1}^-, \dots, P_{k,z_k}^-$ de faces $(p_{k,1}, S_{k,1}, C_k^-), \dots, (p_{k,z_k}, S_{k,z_k}, C_k^-)$;
- des 2-simplexes $P_{k,1}^+, \dots, P_{k,z_k}^+$ de faces
 - si $b_k > 0$, $(p_{k,1}, S_{k,w_k}, C_k^+), \dots, (p_{k,z_k-w_k+1}, S_{k,z_k}, C_k^+),$
 $(p_{k,z_k-w_k+2}, S_{k,0}, C_k^+), (p_{k,z_k-w_k+3}, S_{k,2}, C_k^+), \dots, (p_{k,z_k}, S_{k,w_k-1}, C_k^+)$
 - si $b_k < 0$, $(p_{k,1}, S_{k,0}, C_k^+), (p_{k,2}, S_{k,3}, C_k^+), \dots, (p_{k,z_k}, S_{k,1}, C_k^+)$
 - si $b_k = 0$, $(p_{k,1}, S_{k,0}, C_k^+)$;
- des 2-simplexes $X_{k,1}, \dots, X_{k,z_k}$, de faces
 - si $b_k > 0$, $(x_{k,1}, S_{k,2}, S_{k,1}), \dots, (x_{k,z_k}, S_{k,1}, S_{k,z_k}),$
 - si $b_k < 0$, $(q_k, S_{k,2}, S_{k,1}), (h, S_{k,2}, S_{k,3}), \dots, (h, S_{k,z_k}, S_{k,1}),$
 - si $b_k = 0$, $(q_k, S_{k,1}, S_{k,1})$;
- des 2-simplexes Q_k, H'_k, G_k de faces
 - si $b_k > 0$, $(q_k, S_{k,0}, S_{k,z_k}), (h, S_{k,2}, S_{k,0}), (g_k, S_{k,2}, S_{k,z_k}),$
 - si $b_k < 0$, $(q_k, S_{k,3}, S_{k,0}), (h, S_{k,1}, S_{k,0}), (g_k, S_{k,2}, S_{k,0}),$
 - si $b_k = 0$, $(q_k, S_{k,0}, S_{k,0}), (h, S_{k,1}, S_{k,0}), (g_k, S_{k,1}, S_{k,0})$;
- des 3-simplexes $M_{k,1}^-, \dots, M_{k,z_k}^-$, de faces
 - si $b_k > 0$, $(\mu_{k,1}, X_{k,1}, P_{k,2}^-, P_{k,1}^-), \dots, (\mu_{k,z_k}, X_{k,z_k}, P_{k,1}^-, P_{k,z_k}^-),$
 - si $b_k < 0$, $(\mu_{k,1}, X_{k,1}, P_{k,2}^-, P_{k,1}^-), (\mu_{k,2}, X_{k,2}, P_{k,2}^-, P_{k,3}^-), \dots,$
 $(\mu_{k,z_k}, X_{k,z_k}, P_{k,z_k}^-, P_{k,1}^-),$
 - si $b_k = 0$, $(\mu_{k,1}, X_{k,1}, P_{k,1}^-, P_{k,1}^-)$;
- des 3-simplexes $M_{k,1}^+, \dots, M_{k,z_k}^+$ de faces
 - si $b_k > 0$, $(\mu_{k,1}, X_{k,w_k}, P_{k,2}^+, P_{k,1}^+), \dots, (\mu_{k,z_k-w_k+1}, Q_k, P_{k,z_k-w_k+2}^+, P_{k,z_k-w_k+1}^+),$
 $(\mu_{k,z_k-w_k+2}, H'_k, P_{k,z_k-w_k+3}^+, P_{k,z_k-w_k+2}^+), \dots, (\mu_{k,z_k}, X_{k,w_k-1}, P_{k,1}^+, P_{k,z_k}^+),$
 - si $b_k < 0$, $(\mu_{k,1}, Q_k, P_{k,2}^+, P_{k,1}^+), (\mu_{k,2}, X_{k,3}, P_{k,2}^+, P_{k,3}^+), \dots,$
 $(\mu_{k,z_k-1}, X_{k,z_k}, P_{k,z_k-1}^+, P_{k,z_k}^+), (\mu_{k,z_k}, H'_k, P_{k,z_k}^+, P_{k,1}^+),$
 - si $b_k = 0$, $(\mu_{k,1}, Q_k, P_{k,1}^+, P_{k,1}^+)$;
- des 3-simplexes $R'_{k,1}, R'_{k,2}$ de faces
 - si $b_k > 0$, $(\rho_{k,1}, H'_k, G_k, Q_k), (\rho_{k,2}, X_{k,1}, G_k, X_{k,z_k}),$
 - si $b_k < 0$, $(\rho_{k,1}, X_{k,2}, G_k, Q_k), (\rho_{k,2}, X_{k,1}, G_k, H'_k),$
 - si $b_k = 0$, $(\rho_{k,1}, H'_k, G_k, Q_k), (\rho_{k,2}, X_{k,1}, G_k, H'_k).$

5. MORPHISME DES CELLULES VERS LES Δ -SIMPLEXES

Définition 15. On note T l'application définie sur les générateurs du complexe des chaînes cellulaires vers ceux des chaînes Δ -simpliciales par :

- T envoie les 0- et 1-cellules σ et t_j, q_k, h sur les 0- et 1- Δ -simplexes du même nom,

- $T(\rho_k) = \rho_{k,1} - \rho_{k,2}$,
- $T(\nu_j) = \nu_{j,1} - \varepsilon_j \nu_{j,2}$,
- $T(\mu_k), 1 \leq \ell \leq z_k$ (voir Sous-section 4.1),
 - si $b_k \geq 0 : T(\mu_k) = \sum \mu_{k,\ell}$,
 - si $b_k \leq 0 : T(\mu_k) = \mu_{k,1} - \sum_{\ell > 1} \mu_{k,\ell}$,
- $T(\delta)$
 - pour les TYPES $o_i : T(\delta) = \sum_{i=0}^{g-1} (\delta_{4i} + \delta_{4i+1} - \delta_{4i+2} - \delta_{4i+3}) + \sum_{\ell=4g}^{4g+m} \delta_\ell$,
 - pour les TYPES $n_i : T(\delta) = \sum \delta_\ell$,
- $T(\epsilon)$, en notant $D'_\ell := D_\ell^+ - D_\ell^-$,
 - pour le TYPE $o_1 : T(\epsilon) = \sum_{k=0}^m (R_{k,1} - R_{k,2}) + \sum_{\ell=4g}^{4g+m} D'_\ell + \sum_{i=0}^{g-1} (D'_{4i} + D'_{4i+1} - D'_{4i+2} - D'_{4i+3}) + \sum (N_{j,1} - N_{j,2} - N'_{j,1} + N'_{j,2})$,
 - pour le TYPE $o_2 : T(\epsilon) = \sum_{k=0}^m (R_{k,1} - R_{k,2}) + \sum_{\ell=4g}^{4g+m} D'_\ell + \sum_{i=0}^{g-1} (D'_{4i} + D'_{4i+1} - D'_{4i+2} - D'_{4i+3}) + \sum (-1)^j (N_{j,1} + N_{j,2} + N'_{j,1} + N'_{j,2})$,
 - pour les TYPES $n_i : T(\epsilon) = \sum_{k=0}^m (R_{k,1} - R_{k,2}) + \sum_{\ell=2g}^{2g+m} D'_\ell + \sum_{i=0}^{2g-1} D'_j + \sum_{\varepsilon_j=1} (N_{j,1} - N_{j,2} + N'_{j,1} - N'_{j,2}) + \sum_{\varepsilon_j=-1} (-N_{j,1} - N_{j,2} + N'_{j,1} + N'_{j,2})$,
- $T(\zeta_k)$, en notant $M'_{k,\ell} := M_{k,\ell}^+ - M_{k,\ell}^-$,
 - si $b_k \geq 0 : T(\zeta_k) = -R'_{k,1} + R'_{k,2} + \sum M'_{k,\ell}$,
 - si $b_k \leq 0 : T(\zeta_k) = -R'_{k,1} + R'_{k,2} + M'_{k,1} - \sum_{\ell > 1} M'_{k,\ell}$.

Proposition 16. *L'application T définie ci-dessus est un quasi-isomorphisme du complexe des chaînes cellulaires vers celui des chaînes Δ -simpliciales.*

On en déduit un quasi-isomorphisme T^t , du complexe des cochaînes Δ -simpliciales vers celui des cochaînes cellulaires : $(T^t(f))(s) := f(T(s))$.

6. RELEVÉ DES COCYCLES CELLULAIRES EN COCYCLES Δ -SIMPLICIAUX

6.1. Bord du complexe des cochaînes Δ -simpliciales. Pour chaque générateur $\xi = [\hat{\xi}]$, le but des deux sections suivantes est de *choisir* un relevé de T^t , noté $R(\hat{\xi})$, i.e. tel que $T^t R(\hat{\xi}) = \hat{\xi}$ avec la propriété supplémentaire d'être un cocycle (et pas seulement une cochaîne).

Pour alléger la présentation, on n'écrira (en commençant à regrouper) que les bords qui seront utiles dans la partie suivante pour expliciter des représentants des générateurs.

Le bord est nul sur toutes les 3-cochaînes, et le bord de la 0-cochaîne $\hat{\sigma} + \hat{a} + \hat{b} + \sum \hat{c}_k + \sum \hat{d}_k$ est nul.

Posons $U_\ell = \hat{F}_\ell + \hat{\delta}_\ell + \hat{T}_\ell^\pm$. Ici et dans la suite cette notation est à comprendre de la façon suivante : $U_\ell = \hat{F}_\ell + \hat{\delta}_\ell + \hat{T}_\ell^+ + \hat{T}_\ell^-$.

Bords des 1-cochaînes Δ -simpliciales :

Lemme 17. *Pour les TYPES o_1, o_2*

$$- \partial \hat{t}_j = \varepsilon_j \hat{\nu}_{j,1} + \hat{\nu}_{j,2} + \hat{T}_{2j-2}^\pm + \hat{T}_{2j}^\pm + \hat{\delta}_{2j-2} + \hat{\delta}_{2j} \text{ si } j \text{ impair, et } \varepsilon_j \hat{\nu}_{j,1} + \hat{\nu}_{j,2} + \hat{T}_{2j-3}^\pm +$$

$\hat{T}_{2j-1}^\pm + \hat{\delta}_{2j-3} + \hat{\delta}_{2j-1}$ si j pair

— $\partial \hat{f}_j = -\varepsilon_j \hat{\nu}_{j,1} - \hat{\nu}_{j,2} + \hat{F}_{2j-2} + \hat{F}_{2j}$ si j impair, $\hat{F}_{2j-3} + \hat{F}_{2j-1}$ si j pair

— $\partial(\hat{t}_j + \hat{f}_j) = U_\ell + U_{\ell-2}$ avec $\ell = 2j$ si j impair et $\ell = 2j - 1$ si j pair

Pour les TYPES n_1 à n_4

— $\partial \hat{t}_j = \varepsilon_j \hat{\nu}_{j,1} + \hat{\nu}_{j,2} + \hat{T}_{2j-2}^\pm + \hat{T}_{2j-1}^\pm + \hat{\delta}_{2j-2} + \hat{\delta}_{2j-1}$

— $\partial \hat{f}_j = -\varepsilon_j \hat{\nu}_{j,1} - \hat{\nu}_{j,2} + \hat{F}_{2j-2} + \hat{F}_{2j-1}$

Pour les TYPES o_1, o_2 et n_1 à n_4

— $\partial(\hat{h} + \sum \hat{f}_j + \sum \hat{q}_k) = \sum(\hat{H}_\ell + \hat{F}_\ell) + \sum_k(\hat{H}'_k + \hat{G}_k + \sum_{x_{k,i}=h}(\hat{\mu}_{k,i} + \hat{X}_{k,i}))$

— $\partial \hat{q}_k = \hat{\rho}_{k,1} + \hat{\rho}_{k,2} + \hat{\delta}_{2g'+k} + \hat{T}_{2g'+k}^\pm + \sum_{x_{k,i}=q_k}(\hat{\mu}_{k,i} + \hat{X}_{k,i}) + \hat{Q}_k$

— $\partial \hat{g}_k = -\hat{\rho}_{k,1} - \hat{\rho}_{k,2} + \hat{F}_{2g'+k} + \hat{G}_k$

— $\partial \hat{p}_{k,\ell} = \hat{P}_{k,\ell}^\pm + \hat{\mu}_{k,\ell} - \hat{\mu}_{k,\ell-1}$ si $\ell > 1$ et si $b_k > 0$

— $\partial \hat{p}_{k,\ell} = \hat{P}_{k,\ell}^\pm - \hat{\mu}_{k,\ell} + \hat{\mu}_{k,\ell-1}$ si $\ell > 2$ et si $b_k < 0$

— $\partial \hat{p}_{k,2} = \hat{P}_{k,2}^\pm - \hat{\mu}_{k,2} - \hat{\mu}_{k,1}$

— $\partial(\hat{S}_0^\pm + \hat{e}_0) = (\hat{T}_0^\pm + \hat{H}_0 + \hat{F}_0) - (\hat{T}_{2g'+m}^\pm + \hat{H}_{2g'+m} + \hat{F}_{2g'+m})$. Le symbole g' est défini dans Notation 1

Pour les TYPES o_i lorsque $1 < \ell \leq 4g$ et $\ell = 2$ ou $3 \pmod 4$

— $\partial(\hat{S}_\ell^\pm + \hat{S}_{\ell-1}^\pm + \hat{e}_\ell + \hat{e}_{\ell-1}) = -U_\ell - U_{\ell-2}$

Pour les TYPES n_i lorsque $1 < \ell \leq 2g'$, et pour o_i et n_i lorsque $2g' < \ell \leq 2g' + m$,

— $\partial(\hat{S}_\ell^\pm + \hat{e}_\ell) = U_\ell - U_{\ell-1}$

Pour les TYPES o_1 et n_1 (et pour tous les TYPES si $p = 2$)

— $\partial(\hat{A}^+ + \sum \hat{S}_\ell^+) = -\sum(\hat{H}_\ell + \hat{F}_\ell)$

— $\partial \hat{C}_k^+ = \sum \hat{P}_{k,\ell}^+$

— Bord des $\hat{S}_{k,-}$

- si $b_k > 0$

— $\partial \hat{S}_{k,0} = -\hat{Q}_k + \hat{H}'_k - \hat{P}_{k,z_k-w_k+2}^+$

— $\partial \hat{S}_{k,1} = -\hat{X}_{k,z_k} + \hat{X}_{k,1} - \hat{P}_{k,1}^-$

— $\partial \hat{S}_{k,2} = -\hat{H}'_k - \hat{G}_k - \hat{X}_{k,1} + \hat{X}_{k,2} - \hat{P}_{k,2}^- - \hat{P}_{k,z_k-w_k+3}^+$

— $\partial \hat{S}_{k,\ell} = -\hat{X}_{k,\ell-1} + \hat{X}_{k,\ell} - \hat{P}_{k,\ell}^- - \hat{P}_{k,z_k-w_k+\ell+1}^+$ si $2 < \ell < w_k$

— $\partial \hat{S}_{k,\ell} = -\hat{X}_{k,\ell-1} + \hat{X}_{k,\ell} - \hat{P}_{k,\ell}^- - \hat{P}_{k,\ell-w_k+1}^+$ si $w_k \leq \ell < z_k$

— $\partial \hat{S}_{k,z_k} = \hat{Q}_k + \hat{G}_k - \hat{X}_{k,z_k-1} + \hat{X}_{k,z_k} - \hat{P}_{k,z_k}^- - \hat{P}_{k,z_k-w_k+1}^+$

- si $b_k < 0$

— $\partial \hat{S}_{k,0} = \hat{Q}_k + \hat{H}'_k + \hat{G}_k - \hat{P}_{k,1}^+$

— $\partial \hat{S}_{k,1} = -\hat{H}'_k + \hat{X}_{k,1} + \hat{X}_{k,z_k} - \hat{P}_{k,1}^- - \hat{P}_{k,z}^+$

— $\partial \hat{S}_{k,2} = -\hat{G}_k - \hat{X}_{k,1} - \hat{X}_{k,2} - \hat{P}_{k,2}^-$

— $\partial \hat{S}_{k,3} = -\hat{Q}_k + \hat{X}_{k,2} - \hat{X}_{k,3} - \hat{P}_{k,3}^- - \hat{P}_{k,2}^+$

$$\begin{aligned}
& - \partial \hat{S}_{k,\ell} = \hat{X}_{k,\ell-1} - \hat{X}_{k,\ell} - \hat{P}_{k,\ell}^- - \hat{P}_{k,\ell-1}^+ \text{ si } \ell > 3 \\
& - \text{ si } b_k = 0 \\
& - \partial \hat{S}_{k,0} = \hat{H}'_k + \hat{G}_k - \hat{P}_{k,1}^+ \\
& - \partial \hat{S}_{k,1} = -\hat{H}'_k - \hat{G}_k - \hat{P}_{k,1}^-
\end{aligned}$$

Le bord de la 1-cellule Z_k est donné dans le lemme suivant.

Lemme 18. *Définissons Y_k, Z_k, V_k par :*

$$\begin{aligned}
& - \text{ si } b_k > 0 \\
& - Y_k = \hat{H}'_k + \hat{G}_k + \hat{X}_{k,1} + \hat{\mu}_{k,1} - \sum_{2 \leq \ell \leq z_k - w_k + 2} \hat{P}_{k,\ell}^+ \\
& - Z_k = \hat{q}_k + \hat{g}_k - v_k \hat{C}_k^+ + \hat{S}_{k,0} - \sum_{\ell \geq 2} (\hat{S}_{k,\ell} + \hat{p}_{k,\ell}) \text{card}\{i \geq \ell \mid x_{k,i} = q_k\} \\
& - V_k = u_k \hat{C}_k^+ + \hat{S}_{k,0} + \sum_{\ell \geq 2} (\hat{S}_{k,\ell} + \hat{p}_{k,\ell}) \text{card}\{i \geq \ell \mid x_{k,i} = h\} \\
& - \text{ si } b_k \leq 0 \text{ (donc } a_k = u_k = 1 \text{ et } v_k = 0) \\
& - Y_k = \hat{Q}_k + \hat{G}_k + \hat{X}_{k,1} + \hat{\mu}_{k,1} \\
& - Z_k = \hat{q}_k + \hat{g}_k \\
& - V_k = \hat{C}_k^+ + \hat{S}_{k,0} - \sum_{\ell \geq 2} (\hat{S}_{k,\ell} + \hat{p}_{k,\ell})(z_k - \ell + 1).
\end{aligned}$$

Alors $\partial Z_k = U_{G+k} + a_k Y_k$ et $\sum_{x_{k,i}=h} (\hat{X}_{k,i} + \hat{\mu}_{k,i}) = b_k Y_k - \hat{H}'_k - \hat{G}_k + \partial V_k$.

Preuve. Le cas $b_k \leq 0$ est facile.

Dans le cas $b_k > 0$, détaillons la preuve.

$$\begin{aligned}
& \partial(\hat{q}_k + \hat{g}_k) = U_{G+k} + \hat{G}_k + \hat{Q}_k + \sum_{x_{k,i}=q_k} (\hat{\mu}_{k,i} + \hat{X}_{k,i}), \text{ or} \\
& \hat{X}_{k,i} + \hat{\mu}_{k,i} - \hat{X}_{k,1} - \hat{\mu}_{k,1} - \hat{H}'_k - \hat{G}_k - \partial \sum_{2 \leq \ell \leq i} (\hat{S}_{k,\ell} + \hat{p}_{k,\ell}) + \sum_{2 \leq \ell \leq i} \hat{P}_{k,\ell}^+ \text{ est égal :} \\
& - \text{ si } 2 \leq i < w_k, \text{ à } \sum_{2 \leq \ell \leq i} \hat{P}_{k,z_k - w_k + \ell + 1}^+, \\
& - \text{ si } w_k \leq i < z_k, \text{ à } \sum_{2 \leq \ell < w_k} \hat{P}_{k,z_k - w_k + \ell + 1}^+ + \sum_{w_k \leq \ell \leq i} \hat{P}_{k,\ell - w_k + 1}^+, \text{ d'où} \\
& \sum_{x_{k,i}=q_k} (\hat{X}_{k,i} + \hat{\mu}_{k,i}) - a_k (\hat{X}_{k,1} + \hat{\mu}_{k,1}) - (a_k - 1) (\hat{H}'_k + \hat{G}_k) \\
& - \partial \sum_{\ell \geq 2} (\hat{S}_{k,\ell} + \hat{p}_{k,\ell}) \text{card}\{i \geq \ell \mid x_{k,i} = q_k\} \\
& = \\
& - \sum_{\ell \geq 2} \hat{P}_{k,\ell}^+ \text{card}\{i \geq \ell \mid x_{k,i} = q_k\} + \sum_{\ell < z_k - w_k + 2} \hat{P}_{k,\ell}^+ \text{card}\{i \geq \ell + w_k - 1 \mid x_{k,i} = q_k\} \\
& + \sum_{\ell > z_k - w_k + 2} \hat{P}_{k,\ell}^+ \text{card}\{i \geq \ell + w_k - 1 - z_k \mid x_{k,i} = q_k\}.
\end{aligned}$$

Dans cette expression, le coefficient de $\hat{P}_{k,\ell}^+$ vaut (compte tenu des propriétés de $w_{\alpha,\beta}$ détaillées dans 4.1)

$$\text{si } \ell = 1, \text{card}\{i \geq w_k \mid x_{k,i} = q_k\} = v_k$$

$$\text{si } \ell = z_k - w_k + 2, -\text{card}\{i \geq z_k - w_k + 2 \mid x_{k,i} = q_k\} = 1 - \text{card}\{i < w_k \mid x_{k,i} = q_k\} = 1 - (a_k - v_k)$$

$$\text{si } 2 \leq \ell \leq z_k - w_k + 2, \text{card}\{i \geq \ell + w_k - 1 \mid x_{k,i} = q_k\} - \text{card}\{i \geq \ell \mid x_{k,i} = q_k\} = \text{card}\{i \mid \ell \leq i < z_k - w_k + 1 \text{ et } x_{k,i} = q_k\} - \text{card}\{i \geq \ell \mid x_{k,i} = q_k\} = -\text{card}\{i \geq z_k - w_k + 1 \mid x_{k,i} = q_k\} = -\text{card}\{i < w_k \mid x_{k,i} = q_k\} = -(a_k - v_k),$$

si $\ell > z_k - w_k + 2$, $\text{card}\{i \geq \ell + w_k - 1 - z_k \mid x_{k,i} = q_k\} - \text{card}\{i \geq \ell \mid x_{k,i} = q_k\} = \text{card}\{i \geq w_k \mid x_{k,i} = q_k\} + \text{card}\{i \mid \ell + w_k - 1 - z_k \leq i < w_k \text{ et } x_{k,i} = q_k\} - \text{card}\{i \geq \ell \mid x_{k,i} = q_k\} = v_k$.

On en déduit que $\sum_{x_{k,i}=q_k} (\hat{X}_{k,i} + \hat{\mu}_{k,i}) = a_k Y_k - \hat{Q}_k - \hat{G}_k + \partial[v_k \hat{C}_k^+ - \hat{S}_{k,0} + \sum_{\ell \geq 2} (\hat{S}_{k,\ell} + \hat{p}_{k,\ell}) \text{card}\{i \geq \ell \mid x_{k,i} = q_k\}]$, si bien que ∂Z_k est égal au résultat annoncé.

On a déjà calculé $\sum_{x_{k,i}=q_k} (\hat{X}_{k,i} + \hat{\mu}_{k,i})$. On va en déduire $\sum_{x_{k,i}=h} (\hat{X}_{k,i} + \hat{\mu}_{k,i})$ par différence, en calculant $\sum_i (\hat{X}_{k,i} + \hat{\mu}_{k,i})$. Rappelons que pour $1 \leq i < z_k$, $\hat{X}_{k,i} + \hat{\mu}_{k,i} - \hat{X}_{k,1} - \hat{\mu}_{k,1} - \hat{H}'_k - \hat{G}_k - \partial \sum_{2 \leq \ell \leq i} (\hat{S}_{k,\ell} + \hat{p}_{k,\ell}) + \sum_{2 \leq \ell \leq i} \hat{P}_{k,\ell}^+$ était égal :
- si $2 \leq i < w_k$, à $\sum_{2 \leq \ell \leq i} \hat{P}_{k,z_k-w_k+\ell+1}^+$
- si $w_k \leq i < z_k$, à $\sum_{2 \leq \ell < w_k} \hat{P}_{k,z_k-w_k+\ell+1}^+ + \sum_{w_k \leq \ell \leq i} \hat{P}_{k,\ell-w_k+1}^+$.
De plus, pour $i = z_k$, on a presque la même formule que pour $w_k \leq i < z_k$, mais en remplaçant $-\hat{G}_k$ par $+\hat{Q}_k$.

D'où
 $\sum_i (\hat{X}_{k,i} + \hat{\mu}_{k,i}) - z_k (\hat{X}_{k,1} + \hat{\mu}_{k,1}) - (z_k - 1) \hat{H}'_k - (z_k - 2) \hat{G}_k + \hat{Q}_k - \partial \sum_{\ell \geq 2} (\hat{S}_{k,\ell} + \hat{p}_{k,\ell}) \text{card}\{i \geq \ell\} = - \sum_{\ell \geq 2} \hat{P}_{k,\ell}^+(z_k - \ell + 1) + \sum_{\ell < z_k - w_k + 2} \hat{P}_{k,\ell}^+(z_k - \ell + 2 - w_k) + \sum_{\ell > z_k - w_k + 2} \hat{P}_{k,\ell}^+(2z_k - \ell + 2 - w_k) = (u_k + v_k) \partial \hat{C}_k^+ - (a_k + b_k) \sum_{2 \leq \ell \leq z_k - w_k + 2} \hat{P}_{k,\ell}^+$,
si bien que par différence, $\sum_{x_{k,i}=h} (\hat{X}_{k,i} + \hat{\mu}_{k,i})$ est égal au résultat annoncé. \square

Bord des 2-cochaînes Δ -simpliciales

Lemme 19. *Pour tous les TYPES, on a d'abord*

- $\partial(\hat{\delta}_0 + \hat{T}_0^\pm + \hat{F}_0) = 0$
- $\partial(\hat{\mu}_{k,1} + \hat{X}_{k,1} + \hat{G}_k - \sum_{2 \leq \ell \leq z_k - w_k + 1} \hat{P}_{k,\ell}^+) = 0$.

Pour les TYPES o_i (avec $\varepsilon = 1$ pour o_1 et -1 pour o_2)

- si j impair

- $\partial(\hat{\nu}_{j,1} + \hat{H}_{2j-1} + \hat{F}_{2j-1}) = \hat{N}'_{j,1} + \varepsilon \hat{N}_{j+1,1}$
- $\partial(\hat{\nu}_{j,1} + \varepsilon \hat{H}_{2j-1} + \varepsilon \hat{F}_{2j-1} + \hat{H}_{2j}) = (1 - \varepsilon) \hat{N}_{j,1}$ et
- $\partial(\hat{F}_{2j-2} + \hat{H}_{2j-2} + \hat{F}_{2j-3}) = \varepsilon (\hat{N}_{j,1} + \hat{N}'_{j-1,1})$

- si j pair

- $\partial(\hat{\nu}_{j,1} + \hat{H}_{2j-1} + \hat{F}_{2j-2}) = \hat{N}_{j,1} + \varepsilon \hat{N}'_{j-1,1}$ et
- $\partial(\hat{\nu}_{j,1} + \varepsilon \hat{H}_{2j-1} + \varepsilon \hat{F}_{2j-2} + \hat{H}_{2j-2}) = (1 - \varepsilon) \hat{N}'_{j,1}$
- $\partial(\hat{\mu}_{k,1} + \hat{X}_{k,1} + \hat{G}_k - \sum_{2 \leq \ell \leq z_k - w_k + 1} \hat{P}_{k,\ell}^+) = 0$.

Pour les TYPES n_i

- $\partial(\hat{\mu}_{k,1} + \hat{X}_{k,1} + \hat{G}_k - \sum_{2 \leq \ell \leq z_k - w_k + 1} \hat{P}_{k,\ell}^+) = 0$
- $\partial(\hat{\nu}_{j,1} + \hat{H}_{2j-1} + \hat{F}_{2j-1}) = (1 + \varepsilon_j) \hat{N}'_{j,1}$
- $\partial(\hat{\nu}_{j,2} + \hat{H}_{2j-1} + \varepsilon_j \hat{F}_{2j-2}) = (1 + \varepsilon_j) \hat{N}_{j,2}$
- $\partial \hat{H}_{2j-2} = -\hat{N}'_{j-1,1} - \hat{N}_{j,2}$.

6.2. Relevé des 0 et 1-cocycles cellulaires. Ayant décrit les cobords, on est prêt à *choisir* des relevés qui soient des *cocycles* relevant mod p un représentant des divers générateurs.

Le 0-cocycle cellulaire $\hat{\sigma}$ se relève en $1 = \hat{\sigma} + \hat{a} + \hat{b} + \sum \hat{d}_k$.

Grâce au lemme 18, les 1-cocycles sont relevés comme suit :

Définition 20. *Relevés des 1-cocycles*

1) Pour le générateur θ_j :

pour les TYPES o_i et pour tout p , $\theta_j = [\hat{t}_j]$. On peut relever \hat{t}_j par

$$R\hat{t}_j = \hat{t}_j + \hat{f}_j + \hat{e}_\ell + \hat{S}_\ell^\pm + \hat{e}_{\ell-1} + \hat{S}_{\ell-1}^\pm$$

pour les TYPES n_i , il faut distinguer selon p

— si $p = 2$, alors on a $\theta_j = [\hat{t}_j]$. On peut relever \hat{t}_j par

$$R\hat{t}_j = \hat{t}_j + \hat{f}_j + \hat{e}_{\ell-1} + \hat{S}_{\ell-1}^\pm ;$$

— si $p > 2$ alors on a $\theta_j = [\hat{t}_j - \hat{t}_1]$ qui se relève par

$$R(\hat{t}_j - \hat{t}_1) = \hat{t}_j + \hat{f}_j - (\hat{t}_1 + \hat{f}_1) - 2 \sum_{u=2}^{2j-2} (\hat{e}_u + \hat{S}_u^\pm) - (\hat{e}_1 + \hat{S}_1^\pm) - (\hat{e}_{2j-1} + \hat{S}_{2j-1}^\pm).$$

Dans les deux situations, on a pris $\ell = 2j$ si j est impair et $\ell = 2j - 1$ si j est pair.

2) Pour le générateur α_k :

pour tous les TYPES et pour tout p , si $0 \leq k < n - 1$, on commence par relever

$\hat{q}_k - \hat{q}_{k-1}$ par

$$R(\hat{q}_k - \hat{q}_{k-1}) = Z_k - Z_{k-1} - \hat{S}_{2g'+k}^\pm - \hat{e}_{2g'+k}, \text{ avec } Z_k = \hat{q}_k + \hat{g}_k - v_k \hat{C}_k^+ + \hat{S}_{k,0} - \sum_{\ell \geq 2} (\hat{S}_{k,\ell} + \hat{p}_{k,\ell}) \text{card}\{i \geq \ell \mid x_{k,i} = q_k\} ;$$

pour les TYPES o_i, n_i , quand $p = 2$ et pour les TYPES o_i quand $p > 2$, le générateur α_k est $\alpha_k = [\hat{q}_k - \hat{q}_0]$. En additionnant, on trouve le relevé

$$R(\hat{q}_k - \hat{q}_0) = Z_k - Z_0 - \sum_{i=1}^k (\hat{S}_{2g'+i}^\pm + \hat{e}_{2g'+i}), \text{ où } Z_u \text{ est défini dans Lemme 18 ;}$$

pour tous les TYPES n_i , quand $p > 2$, $\alpha_k = [\hat{q}_k - 1/2\hat{t}_g]$. Il faut rajouter à la somme précédente le relevé de $\alpha_0 = [\hat{q}_0 - 1/2\hat{t}_g]$ qui est choisi égal à

$$R(\hat{q}_0 - 1/2\hat{t}_g) = Z_0 - 1/2(\hat{t}_g + \hat{f}_g) - (\hat{e}_{2g} + \hat{S}_{2g}^\pm) - 1/2(\hat{e}_{2g-1} + \hat{S}_{2g-1}^\pm). \text{ On obtient :}$$

$$R(\hat{q}_k - \frac{1}{2}\hat{t}_g) = Z_k - \frac{1}{2}(\hat{t}_g + \hat{f}_g) - \sum_{i=-1}^k (\hat{S}_{2g'+i}^\pm + \hat{e}_{2g'+i}).$$

3) Pour le générateur $\alpha = [c/2a\hat{t}_1 + \hat{h} - \sum b_k a_k^{-1} \hat{q}_k]$. Avec la notation $c_k = b_k a / a_k$, on a :

pour les TYPES o_1 et n_1 , dans le Cas 1 (on a $c = 0$), lorsque $p > 2$ et pour tous les TYPES, dans le Cas 1, lorsque $p = 2$, on peut relever $\hat{h} - \sum b_k a_k^{-1} \hat{q}_k$ par

$$R(\hat{h} - \sum b_k a_k^{-1} \hat{q}_k) = \hat{h} + \sum \hat{f}_j + \sum \hat{g}_k + \hat{A}^+ + \sum \hat{S}_\ell^+ - \sum b_k a_k^{-1} Z_k - \sum V_k - 1/a[c_0(\hat{e}_{2g'+1} + \hat{S}_{2g'+1}^\pm) + (c_0 + c_1)(\hat{e}_{2g'+2} + \hat{S}_{2g'+2}^\pm) + \dots + (c_0 + \dots + c_{m-1})(\hat{e}_{2g'+m} + \hat{S}_{2g'+m}^\pm)] ;$$

pour le TYPE n_1 , dans le Cas 2, on peut relever $c/2a\hat{t}_1 + \hat{h} - \sum b_k a_k^{-1} \hat{q}_k$ par $R(c/2a\hat{t}_1 + \hat{h} - \sum b_k a_k^{-1} \hat{q}_k) = \hat{h} + \sum \hat{f}_j + \sum \hat{q}_k + \hat{A}^+ + \sum \hat{S}_\ell^+ - \sum b_k a_k^{-1} Z_k - \sum V_k - 1/a[c_0(\hat{e}_{2g'+1} + \hat{S}_{2g'+1}^\pm) + (c_0 + c_1)(\hat{e}_{2g'+2} + \hat{S}_{2g'+2}^\pm) + \dots + (c_0 + \dots + c_{m-1})(\hat{e}_{2g'+m} + \hat{S}_{2g'+m}^\pm)] + c/2a[(\hat{t}_1 + \hat{f}_1) - (\hat{S}_1^\pm + \hat{e}_1) - 2(\hat{S}_0^\pm + \hat{e}_0)]$
avec

- si $b_k > 0$,
 - $Z_k = \hat{q}_k + \hat{g}_k - v_k \hat{C}_k^+ + \hat{S}_{k,0} - \sum_{\ell \geq 2} (\hat{S}_{k,\ell} + \hat{p}_{k,\ell}) \text{card}\{i \geq \ell \mid x_{k,i} = q_k\}$,
 - $V_k = u_k \hat{C}_k^+ + \hat{S}_{k,0} + \sum_{\ell \geq 2} (\hat{S}_{k,\ell} + \hat{p}_{k,\ell}) \text{card}\{i \geq \ell \mid x_{k,i} = h\}$;
- si $b_k \leq 0$,
 - $Z_k = \hat{q}_k + \hat{g}_k$,
 - $V_k = \hat{C}_k^+ + \hat{S}_{k,0} - \sum_{\ell \geq 2} (\hat{S}_{k,\ell} + \hat{p}_{k,\ell})(z_k - \ell + 1)$.

Pour justifier (lorsque cela n'est pas évident) ces choix de relevés, on fait les remarques suivantes :

On rappelle la notation $U_\ell = \hat{F}_\ell + \hat{\delta}_\ell + \hat{T}_\ell^\pm$.

1) Pour le générateur θ_j :

pour o_i , pour tout p , $\partial(\hat{t}_j + \hat{f}_j) = U_\ell + U_{\ell-2}$ avec :

- si j impair : $\ell = 2j$ et

$$\partial(\hat{e}_\ell + \hat{S}_\ell^\pm) = -U_\ell - U_{\ell-1}, \quad \partial(\hat{e}_{\ell-1} + \hat{S}_{\ell-1}^\pm) = U_{\ell-1} - U_{\ell-2},$$

- si j pair : $\ell = 2j - 1$ et

$$\partial(\hat{e}_\ell + \hat{S}_\ell^\pm) = -U_\ell + U_{\ell-1}, \quad \partial(\hat{e}_{\ell-1} + \hat{S}_{\ell-1}^\pm) = -U_{\ell-1} - U_{\ell-2},$$

- donc quelle que soit la parité de j ,

$$\partial(\hat{t}_j + \hat{f}_j) = -\partial(\hat{e}_\ell + \hat{S}_\ell^\pm + \hat{e}_{\ell-1} + \hat{S}_{\ell-1}^\pm).$$

Pour tout p , le relevé du cocycle $\theta_j = \hat{t}_j$ est :

$$R\hat{t}_j = \hat{t}_j + \hat{f}_j + \hat{e}_\ell + \hat{S}_\ell^\pm + \hat{e}_{\ell-1} + \hat{S}_{\ell-1}^\pm.$$

pour n_i , pour tout p , $\partial(\hat{t}_j + \hat{f}_j) = U_{2j-1} + U_{2j-2}$ et $\partial(\hat{e}_\ell + \hat{S}_\ell^\pm) = U_\ell - U_{\ell-1}$,

- si $p = 2$, on peut relever $\theta_j = \hat{t}_j$ par

$$R\hat{t}_j = \hat{t}_j + \hat{f}_j + \hat{e}_{\ell-1} + \hat{S}_{\ell-1}^\pm,$$

- si $p > 2$, on peut (pour relever $\theta_j = \hat{t}_j - \hat{t}_1$) relever $\hat{t}_j - \hat{t}_{j-1}$ par $(\hat{t}_j + \hat{f}_j) - (\hat{t}_{j-1} + \hat{f}_{j-1}) - (\hat{e}_{2j-1} + \hat{S}_{2j-1}^\pm) - (\hat{e}_{2j-2} + \hat{S}_{2j-2}^\pm)$.

2) Pour les générateurs α_k : On va se servir des Z_k du lemme, puisqu'ils contiennent \hat{q}_k plus des cochaînes Δ -simpliciales dont l'image cellulaire (par T^t) est nulle. D'après le lemme, pour tout $k \in [0, n[$ on a, modulo p : $\partial Z_k = U_{2g'+k}$, or pour $2g' < \ell \leq 2g' + m$ on a : $\partial(\hat{e}_\ell + \hat{S}_\ell^\pm) = U_\ell - U_{\ell-1}$. Ceci permet ($\forall p, \forall o_i, n_i$) de relever $\hat{q}_k - \hat{q}_{k-1}$ (pour $0 < k < n$) par $Z_k - Z_{k-1} - (\hat{e}_{2g'+k} + \hat{S}_{2g'+k}^\pm)$.

Pour les TYPES n_i et $p > 2$, il faut relever en plus $\alpha_0 = \hat{q}_0 - 1/2\hat{t}_g$. On se sert de

$$\partial[Z_0 - 1/2(\hat{t}_g + \hat{f}_g)] = U_{2g} - 1/2(U_{2g-1} + U_{2g-2}) = (U_{2g} - U_{2g-1}) + 1/2(U_{2g-1} - U_{2g-2}),$$

ce qui, puisqu'ici $U_\ell - U_{\ell-1} = \partial(\hat{e}_\ell + \hat{S}_\ell^\pm)$, permet de relever α_0 par :

$$Z_0 - 1/2(\hat{t}_g + \hat{f}_g) - (\hat{e}_{2g} + \hat{S}_{2g}^\pm) - 1/2(\hat{e}_{2g-1} + \hat{S}_{2g-1}^\pm).$$

3) Pour le générateur α pour $c/2a\hat{t}_1 + \hat{h} - \sum b_k a_k^{-1} \hat{q}_k$:

On a $\partial(\hat{h} + \sum \hat{f}_j + \sum \hat{q}_k + \hat{A}^+ + \sum \hat{S}_\ell^+) = \sum_k (\hat{H}'_k + \hat{G}_k + \sum_{x_{k,i}=h} (\hat{\mu}_{k,i} + \hat{X}_{k,i}))$ or d'après le lemme, pour k fixé,

$$\hat{H}'_k + \hat{G}_k + \sum_{x_{k,i}=h} (\hat{\mu}_{k,i} + \hat{X}_{k,i}) = b_k Y_k + \partial V_k = b_k a_k^{-1} (\partial Z_k - U_{2g'+k}) + \partial V_k.$$

Donc on a $\partial(\hat{h} + \sum \hat{f}_j + \sum \hat{q}_k + \hat{A}^+ + \sum \hat{S}_\ell^+ - \sum b_k a_k^{-1} Z_k - \sum V_k) = -\sum b_k a_k^{-1} U_{2g'+k} =$

$-1/a \sum c_k U_{2g'+k}$ avec $\sum c_k = c$ et $U_{2g'+k} - U_{2g'+k-1} = \partial(\hat{e}_{2g'+k} + \hat{S}_{2g'+k}^\pm)$, d'où

$$-\sum c_k U_{2g'+k} = \partial[c_0(\hat{e}_{2g'+1} + \hat{S}_{2g'+1}^\pm) + (c_0 + c_1)(\hat{e}_{2g'+2} + \hat{S}_{2g'+2}^\pm) + \dots + (c_0 + \dots + c_{m-1})(\hat{e}_{2g'+m} + \hat{S}_{2g'+m}^\pm)] - c U_{2g'+m}.$$

Dans les Cas 1 (de o_1 et n_1), $c = 0 \pmod p$, on peut relever $\hat{h} - \sum b_k a_k^{-1} \hat{q}_k$ par $\hat{h} + \sum \hat{f}_j + \sum \hat{q}_k + \hat{A}^+ + \sum \hat{S}_\ell^+ - \sum b_k a_k^{-1} Z_k - \sum V_k - 1/a[c_0(\hat{e}_{2g'+1} + \hat{S}_{2g'+1}^\pm) + (c_0 + c_1)(\hat{e}_{2g'+2} + \hat{S}_{2g'+2}^\pm) + \dots + (c_0 + \dots + c_{m-1})(\hat{e}_{2g'+m} + \hat{S}_{2g'+m}^\pm)]$.

Dans le Cas 2 de n_1 , comme $\partial(\hat{S}_0^\pm + \hat{e}_0) = U_0 - U_{2g'+m}$ et $\partial(\hat{S}_1^\pm + \hat{e}_1) = U_1 - U_0$ et $\partial(\hat{t}_1 + \hat{f}_1) = U_0 + U_1$, on peut relever $c/2a\hat{t}_1 + \hat{h} - \sum b_k a_k^{-1} \hat{q}_k$ par la même expression que dans les Cas 1, à laquelle on ajoute $c/2a[(\hat{t}_1 + \hat{f}_1) - (\hat{S}_1^\pm + \hat{e}_1) - 2(\hat{S}_0^\pm + \hat{e}_0)]$.

6.3. Relevé des 2-cocycles cellulaires.

Définition 21. *Relevés des 2-cocycles*

4) Pour le générateur $\beta = [\hat{\delta}]$, dans tous les Cas et pour tous les TYPES. On relève $\hat{\delta}$ par :

$$R\hat{\delta} = U_0 = \hat{\delta}_0 + \hat{T}_0^\pm + \hat{F}_0.$$

5) Relevé de $\beta_k = [\hat{\mu}_k]$, valable dans tous les Cas, que p divise a_k ou pas et que b_k soit positif ou pas. On relève $\hat{\mu}_k$ par :

$$R\hat{\mu}_k = \hat{\mu}_{k,1} + \hat{X}_{k,1} + \hat{G}_k - \sum_{2 \leq \ell \leq z_k - w_k + 1} \hat{P}_{k,\ell}^+.$$

6) Pour le générateur φ_j pour $p \geq 2$.

pour o_i , si $\varepsilon = 1$, on relève $\hat{\nu}_j$ par :

$$R\hat{\nu}_j = \hat{\nu}_{j,1} + \hat{H}_{2j-1} + \hat{F}_{2j-1} + \hat{H}_{2j} \text{ si } j \text{ impair,}$$

$$R\hat{\nu}_j = \hat{\nu}_{j,1} + \hat{H}_{2j-1} + \hat{F}_{2j-2} + \hat{H}_{2j-2} \text{ si } j \text{ pair.}$$

pour n_i , si $\varepsilon_j = -1$, on relève $\hat{\nu}_j$ par

$$R\hat{\nu}_j = \hat{\nu}_{j,1} + \hat{H}_{2j-1} + \hat{F}_{2j-1}.$$

Il n'est pas nécessaire de définir le relevé de φ_j pour les autres TYPES car pour $p > 2$, les cup-produits $H^1(M, \mathbb{Z}_p) \otimes H^2(M, \mathbb{Z}_p) \rightarrow H^3(M, \mathbb{Z}_p)$ ne seront à calculer que pour les TYPES o_1 et n_2 .

7. CALCUL DES CUP-PRODUITS POUR $p = 2$

7.1. Formules d'Alexander-Whitney. Méthode des coefficients. D'après la formule d'Alexander-Whitney [8], le cup-produit de deux cochaînes Δ -simpliciales f de degré p et g de degré q est défini sur tout $p + q$ -simplexe par

$$(f \cup g)(v_0, \dots, v_{p+q}) = f(v_0, \dots, v_p)g(v_p, \dots, v_{p+q}).$$

On en déduit immédiatement que le générateur 1 du $H^0(M, \mathbb{Z}_p)$ est l'élément neutre pour le \cup -produit.

Si $\varphi = f \cup g$ avec f, g deux 1-cochaînes Δ -simpliciales, on obtient, pour tout 2- Δ -simplexe $s = (s_0, s_1, s_2)$, de sommets (v_0, v_1, v_2) et de faces $s_0 = (v_1, v_2)$, $s_1 = (v_0, v_2)$, $s_2 = (v_0, v_1)$, $\varphi(s) = f(s_2)g(s_0)$.

Heureusement, si f, g sont des 1-cocycles, pour connaître la classe du 2-cocycle φ , il ne sera pas nécessaire de l'évaluer sur les (nombreux !) 2-simplexes. En effet, soit $\varphi' = T^t(\varphi)$ son image dans le complexe cellulaire (voir 5),

$$\varphi' = x\hat{\delta} + \sum_{j=1}^{g'} y_j \hat{\nu}_j + \sum z_k \hat{\rho}_k + \sum_{k=0}^m r_k \hat{\mu}_k.$$

Comme $0 = \partial\varphi'$, les z_k sont nuls. De plus, la classe de cohomologie de φ' (donc de φ) est

- dans le Cas 1 : $(x + \sum_{k=0}^m r_k)\beta + \sum_{j=1}^{g'} y_j \varphi_j$,
- dans le Cas 2 : $\sum_{j=1}^{g'} y_j \varphi_j$,
- dans le Cas 3 : $\sum_{k=0}^{n-1} r_k \beta_k + \sum_{j=1}^{g'} y_j \varphi_j$, en posant $\beta_0 = -\sum_{k=1}^{n-1} \beta_k$.

Remarque 22. Pour calculer la classe de cohomologie $[\varphi]$, il suffira d'évaluer (mod 2) $x = \varphi(\sum \delta_\ell)$ (dans le Cas 1), les $r_k = \varphi(\sum \mu_{k,\ell})$ (dans les Cas 1 et 3), et les $y_j = \varphi(\nu_{j,1} - \varepsilon_j \nu_{j,2})$ (dans les trois Cas).

Les preuves ne sont données que pour les cup-produits qui ne sont pas nuls pour des raisons classiques de topologie, voir par exemple Aaslepp [1].

7.2. Les cup-produits, pour $p = 2$, $\cup : H^1(M, \mathbb{Z}_2) \otimes H^1(M, \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^2(M, \mathbb{Z}_2)$. Cette sous-section prouve le théorème 7.

Preuve. Calcul de $\theta_i \cup \theta_j$

Quand ils apparaissent, les r_k et les y_j sont nuls.

TYPES o_i

- Il suffit de calculer x pour le Cas 1. On a, voir la Sous-section 4.2, Découpage Δ -simplicial :

$$x = R\hat{t}_i(e_0)R\hat{t}_j(t_1) + R\hat{t}_i(e_1)R\hat{t}_j(t_2) + R\hat{t}_i(e_3)R\hat{t}_j(t_1) + R\hat{t}_i(e_4)R\hat{t}_j(t_2) + \dots$$

vaut 1 si et seulement si i impair et $j = i + 1$ ou i pair et $j = i - 1$. Et x vaut 0 sinon.

CONCLUSION : Pour les TYPES o_i , les cup-produits $\theta_i \cup \theta_j$ sont nuls sauf dans le Cas 1, où on a $\theta_{2i} \cup \theta_{2i-1} = \beta$.

TYPES n_i , $\theta_j = [\hat{t}_j]$ et le relevé de θ_j est $R\hat{t}_j = \hat{t}_j + \hat{f}_j + \hat{e}_{\ell-1} + \hat{S}_{\ell-1}^\pm$.

• Calcul de x : $x = R\hat{t}_i(e_0)R\hat{t}_j(t_1) + R\hat{t}_i(e_1)R\hat{t}_j(t_1) + \dots$ vaut 1 si et seulement si $i = j$ et vaut 0 sinon.

CONCLUSION : Pour les TYPES n_i , les cup-produits $\theta_i \cup \theta_j$ sont nuls sauf dans le Cas 1 et si $i = j$, alors on a $\theta_i \cup \theta_i = \beta$.

Calcul de $\theta_i \cup \alpha$

Pour tous les TYPES, $\alpha = [\hat{h} + \sum b_j \hat{q}_j]$ n'est générateur que dans le Cas 1.

Le relevé de α est

$$R(\hat{h} + \sum b_j \hat{q}_j) = \hat{h} + \sum \hat{f}_j + \sum \hat{q}_k + \hat{A}^+ + \sum \hat{S}_\ell^+ - \sum b_k a_k^{-1} Z_k - \sum V_k - \frac{1}{a} [c_0(\hat{e}_{2g'+1} + \hat{S}_{2g'+1}^\pm) + (c_0 + c_1)(\hat{e}_{2g'+2} + \hat{S}_{2g'+2}^\pm) + \dots + (c_0 + \dots + c_{m-1})(\hat{e}_{2g'+m} + \hat{S}_{2g'+m}^\pm)].$$

• Calcul du coefficient x .

Dans le découpage Δ -simplicial de δ , l'indice des Δ -simplexes δ_u varie de 0 à $4g+m$. Pour $u \leq 4g-1$, le Δ -simplexe δ_u est $\delta_u = (t, e, e)$ et $R(\hat{h} - \sum b_k a_k^{-1} \hat{q}_k)$ (le relevé de α) appliqué à $(\delta_u)_0 = t$ est nul.

Pour $u \geq 4g$, le Δ -simplexe δ_u est $\delta_u = (q, e, e)$ et $R(\hat{t}_j)$ le relevé de θ_j appliqué à $(\delta_u)_2 = e$ est nul. Le coefficient x est nul.

• Il ne reste plus qu'à calculer y_i . Or

$$\begin{aligned} y_i &= R\hat{t}_j(\nu_{i,1})_2 R(\hat{h} + \sum b_j \hat{q}_j)(\nu_{i,1})_0 - \varepsilon_j R\hat{t}_j(\nu_{i,2})_2 R(\hat{h} + \sum b_j \hat{q}_j)(\nu_{i,2})_0 \\ &= R\hat{t}_j(\nu_{i,1})_2, \end{aligned}$$

et $R(\hat{h} + \sum b_j \hat{q}_j)(\nu_{i,1})_0 = R(\hat{h} + \sum b_j \hat{q}_j)(h) = 1$ et $R\hat{t}_j(\nu_{i,2})_2 = R\hat{t}_j(h) = 0$. Comme de plus, $(\nu_{i,1})_2 = t_i$ ou f_i , on obtient $y_i = 1$ si et seulement si $i = j$ et $y_i = 0$ sinon.

CONCLUSION : $\theta_j \cup \alpha$ n'intervient que dans le Cas 1. Pour tous les TYPES, on a $\theta_j \cup \alpha = \varphi_j$.

Calcul de $\alpha_i \cup \alpha_j$

Pour tous les TYPES, les générateurs $\alpha_k = [\hat{q}_k - \hat{q}_0]$ n'interviennent que dans le Cas 3. Nous devons calculer les coefficients r_ℓ , $0 \leq \ell \leq n-1$ et y_i .

• Calcul des coefficients $r_\ell = \sum_w R(\hat{q}_k - \hat{q}_0)(\mu_{\ell,w})_2 R(\hat{q}_j - \hat{q}_0)(\mu_{\ell,w})_0$, avec $(\mu_{\ell,w})_0 = x_{\ell,w}$ et $(\mu_{\ell,w})_2 = p_{\ell,w}$

1) Dans $R(\hat{q}_j - \hat{q}_0)$ interviennent Z_j et Z_0 . Dans chaque Z_u , on voit

$$\hat{q}_u - \sum_{s \geq 1} \hat{p}_{u,s} \text{card}\{t \geq s \mid x_{u,t} = q_u\}.$$

-Si $u = j$, $R(\hat{q}_j - \hat{q}_0)(\mu_{\ell,w})_0 = R(\hat{q}_j - \hat{q}_0)(x_{\ell,w}) = 0$ sauf si $\ell = j$ et ceci pour tous les a_j indices w tels que $x_{j,w} = q_j$. Dans ces situations $R(\hat{q}_j - \hat{q}_0)(\mu_{j,w})_0 = 1$.

- Si $u = 0$, pour n'importe quel indice $j \neq 0$, $R(\hat{q}_j - \hat{q}_0)(\mu_{\ell,w})_0 = 0$ sauf si $\ell = 0$ et ceci pour tous les a_0 indices w tels que $x_{0,w} = q_0$. Dans ces situations

$$R(\hat{q}_j - \hat{q}_0)(\mu_{0,w})_0 = 1.$$

2) $R(\hat{q}_k - \hat{q}_0)(\mu_{\ell,w})_2 = R(\hat{q}_k - \hat{q}_0)(p_{\ell,w}) = 0$ sauf si

i) $\ell = j = k$ et pour tous les w tels que $x_{k,w} = q_k$. Dans ces situations on a $R(\hat{q}_k - \hat{q}_0)(p_{k,w}) = \text{card}\{t \geq w \mid x_{k,t} = q_k\}$;

ii) $\ell = 0$ et pour tous les w tels que $x_{0,w} = q_0$. Dans ces situations, pour n'importe quel indice $k \neq 0$, on a $R(\hat{q}_k - \hat{q}_0)(p_{0,w}) = \text{card}\{t \geq w \mid x_{0,t} = q_0\}$.

Si $k = j, 0 \leq k \leq n - 1$, nous avons obtenu

$$r_k = \sum_{\substack{w \geq 1 \\ x_{k,w} = q_k}} R(\hat{q}_k - \hat{q}_0)(\mu_{k,w})_2 = \sum_{w=1}^{w=a_k-1} (a_k - w) = \frac{a_k(a_k - 1)}{2} = \frac{a_k}{2}.$$

Le dernier calcul est fait modulo 2.

• Calcul des coefficients

$$y_i = R(\hat{q}_k - \hat{q}_0)(\nu_{i,1})_2 R(\hat{q}_j - \hat{q}_0)(\nu_{i,1})_0 - \varepsilon_i R(\hat{q}_k - \hat{q}_0)(\nu_{i,2})_2 R(\hat{q}_j - \hat{q}_0)(\nu_{i,2})_0.$$

Nous avons $(\nu_{i,1})_2 = t_i$ si $\varepsilon_i = 1$ et $(\nu_{i,1})_2 = f_i$ si $\varepsilon_i = -1$; $(\nu_{i,1})_0 = (\nu_{i,2})_2 = h$; $(\nu_{i,2})_0 = t_i$.

Aucun de ces éléments n'intervient dans $R(\hat{q}_u - \hat{q}_0)$. On a que pour tout $i, y_i = 0$.

Il reste à remarquer que les calculs précédents sont valables pour tous les TYPES.

CONCLUSION : Les cup-produits $\alpha_i \cup \alpha_j$ n'interviennent que dans le Cas 3. Pour tous les TYPES, $\alpha_i \cup \alpha_j = \frac{a_0}{2} \beta_0 + \delta_{i,j} \frac{a_j}{2} \beta_j$, où $\beta_0 = \sum_{1 \leq k \leq n-1} \beta_k$ et $\delta_{i,j}$ est le symbole de Kronecker.

Calcul de $\alpha \cup \alpha$

Pour tous les TYPES, le générateur α n'intervient que dans le Cas 1. On rappelle que r est le nombre de b_k pairs et on les a rangés entre 0 et $r - 1$.

• Calcul du coefficient x .

Le calcul se fait par la formule :

$$T^t(R(\hat{h} + \sum b_j \hat{q}_j) \cup R(\hat{h} + \sum b_j \hat{q}_j))(\delta) = (R(\hat{h} + \sum b_j \hat{q}_j) \cup R(\hat{h} + \sum b_j \hat{q}_j))(T(\delta)).$$

Si $\ell \leq 2g' - 1$, on a $R(\hat{h} + \sum b_j \hat{q}_j)(\delta_\ell)_0 = 0$.

Mais si $\ell = 2g' + k, 0 \leq k \leq m - 1$, on a

$$\begin{aligned} & (R(\hat{h} + \sum b_j \hat{q}_j) \cup R(\hat{h} + \sum b_j \hat{q}_j))(q_k, e_{2g'+k+1}, e_{2g'+k}) \\ &= R(\hat{h} + \sum b_j \hat{q}_j)(q_k) R(\hat{h} + \sum b_j \hat{q}_j)(e_{2g'+k}). \end{aligned}$$

On a d'abord $R(\hat{h} + \sum b_j \hat{q}_j)(q_k) = 1$ si et seulement si $k \geq r - 1$.

Ensuite on calcule $R(\hat{h} + \sum b_j \hat{q}_j)(e_{2g'+k}) = (c_0 + c_1 + \dots + c_{k-1})$ où $c_u = \frac{b_u a}{a_u}$ qui est non nul seulement si $u < r$. On obtient $(c_0 + c_1 + \dots + c_{k-1}) = 1$ si et seulement si $k - r$ est impair.

- **Si r impair**, k doit être pair et comme on est dans le Cas où $c = 0$, on doit avoir $m - r$ pair donc m impair. Le nombre de k pairs entre $r + 1$ pair et $m - 1$ pair, $r + 1 \leq k \leq m - 1$, est $x = \frac{m-r}{2}$.

- **Si r est pair**, alors k est impair et m est pair. Le nombre de k impairs entre $r + 1$ impair et $m - 1$ impair, $r + 1 \leq k \leq m - 1$, est $x = \frac{m-r}{2}$.

On en déduit que

$(R(\hat{h} + \sum b_j \hat{q}_j) \cup R(\hat{h} + \sum b_j \hat{q}_j))(\delta_\ell) = 1$ si et seulement si $\ell = 2g' + r + 2i$ pour un $i > 0$ et donc que $x = \frac{m-r}{2} = \frac{1}{2} \sum_r^{m-1} 1$.

Le calcul de x a été fait pour les TYPES o_i . Pour les TYPES n_i , $T(\delta) = \sum \delta_\ell$. Par conséquent ce calcul est valable aussi pour les TYPES n_i .

- Calcul des coefficients r_k

On rappelle que $(\mu_{k,\cdot})_0 = x_{k,\cdot}$ et $(\mu_{k,\cdot})_2 = p_{k,\cdot}$ et $r_k = \sum_{\ell=0}^{m-1} R(\hat{h} + \sum b_j \hat{q}_j)(p_{k,\ell}) R(\hat{h} + \sum b_j \hat{q}_j)(x_{k,\ell})$.

Si $b_k > 0$

- si $0 \leq k \leq r-1$, les b_k sont pairs. Le terme intervenant dans chaque $R(\hat{h} + \sum b_j \hat{q}_j)$ est $\sum_t V_t$, plus précisément

$$\sum_t \sum_{u \geq 1} \hat{p}_{t,u} \text{card}\{i \geq u \mid x_{t,i} = h\}.$$

Calculons $R(\hat{h} + \sum b_j \hat{q}_j)(x_{k,\ell})$.

- Si ℓ est tel que $x_{k,\ell} = h$, ce qui arrive pour b_k d'entre eux, alors $R(\hat{h} + \sum b_j \hat{q}_j)(x_{k,\ell}) = 1$ et $r_k = \sum_{\ell=1}^{b_k-1} R(\hat{h} + \sum b_j \hat{q}_j)(p_{k,\ell})$. On a $r_k = \sum_{\ell=1, x_{k,\ell}=h}^{m-1} \text{card}\{i \geq \ell \mid x_{\ell,i} = h\} = \sum_{\ell=1}^{b_k-1} (b_k - \ell) = \frac{b_k}{2}$.

La dernière égalité est calculée modulo 2.

- Si ℓ est tel $x_{k,\ell} = q_k$, alors $R(\hat{h} + \sum b_j \hat{q}_j)(x_{k,\ell}) = 0$.

On conclut que, si $b_k > 0$ et $0 \leq k \leq r-1$, on a $r_k = \frac{b_k}{2}$.

- si $k \geq r$, les b_k sont impairs, les $z_k = a_k + b_k$ sont pairs. La somme intervenant dans chaque $R(\hat{h} + \sum b_j \hat{q}_j)$ est $\hat{h} + \sum_{u=r}^{m-1} Z_u + \sum V_t$. Que ℓ soit tel que $x_{k,\ell} = h$ ou $x_{k,\ell} = q_k$, on a $R(\hat{h} + \sum b_j \hat{q}_j)(x_{k,\ell}) = 1$ d'où

$$\begin{aligned} r_k &= \sum_{\ell} R(\hat{h} + \sum b_j \hat{q}_j)(p_{k,\ell}) \\ &= \sum_{\ell=1, x_{k,\ell}=q_k}^{m-1} \text{card}\{i \geq \ell \mid x_{\ell,i} = q_k\} + \sum_{\ell=1, x_{k,\ell}=h}^{m-1} \text{card}\{i \geq \ell \mid x_{\ell,i} = h\} \\ &= \sum_{\ell=1}^{z_k-1} (z_k - \ell) = \frac{z_k}{2}. \end{aligned}$$

La dernière égalité est calculée modulo 2.

Si $b_k \leq 0$ on trouve les mêmes résultats que pour $b_k > 0$, puisque r_k devient (mod 2)

- si $k \leq r$, alors $z_k = 1 + b_k$ est impair. Ce qui change est l'expression de V_t et ce qui nous intéresse est maintenant $\sum_t \sum_{u \geq 1} \hat{p}_{t,u} (z_k - u + 1)$. On a encore $R(\hat{h} + \sum b_j \hat{q}_j)(x_{k,\ell})$ est égal à 1 si $x_{k,\ell} = h$ et à 0 sinon, d'où

$$r_k = \sum_{\ell=1, x_{k,\ell}=h} R(\hat{h} + \sum b_j \hat{q}_j)(p_{k,\ell}) = \sum_{\ell=1}^{b_k-1} (z_k - \ell + 1) = \frac{b_k}{2} = \frac{a_k b_k}{2}.$$

Les égalités sont calculées modulo 2.

- si $k \geq r$, alors z_k est pair. On a en plus $Z_u = \hat{q}_u + \hat{g}_u$. Comme précédemment, que ℓ soit tel que $x_{k,\ell} = h$ ou $x_{k,\ell} = q_k$, on a $R(\hat{h} + \sum b_j \hat{q}_j)(x_{k,\ell}) = 1$ d'où

$$r_k = \sum_{\ell=1}^{z_k} (z_k - \ell + 1) = \frac{z_k - 2}{2} = \frac{-b_k - 1}{2} = \frac{b_k + 1}{2} = \frac{a_k + b_k}{2} = \frac{1 + a_k b_k}{2}.$$

Les égalités sont calculées modulo 2.

Maintenant, on rappelle que dans le Cas 1, on a $\beta = [\hat{\delta}] = [\hat{\mu}_k] = \beta_k$. Le coefficient de β est $(\sum r_k) - x = \sum_{0 \leq k \leq r-1} \frac{a_k b_k}{2} + \sum_{r \leq k \leq m-1} \frac{(a_k b_k)}{2} = \frac{1}{2} \sum a_k b_k = \frac{c}{2}$.

Remarquons que ces calculs sont valables pour tous les TYPES.

- Calcul des coefficients y_j

On rappelle que

$$y_j = R(\hat{h} + \sum b_j \hat{q}_j)(\nu_{j,1})_2 R(\hat{h} + \sum b_j \hat{q}_j)(\nu_{j,1})_0 - \varepsilon_j R(\hat{h} + \sum b_j \hat{q}_j)(\nu_{j,2})_2 R(\hat{h} + \sum b_j \hat{q}_j)(\nu_{j,2})_0.$$

Pour tous les TYPES, on a $R(\hat{h} + \sum b_j \hat{q}_j)(\nu_{j,2})_0 = 0$.

Comme $R(\hat{h} + \sum b_j \hat{q}_j)((\nu_{i,1})_0) = R(\hat{h} + \sum b_j \hat{q}_j)(h) = 1$, on a $y_j = R(\hat{h} + \sum b_j \hat{q}_j)(\nu_{j,1})_2$. Alors si $\varepsilon_j = 1$, $y_j = R(\hat{h} + \sum b_j \hat{q}_j)(t_j) = 0$, tandis que si $\varepsilon_j = -1$, $y_j = R(\hat{h} + \sum b_j \hat{q}_j)(f_j) = 1$.

CONCLUSION : $\alpha \cup \alpha$ n'existe que dans le Cas 1. Pour les TYPES o_1 et n_1 , on a $\alpha \cup \alpha = \frac{c}{2}\beta$. Pour les TYPES o_2 et n_2 , on a $\alpha \cup \alpha = \frac{c}{2}\beta + \sum_{j \geq 1} \varphi_j$. Pour le TYPE n_3 , on a $\alpha \cup \alpha = \frac{c}{2}\beta + \sum_{j > 1} \varphi_j$. Pour le TYPE n_4 , on a $\alpha \cup \alpha = \frac{c}{2}\beta + \sum_{j > 2} \varphi_j$. \square

Remarque 23. Pour les TYPES o_1 et n_2 ceci correspond bien au résultat de [3], [4], [5], puisque pour a pair $\binom{a}{2}$ est congru mod 2 à $a/2$.

7.3. Les cup-produits, pour $p = 2$, $\cup : H^1(M, \mathbb{Z}_2) \otimes H^2(M, \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^3(M, \mathbb{Z}_2)$. Dans cette sous-section, nous utiliserons le procédé suivant.

1) Pour $[\xi_1]$ un générateur du $H^1(M, \mathbb{Z}_2)$ et $[\xi_2]$ un générateur du $H^2(M, \mathbb{Z}_2)$, on choisit un représentant ξ_1 et ξ_2 . Soient $R(\xi_1)$ et $R(\xi_2)$ les cocycles Δ -simpliciaux qui sont des sections de T^t données dans la Section 6.

2) D'après la formule d'Alexander-Whitney, si f est un 1-cocycle Δ -simplicial, g un 2-cocycle Δ -simplicial et s un 3- Δ -simplexe de faces $s_0 = (v_1, v_2, v_3)$, $s_1 = (v_0, v_2, v_3)$, $s_2 = (v_0, v_1, v_3)$ et $s_3 = (v_0, v_1, v_2)$ alors $f \cup g(s) = f(v_0, v_1)g(s_0)$, et on trouve (v_0, v_1) en prenant la dernière arête de s_2 ou s_3 , i.e. $(v_0, v_1) = (s_2)_2 = (s_3)_2$.

3) Quand la combinaison C des 3-simplexes telle que $R(\xi_1) \cup R(\xi_2) = C$ a été trouvée, on obtient finalement $[\xi_1] \cup [\xi_2] = [T^t C]$.

Cette sous-section prouve le théorème 8.

Preuve. Calcul de $\theta_i \cup \varphi_j$

Ce cup-produit intervient pour tous les TYPES, dans les trois Cas.

$\theta_i = [\hat{t}_i]$ pour $1 \leq i \leq g'$ et $\varphi_j = [\hat{\nu}_j]$ pour $1 \leq j \leq g'$.

Le relevé de φ_j contient $\hat{\nu}_{j,1}$. Les seuls 3-simplexes s dont la face s_0 est $\hat{\nu}_{j,1}$ sont uniquement $s = N_{j,1}$ ou $s = N'_{j,1}$. Pour les différents TYPES, les découpages Δ -simpliciaux de $N_{j,1}$ et $N'_{j,1}$ sont différents.

Le relevé de θ_i est

$$R(\hat{t}_i) = \hat{t}_i + \hat{f}_i + \hat{e}_\ell + \hat{S}_\ell^\pm + \hat{e}_{\ell-1} + \hat{S}_{\ell-1}^\pm,$$

- si i est impair, $\ell = 2i$ ce qui donne ici $\ell = 2$ modulo 4,
- si i est pair $\ell = 2i - 1$ ce qui donne ici $\ell = 3$ modulo 4.

TYPE o_1 , $\varepsilon_j = 1$, on trouve, en comparant les valeurs modulo 4 et les parités :

- pour j impair, $(N_{j,1})_3 = T_{2j-2}^-$ et $(N'_{j,1})_3 = T_{2j}^-$,
 - comme $2j - 2 = 0$ modulo 4, on a $((N_{j,1})_3)_2 = (T_{2j-2}^-)_2 = S_{2j-2}^-$,
 - si i est impair, $2i$ et $2i - 1$ ne sont pas égaux modulo 4 à $2j - 2$, on a $R(\hat{t}_i)((N_{j,1})_3)_2 = 0$,
 - si i est pair, $2i - 1$ et $2i - 2$ ne sont pas égaux modulo 4 à $2j - 2$, on a $R(\hat{t}_i)((N_{j,1})_3)_2 = 0$,
 - comme $2j = 2$ modulo 4, on a $((N'_{j,1})_3)_2 = (T_{2j}^-)_2 = S_{2j+1}^-$,
 - si i est impair, comme $2j + 1$ et $2i$ ne sont pas de la même parité, on a $R(\hat{t}_i)((N'_{j,1})_3)_2 = 0$,
 - si i est pair et $i = j + 1$ alors $R(\hat{t}_{j+1})((N'_{j,1})_3)_2 = 1$,
- pour j pair, $(N_{j,1})_3 = T_{2j-3}^-$ et $(N'_{j,1})_3 = T_{2j-1}^-$,
 - comme $2j - 3 = 1$ modulo 4, on a $((N_{j,1})_3)_2 = (T_{2j-3}^-)_2 = S_{2j-3}^-$,
 - si i est impair et $i = j - 1$, on a $R(\hat{t}_{j-1})((N_{j,1})_3)_2 = 1$,
 - si i est pair, $2i - 1$ et $2i - 2$ ne sont pas égaux modulo 4 à $2j - 3$, on a $R(\hat{t}_i)((N_{j,1})_3)_2 = 0$,
 - comme $2j = 2$ modulo 4, on a $((N'_{j,1})_3)_2 = (T_{2j-1}^-)_2 = S_{2j}^-$,
 - si i est impair, $2i$ et $2i - 1$ ne sont pas égaux modulo 4 à $2j$, on a $R(\hat{t}_i)((N'_{j,1})_3)_2 = 0$,
 - si i est pair, comme $2j$ et $2i - 1$ ne sont pas de la même parité, on a $R(\hat{t}_i)((N'_{j,1})_3)_2 = 0$.

De plus on a $T^t[N_{j,1}] = T^t[N'_{j,1}] = \epsilon$, d'où la conclusion :

CONCLUSION : Dans tous les Cas, pour le TYPE o_1 , les seuls $\theta_i \cup \varphi_j$ non nuls sont :

- si j est impair $\theta_{j+1} \cup \varphi_j = \gamma$,
- si j est pair $\theta_{j-1} \cup \varphi_j = \gamma$.

TYPE o_2 , $\varepsilon_j = -1$, on trouve

- pour j impair, $(N_{j,1})_2 = T_{2j-2}^-$ et $(N'_{j,1})_2 = T_{2j}^+$,
 - comme $2j - 2$ est égal à 0 modulo 4, on a $((N_{j,1})_3)_2 = (T_{2j-2}^-)_2 = S_{2j-2}^-$,
 - comme $2j$ est égal à 2 modulo 4, on a $((N'_{j,1})_3)_2 = (T_{2j}^+)_2 = S_{2j+1}^+$,
- pour j pair, $(N_{j,1})_2 = T_{2j-3}^+$ et $(N'_{j,1})_2 = T_{2j-1}^-$,
 - comme $2j - 3$ est égal à 1 modulo 4, on a $((N_{j,1})_3)_2 = (T_{2j-3}^+)_2 = S_{2j-3}^+$,
 - comme $2j - 1$ est égal à 3 modulo 4, on a $((N'_{j,1})_3)_2 = (T_{2j-1}^-)_2 = S_{2j}^-$.

Peu importe qu'on applique $R(\hat{t}_i)$ à un S_{\dots}^+ ou à un S_{\dots}^- , on obtient les mêmes conditions sur les indices que pour le TYPE o_1 . On a encore $T^t[N_{j,1}] = T^t[N'_{j,1}] = \epsilon$, d'où la même conclusion que pour le Type o_1 :

CONCLUSION : Dans tous les Cas, pour le TYPE o_2 , les seuls $\theta_i \cup \varphi_j$ non nuls sont :

- si j est impair $\theta_{j+1} \cup \varphi_j = \gamma$,
- si j est pair $\theta_{j-1} \cup \varphi_j = \gamma$.

TYPE n_1 , $\varepsilon_j = 1$, pour tous j , on a $(N_{j,1})_3 = T_{2j-2}^-$ et $(N'_{j,1})_3 = T_{2j-1}^-$. Comme plus haut, en comparant les valeurs modulo 4 et les parités, on trouve :

- pour j impair,
 - $((N_{j,1})_3)_2 = (T_{2j-2}^-)_2 = S_{2j-2}^-$,
 - pour i impair, on a $R(\hat{t}_i)((N_{j,1})_3)_2 = 0$,
 - pour i pair, on a $R(\hat{t}_i)((N_{j,1})_3)_2 = 0$,
 - $((N'_{j,1})_3)_2 = (T_{2j-1}^-)_2 = S_{2j-1}^-$,
 - pour i impair et $i = j$, on a $R(\hat{t}_j)((N'_{j,1})_3)_2 = 1$,
 - pour i pair, on a $R(\hat{t}_i)((N'_{j,1})_3)_2 = 0$,
- pour j pair,
 - $((N_{j,1})_3)_2 = (T_{2j-2}^-)_2 = S_{2j-1}^-$,
 - pour i impair, on a $R(\hat{t}_i)((N_{j,1})_3)_2 = 0$,
 - pour i pair, on a $R(\hat{t}_i)((N_{j,1})_3)_2 = 0$,
 - $((N'_{j,1})_3)_2 = (T_{2j-1}^-)_2 = S_{2j}^-$,
 - pour i impair et $i = j$, on a $R(\hat{t}_j)((N'_{j,1})_3)_2 = 0$,
 - pour i pair, on a $R(\hat{t}_i)((N'_{j,1})_3)_2 = 1$.

CONCLUSION : Dans les trois Cas, pour les TYPES n_1 , on a $\theta_j \cup \varphi_j = \gamma$ et 0 sinon.

TYPE n_2 , $\varepsilon_j = -1$ pour tous j , on a $((N_{j,1})_2)_2 = (T_{2j-2}^-)_2 = S_{2j-2}^-$ et $((N'_{j,1})_2) = (T_{2j-1}^+)_2 = S_{2j-1}^+$. Comme pour le TYPE n_1 , en comparant les valeurs modulo 4 et les parités, on trouve la même conclusion puisque le signe \pm de l'arête S_{\dots}^{\pm} ne change rien au calcul.

CONCLUSION : Dans les trois Cas, pour les TYPES n_2 , $\theta_j \cup \varphi_j = \gamma$ et 0 sinon.

TYPES n_3, n_4 en utilisant les résultats précédents pour $\varepsilon_j = 1$ et $\varepsilon_j = -1$, on a la conclusion :

CONCLUSION : Dans les trois Cas, pour les TYPES n_3 et n_4 , on a $\theta_j \cup \varphi_j = \gamma$ et 0 sinon.

Calcul de $\alpha \cup \varphi_j$

Ce cup-produit intervient pour tous les TYPES seulement dans le Cas 1.

$$\alpha = [\hat{h} + \sum b_k \hat{q}_k] \text{ et } \varphi_j = [\hat{v}_j].$$

D'après l'étude précédente, on sait déjà que le relevé de φ_j contient $\hat{v}_{j,1}$. Les seuls

3-simplexes s dont la face s_0 est $\hat{\nu}_{j,1}$ sont uniquement $s = N_{j,1}$ ou $s = N'_{j,1}$. On sait aussi que les arêtes $(s_3)_2$ ou $(s_2)_2$ sont S_u^\pm avec $1 \leq u \leq g'$.

Dans le relevé de α n'interviennent que les S_u^\pm . L'étude précédente mène à la conclusion :

CONCLUSION : Lorsque $\varepsilon_j = 1$, $\alpha \cup \varphi_j = 0$ et lorsque $\varepsilon_j = -1$, $\alpha \cup \varphi_j = \gamma$.

Calcul de $\alpha \cup \beta$

Ce cup-produit intervient pour tous les TYPES seulement dans le Cas 1.

Maintenant, pour tous les TYPES, dans le relevé de α , il y a l'arête A^+ . Comme $T^t(D_0^+) = \epsilon$, on a la conclusion :

CONCLUSION : Dans le Cas 1, pour tous les TYPES, on a toujours $\alpha \cup \beta = \gamma$.

Calcul de $\alpha_i \cup \beta_k$

Ce cup-produit intervient pour tous les TYPES mais seulement dans le Cas 3.

Le relevé de β_k est $R(\hat{\mu}_k) = \hat{\mu}_{k,1} + \hat{X}_{k,1} + \hat{G}_k - \sum_{1 \leq \ell \leq z_k - w_{k+1}} \hat{P}_{k,\ell}$. Le seul 3-simplexe s tel que $R(\hat{\mu}_k)(s_0) = 1$ est $s = M_{k,1}^\pm$. On a $s_3 = P_{k,1}^\pm$ et $(P_{k,1}^\pm)_2 = C_k^\pm$. Dans le relevé de α_i apparaît seulement (via Z_i) C_i^+ .

On vérifie que $T^t(M_{k,1}^\pm) = \zeta_k$ et on a $\gamma = [\hat{\zeta}_k]$.

CONCLUSION : Dans le Cas 3, pour tous les TYPES, $\alpha_k \cup \beta_k = \gamma$ et 0 sinon.

$\theta_i \cup \beta_k$ et $\alpha_k \cup \varphi_j$ Pour des raisons topologiques, ces cup-produits sont nuls.

Calcul de $\theta_i \cup \beta$

Ce cup-produit intervient pour tous les TYPES mais seulement dans le Cas 1.

On a $\theta_i = [\hat{t}_i]$ et $\beta = [\hat{\delta}]$.

On cherche un 3-simplexe s tel que $R(\hat{\delta})(s_0) \neq 0$ sachant que $R(\hat{\delta}) = \hat{\delta}_0 + \hat{T}_0^\pm + \hat{F}_0$. Le seul possible 3-simplexe est $s = D_0^\pm$ pour lequel $(s_3)_2 = (E_0^\pm)_2 = A^\pm$. Comme l'arête A^\pm n'intervient pas dans le relevé de θ_i , on a :

CONCLUSION : Dans le Cas 1, pour tous les TYPES, on a $\theta_i \cup \beta = 0$. □

8. CALCUL DES CUP-PRODUITS POUR $p > 2$

Ce calcul est à la fois plus compliqué (1 et -1 ne sont plus égaux, et les générateurs diffèrent selon les TYPES) et plus simple (la plupart des cup-produits seront nuls).

8.1. Les cup-produits, pour $p > 2$, $\cup : H^1(M, \mathbb{Z}_p) \otimes H^1(M, \mathbb{Z}_p) \rightarrow H^2(M, \mathbb{Z}_p)$. Par la même méthode des coefficients, en calculant maintenant modulo p , cette sous-section prouve le théorème 9.

Preuve. Calcul de $\theta_i \cup \theta_j$

- Dans le Cas 1

TYPE $o_1, o_2, \theta_j = [\hat{t}_j]$.

- Il y a seulement à calculer x mais en prenant garde aux signes dans $T(\delta)$:

$T(\delta) = \sum_{i=0}^{g-1} (\delta_{4i} + \delta_{4i+1} - \delta_{4i+2} - \delta_{4i+3}) + \sum_{\ell=4g}^{4g+m} \delta_\ell$ donne alors $x = 1$ si i impair et $j = i + 1$, mais $x = -1$ si i pair et $j = i - 1$.

CONCLUSION : Dans le Cas 1, pour les TYPES o_1, o_2 , les cup-produits $\theta_i \cup \theta_j$ sont nuls sauf $\theta_{2k-1} \cup \theta_{2k} = \beta, k > 0$.

TYPES $n_i, \theta_j = [\hat{t}_j - \hat{t}_1]$.

On a $R(\hat{t}_j - \hat{t}_1) = \hat{t}_j + \hat{f}_j - (\hat{t}_1 + \hat{f}_1) - \sum (\hat{S}_\ell^\pm + \hat{e}_\ell)$.

- Les coefficients r_i et y_ℓ sont encore nuls.
- On ne calcule pas x car β n'est pas un générateur du $H^2(M, \mathbb{Z}_p)$.

CONCLUSION : Dans le Cas 1, pour les TYPES n_i , les cup-produits $\theta_i \cup \theta_j$ sont tous nuls.

- Dans le Cas 2

TYPE $o_1, \theta_j = [\hat{t}_j]$.

- Comme les relevés sont les mêmes que pour $p = 2$, les coefficients r_k et y_ℓ sont encore nuls.
- On ne calcule pas x car β n'est pas un générateur du $H^2(M, \mathbb{Z}_p)$.

CONCLUSION : Dans le Cas 2, pour les TYPES o_1 , les cup-produits $\theta_i \cup \theta_j$ sont tous nuls.

TYPE $o_2, \theta_j = [\hat{t}_j]$.

- Comme les relevés sont les mêmes que pour $p = 2$, les coefficients r_k et y_ℓ sont encore nuls.
- Il y a seulement à calculer x mais en prenant garde aux signes dans $T(\delta)$, comme dans le Cas 1 pour les TYPES o_i .

CONCLUSION : Dans le Cas 2, pour les TYPES o_2 , les cup-produits $\theta_i \cup \theta_j$ sont nuls sauf $\theta_{2k-1} \cup \theta_{2k} = \beta, k > 0$.

TYPES n_i . La situation est la même que dans le Cas 1.

CONCLUSION : Dans le Cas 2, pour les TYPES n_i , les cup-produits $\theta_i \cup \theta_j$ sont tous nuls.

- Dans le Cas 3

TYPES o_i, n_i .

- Comme les relevés sont les mêmes que pour $p = 2$, les coefficients r_k et y_ℓ sont encore nuls.
- On ne calcule pas x car β n'est pas un générateur du $H^2(M, \mathbb{Z}_p)$.

CONCLUSION : Dans le Cas 3, pour les TYPES o_i, n_i , les cup-produits $\theta_i \cup \theta_j$ sont tous nuls.

Calcul de $\theta_j \cup \alpha$

Ce cup-produit n'intervient que dans le Cas 1 pour le TYPE o_1 et dans les Cas 1 et 2 pour le TYPE n_1 .

- Dans le Cas 1

TYPE o_1 , $\theta_j = [\hat{t}_j]$ et $\alpha = [\hat{h} - \sum b_k a_k^{-1} \hat{q}_k]$.

- Calcul du coefficient x .

Dans $T(\delta)$, l'indice des Δ -simplexes δ_u varie de 0 à $4g + m$. Pour $u \leq 4g - 1$, le Δ -simplexe δ_u est $\delta_u = (t, e., e.)$ et $R(\hat{h} - \sum b_k a_k^{-1} \hat{q}_k)$ le relevé de α appliqué à $(\delta_u)_0 = t$. est nul. Lorsque $u \geq 4g$, le Δ -simplexe δ_u est $\delta_u = (q, e., e.)$ et $R(\hat{t}_j)$ le relevé de θ_j appliqué à $(\delta_u)_2 = e.$ est nul. Le coefficient x est nul.

- Calcul du coefficient y_j .

Pour le TYPE o_1 , on a $T(\nu_j) = \nu_{j,1} + \nu_{j,2}$, puisque tous les $\varepsilon_j = 1$ et $\nu_{j,1} = (h, f_j, t_j), \nu_{j,2} = (t_j, f_j, h)$. On voit que seulement

$$R(\hat{h} - \sum b_k a_k^{-1} \hat{q}_k)((\nu_{j,1})_0) = 1, R(\hat{t}_j)((\nu_{j,1})_2) = 1.$$

CONCLUSION : Les cup-produits $\theta_j \cup \alpha$ sont nuls sauf pour le TYPE o_1 , dans le Cas 1 et alors $\theta_j \cup \alpha = \varphi_j$.

TYPE n_1 , $\theta_j = [\hat{t}_j - \hat{t}_1]$ et $\alpha = [\hat{h} - \sum b_k a_k^{-1} \hat{q}_k]$.

Dans le relevé de θ_j intervient $t_1 + f_1$ mais ce terme ne donne pas de contribution car il suffit de calculer y_j pour $j > 1$ puisque φ_1 n'est pas un générateur de $H^2(M, \mathbb{Z}_p)$. Alors la conclusion est la même que pour le TYPE o_1 avec une restriction sur l'indice j .

CONCLUSION : Dans les Cas 1, pour le TYPE n_1 , $\theta_j \cup \alpha = \varphi_j, j > 1$.

- Dans le Cas 2

TYPE n_1 , $\theta_j = [\hat{t}_j - \hat{t}_1]$ et $\alpha = [\hat{h} - \sum b_k a_k^{-1} \hat{q}_k]$.

La conclusion est la même que dans le Cas 1.

CONCLUSION : Dans les Cas 2, pour le TYPE n_1 , $\theta_j \cup \alpha = \varphi_j, j > 1$.

Calcul de $\alpha \cup \alpha$

Ce cup-produit n'intervient que dans le Cas 1 pour le TYPE o_1 et dans les Cas 1 et 2 pour le TYPE n_1 .

- Dans le Cas 1

TYPE o_1 , $\alpha = [\hat{h} - \sum b_k a_k^{-1} \hat{q}_k]$.

Le relevé de α est $R(\hat{h} - \sum b_k a_k^{-1} \hat{q}_k) = \hat{h} + \sum \hat{f}_j + \sum \hat{g}_k + \hat{A}^+ + \sum \hat{S}_\ell^+ - \sum b_k a_k^{-1} Z_k - \sum V_k - \frac{1}{a} [c_0(\hat{e}_{2g'+1} + \hat{S}_{2g'+1}^\pm) + (c_0 + c_1)(\hat{e}_{2g'+2} + \hat{S}_{2g'+2}^\pm) + \dots + (c_0 + \dots + c_{m-1})(\hat{e}_{2g'+m} + \hat{S}_{2g'+m}^\pm)]$.

- Calcul du coefficient x .

Comme $R(\hat{h} - \sum b_k a_k^{-1} \hat{q}_k)(t_j) = 0$, on a

$$x = \sum R(\hat{h} - \sum b_k a_k^{-1} \hat{q}_k)(e_{2g'+k}) R(\hat{h} - \sum b_k a_k^{-1} \hat{q}_k)(q_k).$$

• Calcul des coefficients r_k .

• Si $b_k > 0$,

$$\begin{aligned} r_k &= \sum R(\hat{h} - \sum b_k a_k^{-1} \hat{q}_k)(p_{k,\ell}) R(\hat{h} - \sum b_k a_k^{-1} \hat{q}_k)(x_{k,\ell}) \\ &= \sum_{x_{k,\ell}=q_k} (-b_k/a_k) [(b_k/a_k) \text{card}\{i \geq \ell \mid x_{k,i} = q_k\} - \text{card}\{i \geq \ell \mid x_{k,i} = h\}] \\ &\quad + \sum_{x_{k,\ell}=h} [(b_k/a_k) \text{card}\{i \geq \ell \mid x_{k,i} = q_k\} - \text{card}\{i \geq \ell \mid x_{k,i} = h\}] \\ &= \frac{-1}{a_k^2} \sum_{i \geq \ell} s_i s_\ell, \end{aligned}$$

avec $s_i = b_k$ si $x_{k,i} = q_k$ et $s_i = -a_k$ si $x_{k,i} = h$. Cet entier $\sum_{i \geq \ell} s_i s_\ell$ est égal à : $\sum_{i \geq \ell} s_i s_\ell = \frac{1}{2} [\sum (s_\ell^2) - (\sum s_\ell)^2] = \frac{1}{2} (a_k b_k^2 + b_k a_k^2 - 0) = \frac{a_k b_k (a_k + b_k)}{2}$, donc $r_k = -\frac{b_k (a_k + b_k)}{2a_k}$.

• Si $b_k \leq 0$,

$$\begin{aligned} r_k &= R(\hat{h} - \sum b_k a_k^{-1} \hat{q}_k)(q_k) \alpha(p_{k,1}) - R(\hat{h} - \sum b_k a_k^{-1} \hat{q}_k)(p_{k,3} + \\ &\quad \dots + p_{k,1}) R(\hat{h} - \sum b_k a_k^{-1} \hat{q}_k)(h) \\ &= -\sum_{\ell > 2} \alpha(p_{k,\ell}) = -\sum_{\ell > 2} (z_k - \ell + 1) = -\frac{z_k - 2)(z_k - 1)}{2}, \end{aligned}$$

or $z_k = 1 - b_k$ et $a_k = 1$ d'où

$$r_k = -\frac{b_k (a_k + b_k)}{2a_k}, \text{ comme dans le cas } b_k > 0.$$

• Calcul des coefficients y_ℓ .

On a

$$y_j = R(\hat{h} - \sum b_k a_k^{-1} \hat{q}_k)(t_j) R(\hat{h} - \sum b_k a_k^{-1} \hat{q}_k)(h) - R(\hat{h} - \sum b_k a_k^{-1} \hat{q}_k)(h) R(\hat{h} - \sum b_k a_k^{-1} \hat{q}_k)(t_j) = 0.$$

Il reste $\alpha \cup \alpha = [x\hat{\delta} + \sum r_k \hat{\mu}_k] = N[\hat{\delta}]$, avec

$$N = x - \sum \frac{r_k}{a_k} = \sum_{k=0}^m \frac{b_k}{a_k} \left(\sum_{i < k} \frac{b_i}{a_i} \right) + \sum \frac{b_k (a_k + b_k)}{2a_k^2} = \frac{c(a+c)}{2} a^{-2}.$$

Comme c est divisible par $p > 2$, N est congru mod p à 0.

CONCLUSION : Dans le Cas 1, pour le TYPE o_1 , $\alpha \cup \alpha = 0$.

TYPE n_1 , $\alpha = [\frac{c}{2}\hat{t}_1] + \hat{h} - \sum b_k a_k^{-1} \hat{q}_k$.

Le relevé de α est $R(\hat{h} - \sum b_k a_k^{-1} \hat{q}_k) = \hat{h} + \sum \hat{f}_j + \sum \hat{g}_k + \hat{A}^+ + \sum \hat{S}_\ell^+ - \sum b_k a_k^{-1} Z_k - \sum V_k - \frac{1}{a} [c_0(\hat{e}_{2g'+1} + \hat{S}_{2g'+1}^\pm) + (c_0 + c_1)(\hat{e}_{2g'+2} + \hat{S}_{2g'+2}^\pm) + \dots + (c_0 + \dots + c_{m-1})(\hat{e}_{2g'+m} + \hat{S}_{2g'+m}^\pm)] + \frac{c}{2} a \left((\hat{t}_1 + \hat{f}_1) - (\hat{S}_1^\pm + \hat{e}_1) - 2(\hat{S}_0^\pm + \hat{e}_0) \right)$.

Comme p divise c , le nouveau dernier facteur n'intervient pas dans le calcul des coefficients. De plus pour ce TYPE, on a $[\hat{\delta}] = 0$.

CONCLUSION : Dans le Cas 1, pour le TYPE n_1 , $\alpha \cup \alpha = 0$.

- Dans le Cas 2

Pour le TYPE n_1 , la situation est la même que dans le Cas 1.

CONCLUSION : Dans le Cas 2, pour le TYPE n_1 , $\alpha \cup \alpha = 0$.

Calcul de $\alpha_k \cup \alpha_j$

Ce cup-produit intervient dans le Cas 3 pour tous les TYPES. Le déroulement de la preuve est la même que pour $p = 2$. Il faut maintenant tenir compte des signes \pm et de la divisibilité par p .

TYPE o_i . Le générateur α_k est alors $\alpha_k = [\hat{q}_k - \hat{q}_0]$ pour $1 \leq k \leq n - 1$. Nous devons calculer les coefficients r_ℓ et y_i .

• Calcul des coefficients $r_\ell = \sum_w R(\hat{q}_k - \hat{q}_0)(\mu_{\ell,w})_2 R(\hat{q}_j - \hat{q}_0)(\mu_{\ell,w})_0$, avec $(\mu_{\ell,w})_0 = x_{\ell,w}$ et $(\mu_{\ell,w})_2 = p_{\ell,w}$.

1) Dans $R(\hat{q}_j - \hat{q}_0)$ interviennent Z_j et $-Z_0$ et, dans Z_u on voit $\hat{q}_u - \sum_{s \geq 1} \hat{p}_{u,s} \text{card}\{t \geq s \mid x_{u,t} = q_u\}$.

- Si $u = j$, $R(\hat{q}_j - \hat{q}_0)(\mu_{\ell,w})_0 = R(\hat{q}_j - \hat{q}_0)(x_{\ell,w}) = 0$ sauf si $\ell = j$ et ceci pour tous les a_j indices w tels que $x_{j,w} = q_j$. Dans ces situations $R(\hat{q}_j - \hat{q}_0)(\mu_{j,w})_0 = 1$.

- Si $u = 0$, $R(\hat{q}_j - \hat{q}_0)(\mu_{\ell,w})_0 = 0$ sauf si $\ell = 0$ et ceci pour tous les a_0 indices w tels que $x_{0,w} = q_0$. Dans ces situations $R(\hat{q}_j - \hat{q}_0)(\mu_{0,w})_0 = -1$.

2) $R(\hat{q}_k - \hat{q}_0)(\mu_{\ell,w})_2 = R(\hat{q}_k - \hat{q}_0)(p_{\ell,w}) = 0$ sauf si

i) $\ell = j = k$ et pour tous les w tels que $x_{k,w} = q_k$. Dans ces situations on a $R(\hat{q}_k - \hat{q}_0)(p_{k,w}) = -\text{card}\{t \geq w \mid x_{k,t} = q_k\}$;

ii) $\ell = 0$ et pour tous les w tels que $x_{0,w} = q_0$. Dans ces situations on a $R(\hat{q}_k - \hat{q}_0)(p_{0,w}) = -\text{card}\{t \geq w \mid x_{0,t} = q_0\}$.

Si $k = j$, nous avons obtenu

$$r_k = - \sum_{\substack{w \geq 1 \\ x_{k,w} = q_k}} R(\hat{q}_k - \hat{q}_0)(\mu_{k,w})_2 = - \sum_{w=1}^{w=a_k-1} (a_k - w) = -\frac{a_k(a_k - 1)}{2}.$$

Comme $p \mid a_k$, tous les r_k sont nuls. (Remarquons que ceci n'est pas vrai quand $p = 2$.)

• Calcul des coefficients

$$y_i = R(\hat{q}_k - \hat{q}_0)(\nu_{i,1})_2 R(\hat{q}_j - \hat{q}_0)(\nu_{i,1})_0 - \varepsilon_i R(\hat{q}_k - \hat{q}_0)(\nu_{i,2})_2 R(\hat{q}_j - \hat{q}_0)(\nu_{i,2})_0.$$

Nous avons

$$(\nu_{i,1})_2 = t_i \text{ si } \varepsilon_i = 1 \text{ et } (\nu_{i,1})_2 = f_i \text{ si } \varepsilon_i = -1 ;$$

$$(\nu_{i,1})_0 = (\nu_{i,2})_2 = h; (\nu_{i,2})_0 = t_i.$$

Aucun de ces éléments n'intervient dans $R(\hat{q}_u - \hat{q}_0)$. On a que pour tout i , $y_i = 0$.

- Il reste à remarquer que les calculs précédents sont valables pour les TYPES o_1 et o_2 .

CONCLUSION : Pour les TYPES o_i , tous les cup-produits $\alpha_k \cup \alpha_j$ sont nuls.

Pour les TYPES n_i . Maintenant le générateur est $\alpha = [\hat{q}_k - \frac{1}{2}\hat{t}_g]$.

• Calcul des r_k . La différence avec le paragraphe précédent est que le terme Z_0 n'intervient pas. Les calculs des r_k restent les mêmes et les r_k sont nuls puisque $p \mid a_k$.

- Dans les $R(\hat{q}_k - \frac{1}{2}\hat{t}_g)$ il y a maintenant $\frac{1}{2}t_g$ mais $R(\hat{q}_j - \frac{1}{2}\hat{t}_g)(\nu_{i,1})_0 = R(\hat{q}_j - \frac{1}{2}\hat{t}_g)(h) = 0$ et $R(\hat{q}_k - \frac{1}{2}\hat{t}_g)(\nu_{i,1})_2 = R(\hat{q}_k - \frac{1}{2}\hat{t}_g)(h) = 0$. Ici aussi tous les y_i sont nuls.

CONCLUSION : Pour les TYPES n_i , tous les cup-produits $\alpha_k \cup \alpha_j$ sont nuls. \square

8.2. Les cup-produits, pour $p > 2$, $\cup : H^1(M, \mathbb{Z}_p) \otimes H^2(M, \mathbb{Z}_p) \rightarrow H^3(M, \mathbb{Z}_p)$.
Il suffit de considérer les TYPES o_1 et n_2 , car dans le cas non orientable, $H^3(M, A)$ à coefficients dans un anneau A vaut $A/2A$. Il est nul si $A = \mathbb{Z}_p$ avec $p > 2$.

On rappelle que si f est un 1-cocycle et g un 2-cocycle, et s un 3-simplexe de faces $s_0 = (v_1, v_2, v_3)$, $s_1 = (v_0, v_2, v_3)$, $s_2 = (v_0, v_1, v_3)$ et $s_3 = (v_0, v_1, v_2)$ alors $f \cup g(s) = f(v_0, v_1)g(s_0)$, et on trouve (v_0, v_1) en prenant la dernière arête de s_2 ou s_3 , i.e. $(v_0, v_1) = (s_2)_2 = (s_3)_2$.

Mais aussi, si g est un 2-cocycle, f un 1-cocycle et $s = (s_0, s_1, s_2, s_3)$ un 3-simplexe de faces $s_0 = (v_1, v_2, v_3)$, $s_2 = (v_0, v_2, v_3)$ et $s_3 = (v_0, v_1, v_2)$, où les v_i sont les sommets, alors $g \cup f(s) = g(s_3)f(v_2, v_3)$. On trouve (v_2, v_3) en prenant la première arête de s_1 ou de s_0 , i.e. $(v_2, v_3) = (s_1)_0 = (s_0)_0$.

Dans ces dimensions de cocycles, on a $f \cup g = (-1)^{1 \times 2} g \cup f = g \cup f$.

Cette sous-section prouve le théorème 10.

Preuve. Calcul de $\theta_i \cup \varphi_j$

Ces cup-produits interviennent dans les trois Cas.

TYPE o_1 , $\theta_i = [\hat{t}_i]$, $1 \leq i \leq 2g$ et $\varphi_j = [\hat{v}_j]$, $1 \leq j \leq 2g$.

Comme pour $p = 2$, on trouve $R(\hat{t}_i) \cup R(\hat{v}_j) = 0$ sauf

- si j est impair, $R(\hat{t}_{j+1}) \cup R(\hat{v}_j) = N'_{j,2}$
- si j est pair $R(\hat{t}_{j-1}) \cup R(\hat{v}_j) = N_{j,2}$.

Pour $p > 2$, on a

- pour j impair, $T^t(N'_{j,2}) = -\epsilon$ d'où $\theta_{j+1} \cup \varphi_j = -\gamma$
- pour j pair, $T^t(N'_{j-1,2}) = \epsilon$ d'où $\theta_{j-1} \cup \varphi_j = \gamma$.

CONCLUSION : Dans les trois Cas, pour le TYPE o_1 , on a

- pour j impair $\theta_{j+1} \cup \varphi_j = -\gamma$
- pour j pair $\theta_{j-1} \cup \varphi_j = \gamma$.

TYPE n_2 .

On a $\theta_i = [\hat{t}_i - \hat{t}_1]$, $i > 1$, et $\varphi_j = [\hat{v}_j]$, $j > 1$. Pour le TYPE n_2 , tous les ε_j sont égaux à -1 . Le relevé de θ_i n'est plus le même que pour $p = 2$, mais on a encore $R(\hat{t}_i - \hat{t}_1) \cup R(\hat{v}_j) = 0$ sauf si $i = j$. De plus on a $T^t(N'_{j,2}) = \epsilon$, d'où la conclusion :

CONCLUSION : Dans les trois Cas, pour le TYPE n_2 , on a $\theta_j \cup \varphi_j = \gamma$, et 0 sinon.

Calcul de $\theta_i \cup \beta$, $\alpha \cup \beta$, $\alpha \cup \varphi_j$

Ces cup-produits n'interviennent que pour le TYPE o_1 dans le Cas 1.

La preuve est exactement la même que pour $p = 2$, d'où la conclusion :

CONCLUSION : On a toujours $\theta_i \cup \beta = 0$, $\alpha \cup \beta = \gamma$, $\alpha \cup \varphi_j = 0$.

Calcul de $\alpha_i \cup \beta_k$

Ces cup-produits n'interviennent que dans le Cas 3. Les calculs suivants ne dépendent pas des TYPES.

Comme pour $p = 2$, le seul 3-simplexe s tel que $R(\hat{\mu}_k)(s_0) = 1$ est $s = M_{k,1}^\pm$. On a $s_3 = P_{k,1}^\pm$ et $(P_{k,1}^\pm)_2 = C_k^\pm$. Dans le relevé de α_i apparaît seulement (via Z_k) C_k^+ , affecté du coefficient $-v_k$, si $i = k$.

Du fait que $a_k u_k - b_k v_k = 1$ et que p divise a_k , on $-v_k = b_k^{-1}$ dans \mathbb{Z}_p . On vérifie que $T^t(M_{k,1}^\pm) = \zeta_k$ et on a $\gamma = [\hat{\zeta}_k]$.

CONCLUSION : Dans le Cas 3, pour les TYPES o_1 et n_2 , $\alpha_i \cup \beta_k = 0$ sauf si $i = k$ et dans cette situation on a $\alpha_k \cup \beta_k = b_k^{-1} \gamma$.

Calcul de $\alpha_k \cup \varphi_j$ Ces cup-produits n'interviennent que dans le Cas 3.

TYPE o_1 , $\alpha_k = [\hat{q}_k - \hat{q}_0]$, $1 \leq k \leq m$ et $\varphi_j = [\hat{\nu}_j]$, $1 \leq j \leq 2g$.

La preuve est exactement la même que pour $p = 2$, d'où la conclusion :

CONCLUSION : Dans le Cas 3, pour le TYPE o_1 , tous les cup-produits $\alpha_k \cup \varphi_j$ sont nuls.

TYPE n_2 , $\alpha_k = [\hat{q}_k - \frac{1}{2}\hat{t}_g]$, $0 \leq k \leq m$ et $\varphi_j = [\hat{\nu}_j]$, $1 < j \leq g$.

Comme pour $p = 2$, les seuls 3-simplexes s tels que $R(\hat{\nu}_j)s_0 \neq 0$ sont $s = N_{j,1}$ et $s = N'_{j,1}$ car on a $(N'_{j,1})_0 = (N_{j,1})_0 = \nu_{j,1}$. On a $((N_{j,1})_3)_2 = (F_{2j-2})_2 = S_{2j-2}^-$ et $((N'_{j,1})_3)_2 = (F_{2j-1})_2 = S_{2j-1}^+$.

- Le relevé de α_k est maintenant

$R(\hat{q}_k - \frac{1}{2}\hat{t}_g) = Z_k - \sum_{\ell=0}^k (\hat{e}_{2g+\ell} + \hat{S}_{2g+\ell}^\pm) - \frac{1}{2}(\hat{e}_{2g-1} + \hat{S}_{2g-1}^\pm)$. Par conséquent, on obtient

$R(\hat{q}_k - \frac{1}{2}\hat{t}_g)((N_{j,1})_3)_2 = 0$, $R(\hat{q}_k - \frac{1}{2}\hat{t}_g)((N'_{j,1})_3)_2 = -\frac{1}{2}$ lorsque $j = g$ d'où $R(\hat{q}_k - \frac{1}{2}\hat{t}_g) \cup R(\hat{\nu}_j) = -\frac{1}{2}T^t(N'_{g,1})$. Comme $T^t(N'_{g,1}) = \epsilon$, on a la conclusion :

CONCLUSION : Dans le Cas 3, pour le TYPE n_2 , pour tous indices k , on a $\alpha_k \cup \varphi_g = -\frac{1}{2}\gamma$.

□

Remarque 24. Les quelques différences de signe avec les résultats obtenus précédemment (voir par exemple [5]) s'expliquent par le fait que les générateurs notés α sont de signe opposé. De plus les β_k qui apparaissent naturellement ici sont des multiples des générateurs notés b_k dans [5], ce qui modifie certains produits par ces facteurs. Pour n_2 nous avons choisi (pour éviter de distinguer inutilement les cas $n = 0$ et $n > 0$) des générateurs du $H^1(M, \mathbb{Z}_p)$ différents, mais ces perturbations sont tuées dans les produits.

9. FIGURES

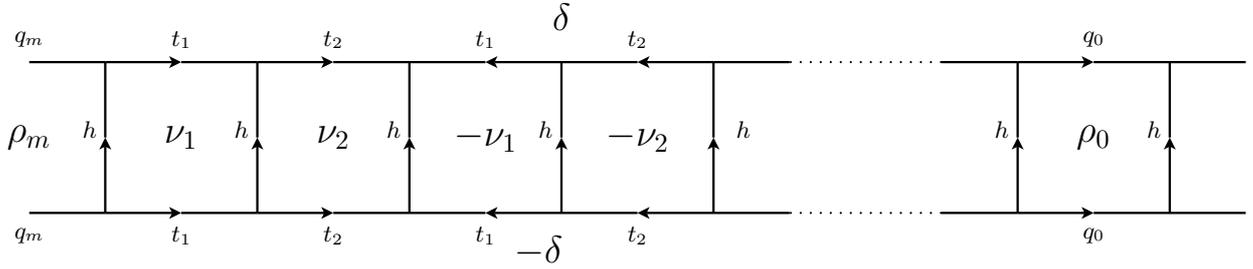
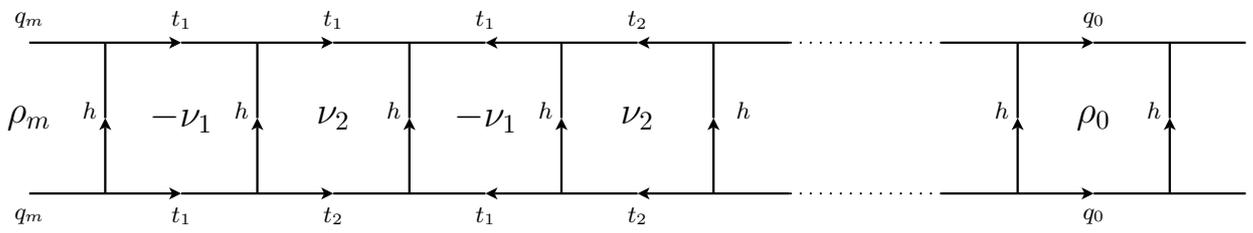
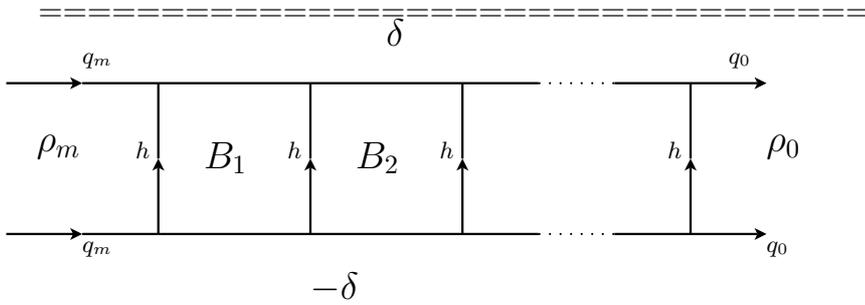


FIGURE 1. Décomposition cellulaire, TYPE o_1



$-\delta$

FIGURE 2. Décomposition cellulaire, TYPE o_2



$-\delta$

FIGURE 3. Décomposition cellulaire, TYPE n_i

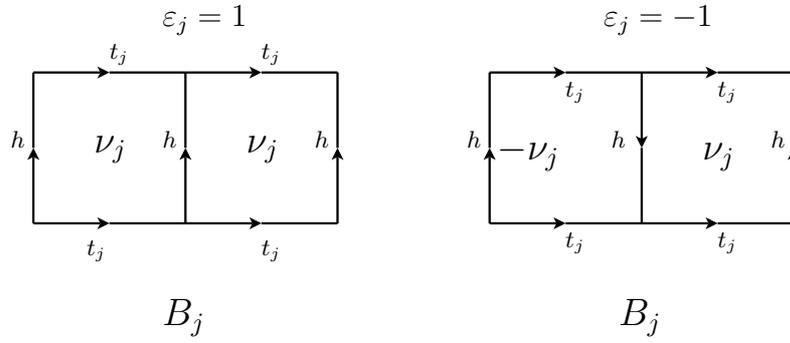


FIGURE 4. Description de B_j pour les TYPES n_1, n_2

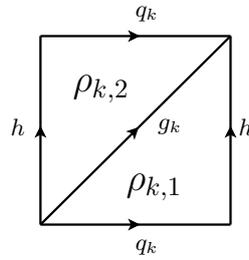


FIGURE 5. Décomposition simpliciale de ρ_k

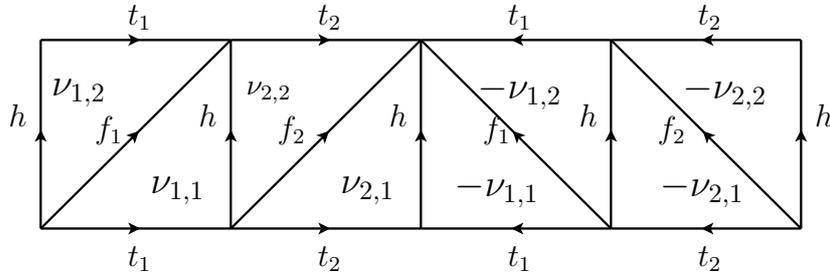


FIGURE 6. Décomposition simpliciale de ν_1 , TYPE o_1

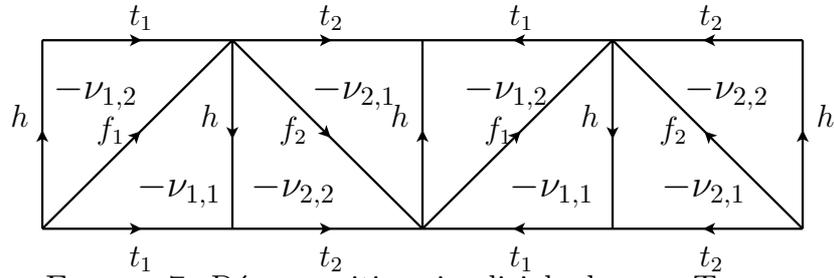


FIGURE 7. Décomposition simpliciale de $-\nu_1$, TYPE o_2

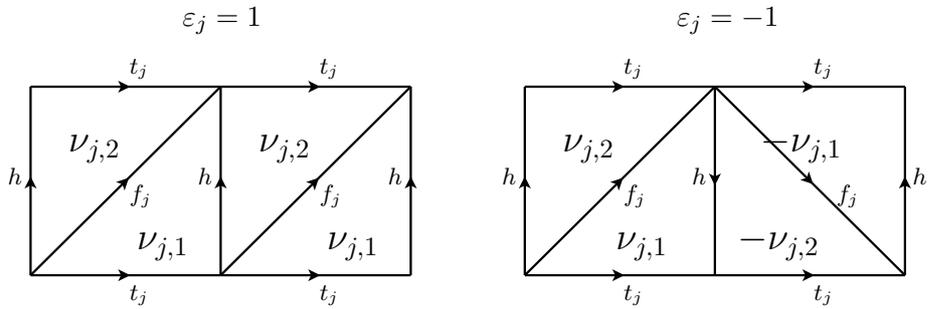


FIGURE 8. Décomposition simpliciale de $-\nu_j$ quand $\varepsilon_j = 1$ et quand $\varepsilon_j = -1$

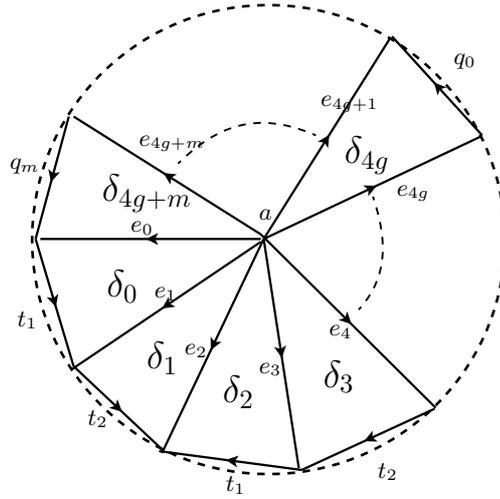


FIGURE 9. Décomposition simpliciale de δ , TYPE o_i

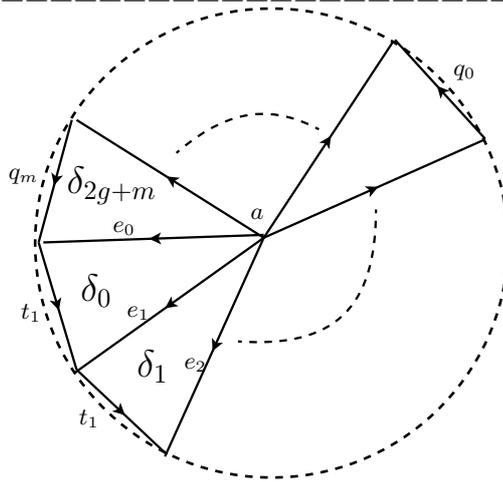


FIGURE 10. Décomposition simpliciale de δ , TYPE n_i

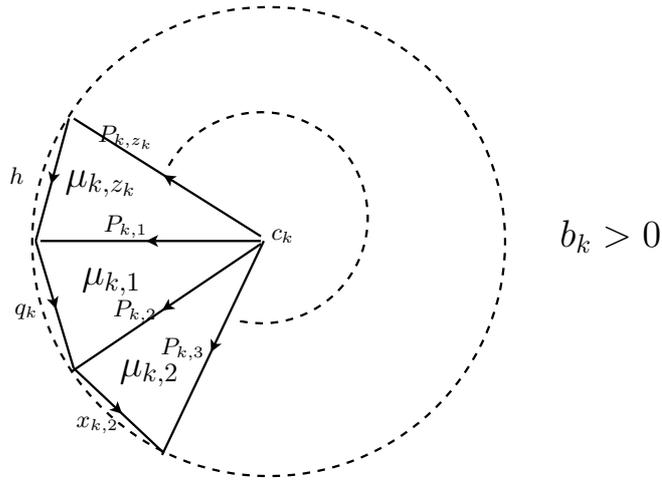


FIGURE 11. Décomposition simpliciale de μ_k pour $b_k > 0$

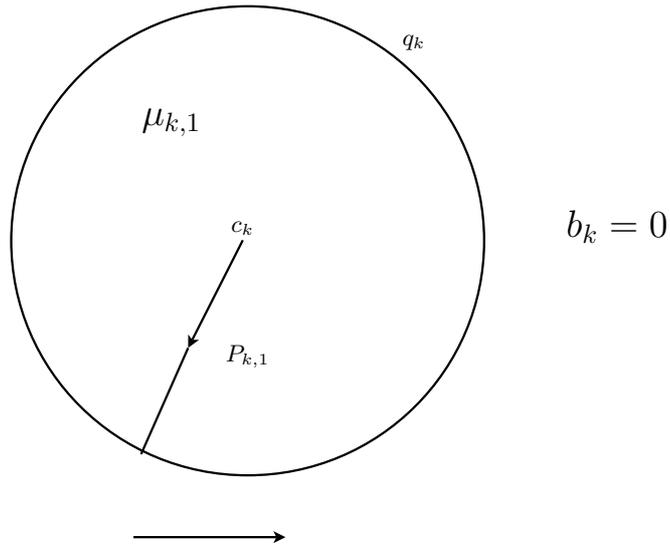


FIGURE 12. Décomposition simpliciale de μ_k pour $b_k = 0$

Les figures suivantes sont des projections des décompositions simpliciales de chacun des 3-simplexes. Les sommets sont des points carrés. Ils représentent la projection d'une arête. Ci-dessous, nous donnons en exemple le codage des points carrés sur le 3-simplexe D_0^+ .

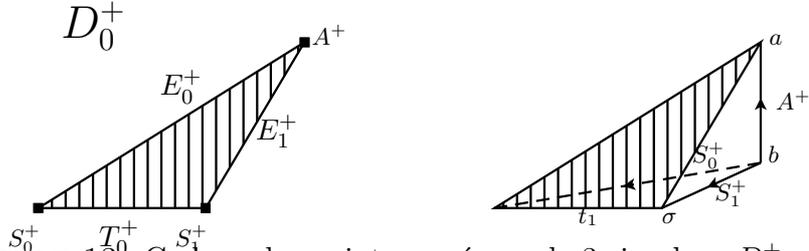


FIGURE 13. Codage des points carrés sur le 3-simplexe D_0^+

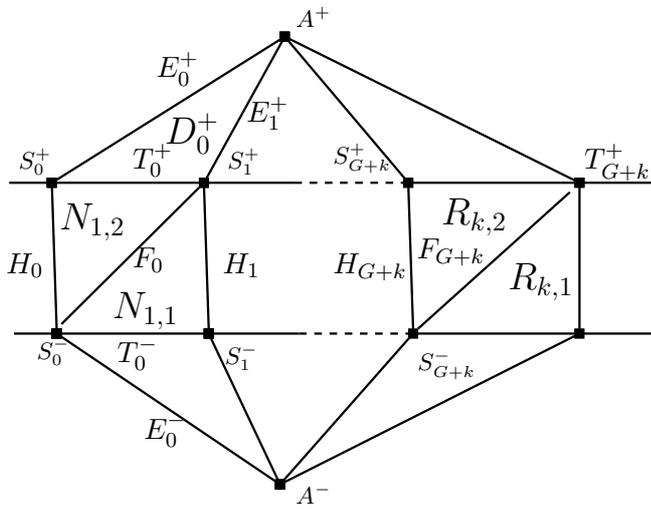


FIGURE 14. Parties communes des décompositions simpliciales de ϵ pour tous les TYPES

Les quatre figures suivantes sont les détails de la partie centrale de la figure ci-dessus, pour le début de la longue relation.

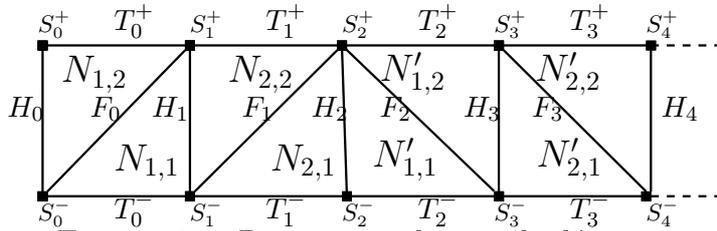


FIGURE 15. Partie centrale pour la décomposition simpliciale de ϵ pour le TYPE o_1

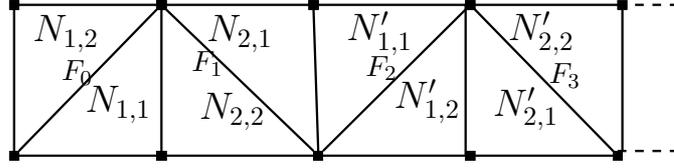


FIGURE 16. Partie centrale pour la décomposition simpliciale de ϵ pour le TYPE o_2

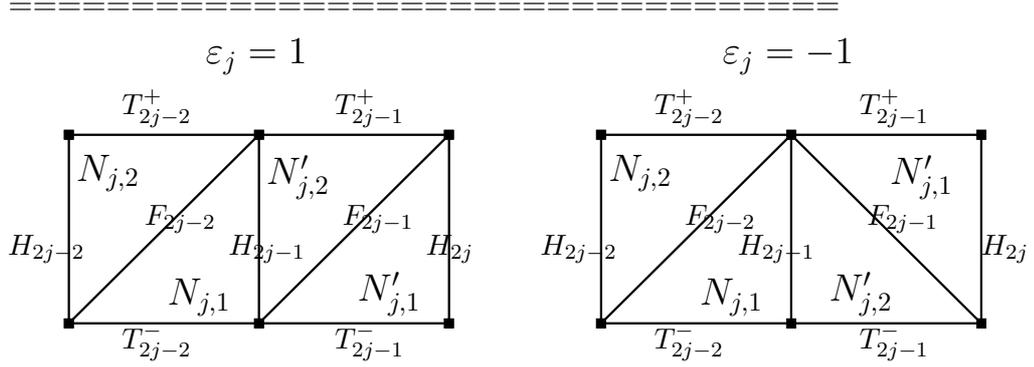


FIGURE 17. Partie centrale pour la décomposition simpliciale de ϵ pour les TYPES n_i

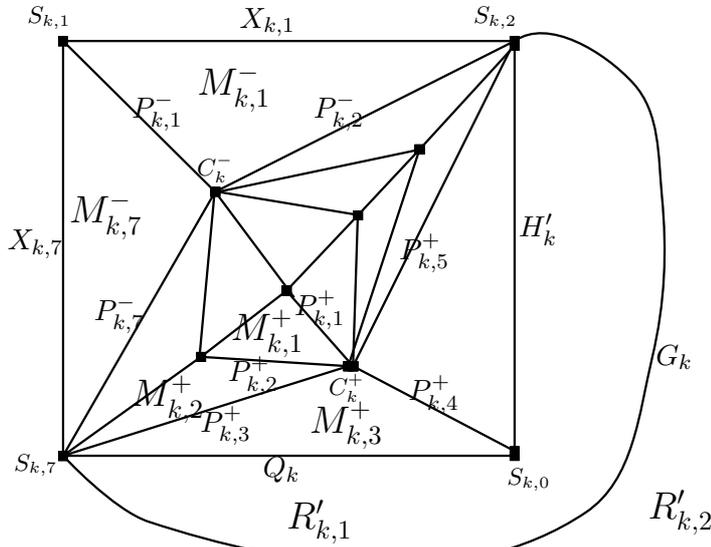


FIGURE 18. Décomposition simpliciale de ζ_k pour $b_k > 0$ et $a_k = 5, b_k = 2, w_{k,2}(q_k, h) = q_k^3 h q_k^2 h = x_{k,1} \cdots x_{k,7}$

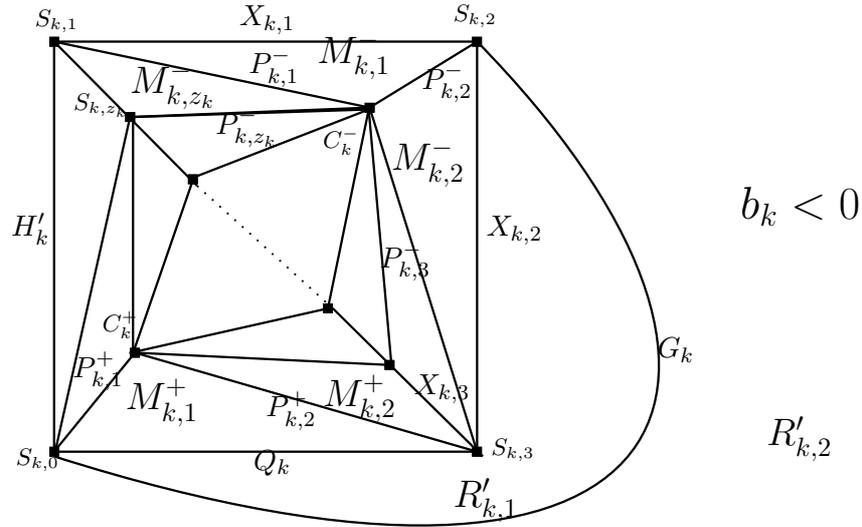


FIGURE 19. Décomposition simpliciale de ζ_k pour $b_k < 0$

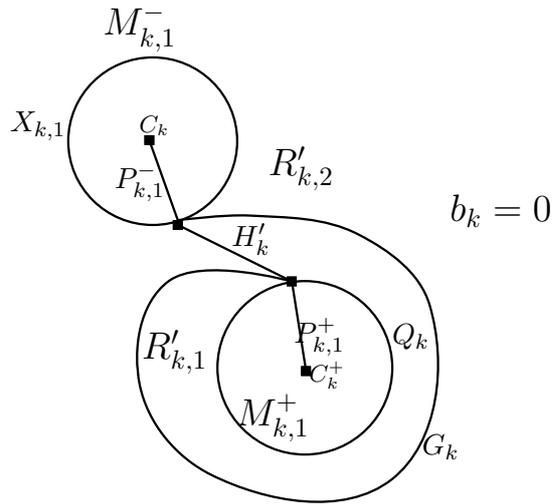


FIGURE 20. Décomposition simpliciale de ζ_k pour $b_k = 0$

REFERENCES

- [1] K. Aaslepp, M. Drawe, C. Hayat-Legrand, C. A. Sczesny, H. Zieschang: *On the cohomology of Seifert and graph manifolds*, *Topology and its Applications* **127** (2003), 3–32.
- [2] A. Bauval, C. Hayat: *L'anneau de cohomologie des variétés de Seifert*, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* **351** (2013), 81–85.
- [3] J. Bryden, C. Hayat, H. Zieschang, P. Zvengrowski: *L'anneau de cohomologie d'une variété de Seifert*, *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I* **324** (1997), 323–326.
- [4] J. Bryden, C. Hayat, H. Zieschang, P. Zvengrowski: *The cohomology ring of a class of Seifert manifolds*, *Topology and its Applications* **105** (2000), 123–156.
- [5] J. Bryden, P. Zvengrowski: *The cohomology ring of the orientable Seifert manifolds.II*, *Topology and its Applications* **127**, no. 1-2 (2003), 123–156.
- [6] D. L. Gonçalves, C. Hayat, P. Zvengrowski: *The Borsuk-Ulam theorem for manifolds, with applications to dimensions two and three*, *Proceedings of the International Conference Bratislava Topology Symposium (2009) "Group Actions and Homogeneous Spaces"* editors J. Korbaš, M. Morimoto, K. Pawałowski.
- [7] F. González-Acuña, A. Ramirez: *A composition formula in the rank two free group*, *Pro. Amer. Math.* **127**, (1999), 2779–2782.
- [8] A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2002.
- [9] C. Hayat, S. Matveev, H. Zieschang: *Primitive elements in the free product of two finite cyclic groups*, *Experiment. Math* **10**, no 4, (2001), 497–508.
- [10] M. Lustig, E-M. Thiele, H. Zieschang: *Computer calculation of the degree of maps into Poincaré homology sphere*, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **65**, (1995), 277–281.
- [11] P. Orlik: *Seifert Manifolds*, *Lecture Notes in Math.* **291**, Springer-Verlag, New York, 1972.
- [12] R.P. Osborne, H. Zieschang: *Primitives in the freegroup on two generators*, *Invent. Math.* **63**, no 4, (1981), 17–24.
- [13] H. Seifert: *Topologie Dreidimensionaler Gefaserter Räume*, (German) *Acta Math.* **60** no. 1 (1932), 147–238; english translation appears as “Topology of 3-dimensional fibered spaces” in the book “A textbook of topology” by H. Seifert and W. Threlfall *Academic Press*, 1980.
- [14] H. Seifert and W. Threlfall: *A textbook of topology*, Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1980.
- [15] S. Tomoda, P. Zvengrowski: *Remarks on the cohomology of finite fundamental groups of 3-manifolds*, *The Zieschang Gedenkschrift*, 519–556, *Geom. Topol. Monogr.*, 14, Geom. Topol. Publ., Coventry, 2008.

Anne Bauval, e-mail: bauval@math.univ-toulouse.fr

Claude Hayat, e-mail: hayat@math.univ-toulouse.fr

Institut de Mathématiques de Toulouse

Equipe Emile Picard, UMR 5580, Université Toulouse III

118 Route de Narbonne, 31400 Toulouse - France