



**HAL**  
open science

# Estimations maximales pour l'opérateur de Fokker-Planck avec champ magnétique

Zeinab Karaki

► **To cite this version:**

Zeinab Karaki. Estimations maximales pour l'opérateur de Fokker-Planck avec champ magnétique. 2019. hal-01975164v1

**HAL Id: hal-01975164**

**<https://hal.science/hal-01975164v1>**

Preprint submitted on 9 Jan 2019 (v1), last revised 20 Sep 2019 (v2)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Estimations maximales pour l'opérateur de Fokker-Planck avec champ magnétique

Zeinab Karaki  
Laboratoire de Mathématiques Jean Leray  
Université de Nantes.

9 janvier 2019

## Résumé

On considère l'opérateur de Fokker-Planck avec un champ magnétique extérieur fort. On montre une estimation de type maximale sur cet opérateur en utilisant une approche nilpotente pour des opérateurs polynômes de champs de vecteurs et en incluant la notion de la représentation sur une algèbre de Lie. Cette estimation permet de donner une meilleure caractérisation du domaine de la fermeture de l'opérateur considéré.

## 1 Introduction

### 1.1 Rappels sur l'équation de Fokker-Planck

L'équation de Fokker-Planck a été introduite par Fokker [3] et Planck [12], pour décrire le mouvement brownien des particules. Dans ces dernières années, les estimations hypoelliptiques globales ont connu une renaissance en liaison avec des questions provenant de la théorie cinétique des gaz. Dans cette direction de nombreux auteurs ont démontré des estimations maximales pour en déduire la compacité de l'opérateur de Fokker-Planck et avoir des estimations sur la résolvante permettant d'aborder la question du retour à l'équilibre. F. Hérau et F. Nier dans l'article [9] ont mis en évidence les liens entre l'opérateur de Fokker-Planck avec un potentiel de confinement et l'opérateur de Laplacien de Witten associé. Puis, dans le livre de B. Helffer et F. Nier [4], ces travaux ont été complétés et expliqués de manière générale, et nous renvoyons plus spécifiquement au chapitre 9 pour une démonstration pédagogique de l'estimation maximale.

Dans cet article, on va poursuivre l'étude du cas modèle de l'opérateur de Fokker-Planck avec un champ magnétique extérieur  $B_e$ , commencée dans [10] et établir une estimation de type maximale sur ce modèle, donnant une caractérisation du domaine de son extension fermée.

## 1.2 énoncé du résultat

Pour  $d = 2$  ou  $3$ , on se place sur le tore  $\mathbb{T}^d := \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$  et on considère  $K$  l'opérateur de Fokker-Planck avec un champ magnétique extérieur  $B_e : \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d(d-1)/2}$  tel que

$$K = v \cdot \nabla_x - (v \wedge B_e) \cdot \nabla_v - \Delta_v + v^2/4 - d/2,$$

où  $v \in \mathbb{R}^d$  représente la vitesse,  $x \in \mathbb{T}^d$  représente la variable d'espace et  $t > 0$  est le temps. On souligne que dans la définition précédente de notre opérateur, on a utilisé la notation  $(v \wedge B_e) \cdot \nabla_v$  qui s'écrit comme suivant

$$(v \wedge B_e) \cdot \nabla_v = \begin{cases} b(x)(v_1 \partial_{v_2} - v_2 \partial_{v_1}) & \text{si } d = 2 \\ b_1(x)(v_2 \partial_{v_3} - v_3 \partial_{v_2}) + b_2(x)(v_3 \partial_{v_1} - v_1 \partial_{v_3}) \\ + b_3(x)(v_1 \partial_{v_2} - v_2 \partial_{v_1}) & \text{si } d = 3. \end{cases}$$

On peut identifier les distributions  $T$  sur  $\mathbb{T}_x^d \times \mathbb{R}_v^d$  avec les distributions  $\tilde{T}$   $\Gamma$ -périodiques sur  $\mathbb{R}_x^d \times \mathbb{R}_v^d$  où  $\Gamma = \mathbb{Z}^d \times \{0\} \subset \mathbb{R}_x^d \times \mathbb{R}_v^d$ . Ce qui est noté plus haut  $\partial_x T$  est en fait la distribution sur  $\mathbb{T}^d$  telle que

$$\widetilde{\partial_x T} = \partial_x \tilde{T}.$$

Dans cette identification la norme de  $u$  dans  $L^2(\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d)$  est la norme de  $\tilde{u}$  sur un domaine fondamental, par exemple  $(-\pi, \pi)^d \times \mathbb{R}^d$ . De même, dans cette identification  $C^\infty(\mathbb{T}^d)$  s'identifie avec l'espace des fonctions  $C^\infty$   $\Gamma$ -périodiques. Quand cela ne prêterait pas à confusion nous omettrons par la suite les tildes.

L'opérateur  $K$  est considéré comme un opérateur non-borné sur l'espace de Hilbert  $H = L^2(\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d)$ .

On note

- $\overline{K}$  (ou bien  $\overline{K}_{\min}$ ) l'extension minimale de  $K$  où  $D(\overline{K})$  est la fermeture de  $D(K)$  pour la norme du graphe.
- $\overline{K}_{\max}$  l'extension maximale de  $K$  dont le domaine  $D(\overline{K}_{\max})$  est donné par

$$D(\overline{K}_{\max}) = \{u \in L^2(\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d) / Ku \in L^2(\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d)\}.$$

à partir de maintenant, on note  $\mathbf{K}$  l'opérateur  $\overline{K}$ .

D'abord, on a montré dans [10] l'existence d'un semi-groupe fortement continu associé à l'opérateur  $\mathbf{K}$ .

**Proposition 1.1.** *Si  $B_e \in C^\infty(\mathbb{T}^d)$ , alors  $\mathbf{K}$  est maximal accréitif.*

Ceci implique que le domaine de l'opérateur  $\mathbf{K}$  a la propriété suivante

$$D(\mathbf{K}) = D(\overline{K}_{\max}) = \{u \in L^2(\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d) / Ku \in L^2(\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d)\}. \quad (1)$$

Il est aussi démontré dans [10] que :

**Théorème 1.2.** *Supposons que  $B_e$  est dans l'espace  $W^{2,\infty}(\mathbb{T}^d)$ , défini par*

$$W^{2,\infty}(\mathbb{T}^d) := \{u \in L^\infty(\mathbb{T}^d), \forall \alpha \in \mathbb{N}^d, |\alpha| \leq 2, D^\alpha u \in L^\infty(\mathbb{T}^d)\},$$

*et muni de sa norme naturelle d'espace de Banach.*

*Si  $f_0 \in D(\mathbf{K})$ , alors le problème*

$$\begin{cases} \partial_t f + \mathbf{K}f = 0 \\ f(0, x, v) = f_0(x, v), \end{cases} \quad (2)$$

*admet une unique solution  $f \in C^1([0, +\infty[, L^2(dx dv)) \cap C([0, +\infty[, D(\mathbf{K}))$ .*

On a enfin montré dans [10] la convergence exponentielle vers l'équilibre  $\mu^{1/2}$  en norme  $L^2(dx dv)$ , avec  $\mu$  est donnée par

$$\mu(v) := \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{-v^2/2},$$

**Théorème 1.3.** *Si  $B_e \in W^{2,\infty}(\mathbb{T}^d)$ , alors il existe  $\kappa > 0$  et  $c > 0$  telles que, pour tout  $f_0 \in L^2(dx dv)$  orthogonale à  $\mu^{1/2}$  on ait*

$$\forall t \geq 0, \quad \|e^{t\mathbf{K}} f_0\|_{L^2(dx dv)} \leq c e^{-\kappa t} \|f_0\|_{L^2(dx dv)}.$$

Dans ce travail, on s'intéresse à préciser le domaine de l'opérateur  $\mathbf{K}$  introduit en (1). Pour cela on va obtenir des estimations maximales pour  $\mathbf{K}$ , en utilisant une approche nilpotente, c'est à dire des techniques développées initialement pour l'étude de l'hypoellipticité des opérateurs invariants sur des groupes nilpotents. Avant d'énoncer notre résultat principal, on va rappeler quelques notions utiles dans la suite.

**Définition 1.4.** On dit que  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d)$  si  $\tilde{\varphi}$  est  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ ,  $\Gamma$ -périodique et si, pour tous  $\beta, \gamma$  et  $\delta \in \mathbb{N}^d$ ,  $v^\gamma \partial_x^\beta \partial_v^\delta \tilde{\varphi}$  est bornée sur  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ .

L'espace vectoriel  $\mathcal{S}(\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d)$  est une variante de l'espace de Schwartz. On note que l'espace  $\mathcal{S}(\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d)$  est dense dans l'espace  $L^q(\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d)$  pour tout  $q \in [1, \infty[$ .

**Définition 1.5.** On note  $B^2(\mathbb{R}^d)$  (ou  $B_v^2$  pour indiquer le nom des variables)

$$B^2(\mathbb{R}^d) := \{u \in L^2(\mathbb{R}^d), \forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^{2d}, |\alpha| + |\beta| \leq 2, v^\alpha \partial_v^\beta u \in L^2(\mathbb{R}^d)\},$$

l'espace de Hilbert muni de sa norme hilbertienne naturelle

$$\|u\|_{B^2} := \sqrt{\sum_{|\alpha|+|\beta|\leq 2} \|v^\alpha \partial_v^\beta u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2}.$$

**Définition 1.6.** Soit  $u$  une fonction de  $\mathbb{T}^d$  à valeurs dans  $\mathbb{K}$  (où  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ). On dit que  $u$  est lipschitzienne s'il existe  $k \geq 0$  tel que  $u$  soit  $k$ -lipschitzienne, i.e si  $u$  vérifie

$$\forall(x, y) \in \mathbb{T}^{2d}, \quad |u(x) - u(y)| \leq k d(x, y),$$

où  $d$  est la distance sur le tore  $\mathbb{T}^d$  définie par :

$$d(x, y) = \inf_{\alpha \in \mathbb{Z}^d} |x - y + \alpha|.$$

On note  $\text{Lipsch}(\mathbb{T}^d)$ , l'espace des fonctions Lipschitzienne de  $\mathbb{R}^d$  à valeurs dans  $\mathbb{K}$ . On munit l'espace  $\text{Lipsch}(\mathbb{T}^d)$  de la norme suivante

$$\text{Lipsch}(\mathbb{T}^d) \ni u \mapsto \|u\|_{\text{Lipsch}(\mathbb{T}^d)} = \|u\|_{L^\infty(\mathbb{T}^d)} + \sup_{x, y \in \mathbb{T}^d, x \neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{d(x, y)}.$$

On note  $\tilde{B}^2(\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d)$ , le sous espace  $L_x^2 \hat{\otimes} B_v^2$  (dans  $L^2(\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d)$  identifié à  $L_x^2 \hat{\otimes} L_v^2$ ) muni de sa norme hilbertienne naturelle :

$$\tilde{B}^2(\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d) \ni u \longrightarrow \|u\|_{\tilde{B}^2} = \sqrt{\sum_{|\alpha|+|\beta|\leq 2} \left\| \|v^\alpha \partial_v^\beta u\|_{L_v^2} \right\|_{L_x^2}^2}.$$

Notons que l'espace  $L_x^2(\mathbb{T}^d)$  peut s'identifier à l'espace suivant :

$$L_{\text{per}}^2(\mathbb{R}^d) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^d) / u \text{ est } \mathbb{Z}^d - \text{périodique}\}.$$

Dans cette identification, l'espace  $\tilde{B}^2(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$  s'identifie à l'espace  $L_{\text{per}}^2(\mathbb{R}^d) \hat{\otimes} B_v^2$ .

On peut maintenant énoncer le théorème principal de cet article :

**Théorème 1.7.** *Soit  $d = 2$  ou  $3$ . On suppose que  $B_e \in \text{Lipsch}(\mathbb{T}^d)$ . Alors pour tout  $C_1 > 0$ , il existe  $C > 0$  tel que  $\forall B_e$  avec  $\|B_e\|_{\text{Lipsch}(\mathbb{T}^d)} \leq C_1$ , et  $\forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d)$ , l'opérateur  $K$  vérifie l'estimation maximale suivante :*

$$\|(v \cdot \nabla_x - (v \wedge B_e) \cdot \nabla_v)u\| + \|u\|_{\tilde{B}^2} \leq C(\|Ku\| + \|u\|). \quad (3)$$

Compte-tenu de la densité de l'espace de Schwartz dans le domaine de  $\mathbf{K}$ , nous obtenons la caractérisation du domaine de  $\mathbf{K}$  :

**Corollaire 1.8.**

$$D(\mathbf{K}) := \{u \in \tilde{B}^2(\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d) / (v \cdot \nabla_x - (v \wedge B_e) \cdot \nabla_v)u \in L^2(\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d)\}.$$

**Organisation de l'article** Le plan de cet article est le suivant. Dans la section suivante, on fera des rappels sur la notion d'hypoellipticité maximale, et plus spécifiquement, on donnera quelques résultats d'hypoellipticité maximale (plus exactement les inégalités maximales qui l'impliquent) pour des opérateurs polynômes de champs de vecteurs dans l'approche nilpotente. Ensuite, dans les deux dernières sections, on montrera comment ces techniques permettent la démonstration du théorème principal 1.7, en distinguant entre le cas  $d = 2$  et le cas  $d = 3$  respectivement.

**Remerciement.** L'auteure est reconnaissante à Bernard Helffer pour son aide importante et ses précieux conseils tout au long de la rédaction de cet article. L'auteure remercie également le Centre Henri Lebesgue, l'ANR-11-LABX-0020-01 et la Faculté des sciences (Section I) de l'Université Libanaise pour leurs soutiens.

## 2 Rappels sur l'hypoellipticité maximale dans l'approche nilpotente

Cette partie a pour but de faire quelques rappels sur les algèbres de Lie nilpotentes graduées et sur les résultats d'hypoellipticité pour des opérateurs polynômes de champs de vecteurs.

### 2.1 Hypoellipticité pour des opérateurs polynômes de champs de vecteurs

On commence par rappeler la définition de base de l'hypoellipticité introduite par L. Schwartz.

**Définition 2.1.** *Un opérateur différentiel avec des coefficients  $C^\infty$  dans un ouvert  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  est hypoelliptique dans  $\Omega$ , si, pour tout  $\omega \subset \Omega$  et pour tout  $u \in D'(\Omega)$ , tel que  $Pu \in C^\infty(\omega)$ , alors  $u \in C^\infty(\omega)$ .*

On s'intéresse maintenant aux opérateurs polynômes de champs de vecteurs. On considère des champs de vecteurs  $X_1, \dots, X_p$  et  $Y_1, \dots, Y_q$  réels,  $C^\infty$ , sur un ouvert  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ .

Soit  $P(\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_{p+q})$  un polynôme non commutatif de degré  $m$  à  $p+q$  variables, à coefficients  $C^\infty$  sur  $\Omega$ , et soit  $\mathcal{P}$  l'opérateur différentiel :

$$\mathcal{P} = P(z, Z_1, \dots, Z_{p+q}) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(z) Z^\alpha, \quad \forall \alpha \in \{1, \dots, p+q\}^k, \quad (4)$$

où les champs de vecteurs  $Z_\ell \forall \ell \in \{1, \dots, p+q\}$  sont définis par

$$\begin{aligned} Z_\ell &= X_\ell, \quad \forall \ell = 1, \dots, p \\ Z_\ell &= Y_{\ell-p}, \quad \forall \ell = p+1, \dots, p+q, \end{aligned}$$

avec, pour  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \{1, \dots, p+q\}^k$ ,

$$|\alpha| = \sum_{j=1}^k d(\alpha_j) \text{ avec } d(\alpha_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha_j \in \{1, \dots, p\} \\ 2 & \text{si } \alpha_j \in \{p+1, \dots, p+q\}. \end{cases}$$

On suppose de plus que les champs  $Z_j$  avec  $j \in \{1, \dots, p+q\}$  vérifient la condition de Hörmander suivante :

**(Ho)** Il existe un entier  $r$  tel que les crochets des champs  $Z_j$  de longueur inférieure ou égale à  $r$  engendrent, en chaque point  $z$  de  $\Omega$ ,  $T_z\Omega$  tout entier.

Autrement dit, si  $I = (i_1, \dots, i_k)$  et si on note :

$$Z_I = [Z_{i_k}, [Z_{i_{k-1}}, \dots, [Z_{i_2}, Z_{i_1}] \dots]], \quad (5)$$

et si on désigne par  $Z_I(z, \zeta)$  le symbole de  $Z_I$  en  $(z, \zeta)$ , on peut réécrire la condition **(Ho)** sous la forme suivante

$$\begin{cases} \text{Le système des } Z_I \text{ avec } |I| \leq r \text{ est elliptique en } z_0 \text{ c'est-à-dire} \\ \sum_{|I| \leq r} |Z_I(z, \zeta)| \neq 0, \quad \forall \zeta \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}. \end{cases}$$

Ceci conduit à une version microlocale de la condition de Hörmander (voir [2]).

Lorsque  $q = 0$ , l'opérateur  $\mathcal{P}$  est appelé opérateur différentiel de type 1. Ainsi l'opérateur de Hörmander  $\sum_{j=1}^p X_j^2$  (cas  $q = 0$ ) est de type 1. L'opérateur également étudié par Hörmander  $\sum_{j=1}^p X_j^2 + Y_1$  (cas  $q = 1$ ) est appelé de type 2. On pose la définition suivante.

**Définition 2.2.** Soit  $m \in \mathbb{N}^*$  (avec de plus  $m$  pair si on est dans le cas de type 2). On dit que  $\mathcal{P}$  est hypoelliptique maximal en un point  $z$  de  $\Omega$ , s'il existe un voisinage  $\omega$  de  $z$ , et une constante  $C$  strictement positive telle que l'on ait :

$$\|u\|_{\mathcal{H}^m(\omega)}^2 \leq C[\|\mathcal{P}u\|_{L^2(\omega)}^2 + \|u\|_{L^2(\omega)}^2], \quad \forall u \in C_0^\infty(\omega), \quad (6)$$

où on désigne par  $\|\cdot\|_{\mathcal{H}^m(\omega)}$  la norme dont le carré est défini par :

$$u \rightarrow \|u\|_{\mathcal{H}^m(\omega)}^2 = \sum_{|\alpha| \leq m} \|Z_{\alpha_1} \dots Z_{\alpha_k} u\|_{L^2(\omega)}^2, \quad \forall \alpha \in \{1, \dots, p\}^m.$$

Il a été démontré par Helffer-Nourrigat dans [5], que si la condition de Hörmander est vérifiée en  $z$ , alors l'hypoellipticité maximale en  $z$  implique que  $\mathcal{P}$  est hypoelliptique dans un voisinage de  $z$ , ce qui justifie la terminologie.

Il a aussi été démontré par Rothschild-Stein dans [15] que si l'opérateur  $\mathcal{P}$  avec la structure indiquée dans (4) est hypoelliptique alors l'opérateur  $\mathcal{P}$  est hypoelliptique maximal.

## 2.2 Algèbres de Lie nilpotentes et graduées

**Définition 2.3.** Une algèbre de Lie réelle est un espace vectoriel  $\mathcal{G}$  sur  $\mathbb{R}$  muni d'une application bilinéaire

$$\begin{aligned} \mathcal{G} \times \mathcal{G} &\rightarrow \mathcal{G} \\ (X, Y) &\mapsto [X, Y], \end{aligned}$$

qui vérifie les propriétés suivantes :

1.  $\forall X, Y \in \mathcal{G}$ ,  $[X, Y] = -[Y, X]$  (bilinéaire alternée),
2.  $\forall X, Y, Z \in \mathcal{G}$ ,  $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$ , (Identité de Jacobi).

**Définition 2.4.** Soit  $\mathcal{G}$  une algèbre de Lie sur  $\mathbb{R}$  et considérons la suite décroissante d'idéaux de  $\mathcal{G}$  définie par

$$C^1(\mathcal{G}) := \mathcal{G} \text{ et } C^n(\mathcal{G}) = [\mathcal{G}, C^{n-1}(\mathcal{G})], \quad \forall n > 1,$$

telle que

$$C^n(\mathcal{G}) = \text{Vect}([X_n, [X_{n-1}, \dots, [X_2, X_1] \dots]]) \text{ avec } X_1, X_2, \dots, X_n \in \mathcal{G}.$$

On dit que  $\mathcal{G}$  est nilpotente, s'il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $C^{n_0}(\mathcal{G}) = 0$ .



Par récurrence, on peut vérifier que  $[C^r(\mathcal{G}), C^s(\mathcal{G})] \subset C^{r+s}(\mathcal{G}), \forall r, s \in \mathbb{N}$ .

**Définition 2.5.** On dit que  $\mathcal{G}$  est une algèbre de Lie nilpotente graduée de rang  $r$ , si elle admet une décomposition de la forme :

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &= \mathcal{G}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{G}_r, \\ [\mathcal{G}_i, \mathcal{G}_j] &\subset \mathcal{G}_{i+j} \quad \text{si } i+j \leq r \quad \text{et} \quad [\mathcal{G}_i, \mathcal{G}_j] = 0 \quad \text{si } i+j > r. \end{aligned}$$

**Définition 2.6.** Soit  $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{G}_r$ , une algèbre de Lie nilpotente graduée de rang  $r$ ,

1. On dit qu'elle est stratifiée de type 1 (ou simplement stratifiée), si elle est engendrée par  $\mathcal{G}_1$ .
2. On dit qu'elle est stratifiée de type 2, si elle est engendrée par  $\mathcal{G}_1 \oplus \mathcal{G}_2$ .

## 2.3 Théorie des représentations

Dans cette partie, on va expliquer très brièvement quelques résultats de la théorie de Kirillov dans le cas nilpotent (cf [11] pour plus de détails). Tout d'abord, on va commencer par quelques rappels sur la théorie des représentations d'un groupe nilpotent  $G$ .

### 2.3.1 Représentations sur un groupe $G$

Soit  $G$  un groupe de Lie, et  $V$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{C}$ . Une représentation complexe  $(\pi, V)$  du groupe  $G$  est la donnée d'une application

$$\begin{aligned} \pi : G \times V &\longrightarrow V \\ (g, v) &\mapsto \pi(g, v), \end{aligned}$$

telle que :

1.  $\pi(e, v) = v, \forall v \in V$ , où  $e$  est l'élément neutre de  $G$  pour la loi de multiplication.
2.  $\pi(g, \pi(h, v)) = \pi(gh, v), \forall h, g \in G, \forall v \in V$ .

L'espace  $V$  (ou  $V_\pi$  si on veut rappeler la référence à  $\pi$ ) est appelé espace de représentation de  $G$ . Si  $V$  est de dimension finie, sa dimension est notée  $d_\pi = \dim V$ . Dans le cas contraire, on pose  $d_\pi = +\infty$ .

Si de plus  $V$  est un espace de Hilbert pour le produit hermitien  $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ , la représentation  $(\pi, V)$  est dite unitaire si  $\pi$  vérifie la propriété suivante :

$$\langle \pi(g, v), \pi(g, w) \rangle_V = \langle v, w \rangle_V, \forall g \in G, \forall v, w \in V.$$

On utilisera aussi la notation  $\pi(g)$  où

$$\pi(g)v = \pi(g, v).$$

Ensuite, on introduit la notion de sous-représentation qui nous servira à introduire la notion de représentation irréductible de  $G$ .

**Définition 2.7.** Si  $(\pi, V)$  une représentation de  $G$ , et  $W$  est un sous-espace vectoriel de  $V$ , on dit que  $W$  est invariant par  $\pi$ , si

$$\forall g \in G, \forall w \in W, \pi(g, w) \in W.$$

Dans ce cas, on note  $\pi_W$  l'application ainsi définie par restriction à  $W \times G$  et on dit que  $(\pi_W, W)$  est une sous-représentation de  $(\pi, V)$ .

**Définition 2.8.** On dit qu'une représentation  $\pi$  de  $G$  est irréductible si :

1. Elle est non nulle.
2. Elle n'admet aucun sous-espace autre que  $\{0\}$  et  $V$  invariant par  $\pi$ .

On introduit maintenant la notion d'équivalence entre deux représentations sur le groupe  $G$ .

**Définition 2.9.** Soient  $(\pi, V)$  et  $(\tau, W)$  deux représentations du groupe  $G$ .

1. Un opérateur d'entrelacement est une application  $T : V \longrightarrow W$  linéaire de  $V$  dans  $W$  vérifiant

$$T(\pi(g, v)) = \tau(g, T(v)), \quad \forall g \in G, \forall v \in V.$$

2. Les deux représentations  $(\pi, V)$  et  $(\tau, W)$  sont équivalentes s'il existe un opérateur d'entrelacement  $T : V \longrightarrow W$  inversible.

Enfin, on donne la définition d'une représentation unitaire.

**Définition 2.10.** Soit  $(\pi, V)$  une représentation d'un groupe  $G$ . On dit que  $(\pi, V)$  est une représentation unitaire si  $V$  est un espace de Hilbert (réel ou plus souvent complexe), et si pour tout élément de  $g \in G$ ,  $V \ni v \mapsto \pi(g, v) \in V$  est un opérateur unitaire sur  $V$ .

### 2.3.2 Représentations unitaires induites sur l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$

Parmi les représentations, les représentations unitaires irréductibles jouent un rôle crucial. La théorie de Kirillov permet d'associer à tout élément du dual  $\mathcal{G}^*$  de  $\mathcal{G}$  une représentation irréductible.

De plus, cette théorie dit que toute représentation unitaire irréductible peut être représentée de cette manière.

Pour être plus précis, on donne une définition de la représentation induite. Le point départ est une sous-algèbre  $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$  et une forme linéaire  $\ell$  sur  $\mathcal{G}$  telle que  $\ell([\mathcal{H}, \mathcal{H}]) = 0$ . On va alors associer une représentation  $\pi_{\ell, \mathcal{H}}$  du groupe de  $G$  dans  $V_\pi := L^2(\mathbb{R}^{k(\pi)})$  qui est défini de façon unique modulo une conjugaison unitaire, où  $k(\pi)$  est la codimension de  $\mathcal{H}$  dans  $\mathcal{G}$ . Pour cette construction et en utilisant le caractère nilpotent, on peut trouver  $k = k(\pi)$  vecteurs indépendants  $e_1, \dots, e_k$  tels que tout  $g$  peut être écrit sous la forme

$$g = h \exp(s_k e_k) \dots \exp(s_1 e_1), \quad (7)$$

et tels que, si

$$\mathcal{A}_j = \mathcal{H} \oplus \mathbb{R}e_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{R}e_{k-j+1},$$

alors  $\mathcal{A}_{j-1}$  est un idéal de codimension 1 dans  $\mathcal{A}_j$ .

Avec cette construction, on peut obtenir que  $g \mapsto (s, h)$  est un difféomorphisme global de  $\mathcal{G}$  dans  $\mathbb{R}^k \times \mathcal{H}$ . La représentation induite est donnée par

$$(\pi_{\ell, \mathcal{H}}(\exp a) f)(t) = \exp i \langle \ell, h(t, a) \rangle f(\sigma(t, a)),$$

où  $h(t, a)$  et  $\sigma(t, a)$  sont définis par la formule suivante

$$\exp t_k e_k \dots \exp t_1 e_1 \exp a = \exp(h(t, a)) \exp \sigma_k(t, a) e_k \dots \exp \sigma_1(t, a) e_1.$$

On note aussi  $\pi_{\ell, \mathcal{H}}$  la représentation de l'algèbre de Lie associée définie par

$$\pi_{\ell, \mathcal{H}}(a)u = \frac{d}{ds} (\pi_{\ell, \mathcal{H}}(e^{sa})u)_{|s=0}, \quad (8)$$

où la représentation  $\pi_{\ell, \mathcal{H}}$  peut-être définie sur l'ensemble des  $u \in V_\pi$  tels que l'application  $s \rightarrow \pi_{\ell, \mathcal{H}}(e^{as})u$  est de classe  $C^1$ . On va en fait surtout travailler sur l'espace  $\mathcal{S}_\pi$  des vecteurs  $C^\infty$  de la représentation  $\pi_{\ell, \mathcal{H}}$ .

Plus explicitement, on a

$$\pi_{\ell, \mathcal{H}}(a) = i \langle \ell, h'(t, a) \rangle + \sum_{j=1}^k \sigma'_j(t, a) \partial_{t_j},$$

où  $h'$  et  $\sigma'$  désignent

$$\begin{aligned} h'(t, a) &:= \frac{d}{ds} (h(t, sa))|_{s=0}, \\ \sigma'(t, a) &:= \frac{d}{ds} (\sigma(t, sa))|_{s=0}. \end{aligned}$$

De plus,  $\sigma$  a la structure suivante :

$$\sigma_j(t_j, \dots, t_1, a) = t_j + \psi_j(t_{j-1}, \dots, t_1, a), \quad (9)$$

où les  $\psi_j$  sont des polynômes sur  $\mathbb{R}^k$ , ne dépendant que des variables indiquées, à coefficients réels.

On sait par la théorie de Kirillov que, dans le cas nilpotent, les représentations irréductibles sont associées à des éléments de  $\mathcal{G}^*$  et que, quand  $\pi$  est irréductible, l'espace de représentation  $V_\pi$  s'identifie à  $L^2(\mathbb{R}^{k(\pi)})$  où  $k(\pi)$  est un entier avec  $L^2(\mathbb{R}^0) = \mathbb{C}$  par convention. On note  $\widehat{G}$  l'ensemble de représentations irréductibles du groupe, simplement connexe  $G := \exp \mathcal{G}$  associé à  $\mathcal{G}$ . Il est aussi important de noter que dans le cas d'une représentation irréductible,  $\mathcal{S}_\pi$  s'identifie à l'espace de Schwartz  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{k(\pi)})$ .

Revenant aux représentations induites  $\pi_{\ell, \mathcal{H}}$ , deux cas particuliers vont nous intéresser.

Quand  $\ell = 0$ , on obtient l'extension standard de la représentation triviale du sous-groupe  $H$  de  $G$ . On peut considérer cela comme une représentation sur  $L^2(G/H)$ . Un problème intéressant (qui est résolu dans [8]) est de caractériser l'hypoellipticité maximale de  $\pi_{0, \mathcal{H}}(P)$  pour  $P \in \mathcal{U}_m(\mathcal{G})$ .

Le second cas est lorsque  $\mathcal{H} \supset \mathcal{G}_2$  est de dimension maximale, pour une forme  $\ell \in \mathcal{G}^*$  donnée, avec la propriété ci-dessus. Dans ce cas, on peut montrer que la représentation est irréductible. De plus on peut ainsi construire toutes les représentations irréductibles (à équivalence unitaire près). Partant cette fois d'un élément  $\ell \in \mathcal{G}^*$ , on peut construire une sous-algèbre maximale  $V_\ell$  telle que  $\ell([V_\ell, V_\ell]) = 0$ . On peut aussi montrer que la codimension  $k(\ell)$  de  $V_\ell$  est égale à  $\frac{1}{2} \text{rang } B_\ell$ , où  $B_\ell$  est la 2-forme suivante :

$$\mathcal{G} \times \mathcal{G} \rightarrow \ell([X, Y]).$$

Pour  $a \in \mathcal{G}$ , on définit par  $(\text{ad } a)^*$  l'adjoint de  $\text{ad } a$  qui est un endomorphisme de  $\mathcal{G}^*$  défini par

$$(\text{ad } a)^* \ell(b) := \ell([a, b]).$$

Le groupe  $G$  agit alors naturellement sur  $\mathcal{G}^*$  par :

$$g \mapsto g\ell = \sum_{k=0}^r \frac{1}{k!} (\text{ad} - a)^{*k} \ell,$$

avec  $g = \exp(a)$ .

Cette action est appelée action coadjointe. La théorie de Kirillov nous dit que si  $\ell$  et  $\tilde{\ell}$  sont sur la même orbite pour l'action coadjointe, alors les représentations unitaires correspondantes sont équivalentes. Inversement, deux orbites différentes donnent deux représentations irréductibles non équivalentes. On peut ainsi identifier l'ensemble  $\widehat{G}$  des représentations unitaires de  $G$  avec l'ensemble des  $G$ -orbites dans  $\mathcal{G}^*$  :

$$\widehat{G} = \mathcal{G}^*/G.$$

Dans la démonstration du théorème principal, nous rencontrons des représentations  $\pi$  d'une algèbre de Lie  $\mathcal{G}$  dans l'espace  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^k)$  ( $k \geq 1$ ) qui ont la forme suivante. Pour tout  $X \in \mathcal{G}$ ,  $\pi(X)$  est un opérateur différentiel de la forme suivante :

$$\pi(X) = P_1(X) \frac{\partial}{\partial y_1} + P_2(y_1, X) \frac{\partial}{\partial y_2} + \dots + P_k(y_1, \dots, y_{k-1}, X) \frac{\partial}{\partial y_k} + i Q(y_1, \dots, y_k, X), \quad (10)$$

où les  $P_j(y, X)$  et  $Q(y, X)$  sont des polynômes sur  $\mathbb{R}^k$ , ne dépendant que des variables indiquées, à coefficients réels, dépendant linéairement de  $X \in \mathcal{G}$ . On suppose que les formes linéaires  $X \rightarrow P_j(0, X)$  ( $1 \leq j \leq k$ ) sont linéairement indépendantes dans  $\mathcal{G}^*$ .

On notera que les représentations induites ont toujours cette forme. Il s'agit donc de se poser la question inverse :

La représentation introduite plus haut est-elle en fait une représentation induite ?

La réponse positive est donnée par Helffer-Nourrigat dans [8]. En posant, pour tout  $X \in \mathcal{G}$

$$\langle \ell, X \rangle = Q(0, X), \quad (11)$$

et en désignant par  $\mathcal{H}$  le sous-espace des  $X \in \mathcal{G}$  tels que  $P_j(0, X) = 0$  ( $j = 1, \dots, k$ ), ces auteurs démontrent la proposition suivante :

**Proposition 2.11.** *Sous les hypothèses ci-dessus :*

i) Le sous-espace  $\mathcal{H}$  est une sous-algèbre de  $\mathcal{G}$ , et l'on a

$$\langle \ell, [X, Y] \rangle = 0 \quad \forall X, Y \in \mathcal{H}. \quad (12)$$

ii) La représentation  $\pi$  est unitairement équivalente à  $\pi_{\ell, \mathcal{H}}$ . La transformation qui réalise l'équivalence est un isomorphisme de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^k)$ .

**Remarque 2.12.** Dans la suite, on utilisera la proposition précédente pour passer des estimations maximales pour  $\pi_{\ell, \mathcal{H}}(P)$  aux estimations maximales pour  $\pi(P)$ . Ce passage est justifié via la définition de la transformation  $T$ , qui va réaliser l'équivalence suivante :

$$\pi_{\ell, \mathcal{H}}(\exp X)Tf = T\pi(\exp X)f, \quad \text{pour tout } X \in \mathcal{G} \text{ et } f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^k),$$

où

—  $T$  est définie par :

$$Tf(t) = \pi(\exp Y(t))f|_{Y=0} = e^{i\varphi(0, Y(t))} f(\theta(t)), \quad \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^k)$$

—  $\theta(t) = (\theta_1(t), \dots, \theta_k(t))$  est une application sur  $\mathbb{R}^k$  définie comme suit :

$$\begin{aligned} \theta_1(t) &= t_1 \\ \theta_j(t) &= t_j + H_j(t_1, \dots, t_{j-1}), \quad \forall j = 2, \dots, k, \end{aligned}$$

— les  $H_j$  sont des polynômes.

Par conséquent  $\theta$  est un difféomorphisme global de  $\mathbb{R}^k$ , dont le jacobien vaut 1. On passe ainsi sans problème d'une inégalité maximale à l'autre par un changement de variable qui conserve la mesure de Lebesgue.

On va finir cette partie en démontrant une propriété spécifique qui sera utilisée dans la suite.

**Proposition 2.13.** Soit  $\pi$  une représentation définie par (10), alors pour tout  $X \in \mathcal{G}$  l'opérateur  $\pi(X)$  est formellement anti-adjoint pour le produit scalaire usuel défini sur l'espace  $L^2(\mathbb{R}^k)$ , i.e.

$$\forall u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^k), \quad \langle \pi(X)u, v \rangle = -\langle u, \pi(X)v \rangle.$$

*Démonstration.* Soit  $u$  et  $v \in L^2(\mathbb{R}^k)$ . Pour  $X \in \mathcal{G}$ , on a

$$\langle \pi(X)u, v \rangle = \int_{\mathbb{R}^k} \pi(X)u(y) \overline{v(y)} dy,$$

en effectuant des intégrations par parties en fonction de  $y_j$  avec  $j = 1, \dots, k$  et en utilisant le fait que  $P_j(y, X)$  sont des polynômes à coefficients réels et qui ne dépendent que de  $y_1, \dots, y_{j-1}$  pour tout  $j = 1, \dots, k$ , on obtient

$$\begin{aligned} & \langle \pi(X) u, v \rangle \\ &= - \sum_{j=1}^k \int_{\mathbb{R}^k} u(y) \overline{P_j(X, y_1, \dots, y_{j-1}) \frac{\partial v}{\partial y_j}(y)} dy + \int_{\mathbb{R}^k} u(y) \overline{(-i Q(y_1, \dots, y_k, X) v(y))} dy, \end{aligned}$$

puisque  $Q(y, X)$  aussi est un polynôme à coefficients réels. Puis en réutilisant la définition (10) de la représentation  $\pi(X)$ , on obtient

$$\langle \pi(X) u, v \rangle = -\langle u, \pi(X) v \rangle,$$

ce qui implique le résultat.  $\square$

**Remarque 2.14.** *La proposition 2.13 est en particulier vraie pour toute représentation induite  $\pi_{\ell, \mathcal{H}}$  unitaire sur  $\mathcal{G}$ . Comme remarqué plus haut, les représentations induites vérifient en effet (10).*

## 2.4 Caractérisation de l'hypoellipticité dans le cas des opérateurs invariants homogènes sur les groupes stratifiés

Cette partie a pour but de donner les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un opérateur polynôme de champs de vecteurs soit hypoelliptique maximal.

**Définition 2.15.** *Soit  $\mathcal{G}$  une algèbre de Lie réelle. On définit l'algèbre enveloppante  $\mathcal{U}(\mathcal{G})$  comme étant l'algèbre non commutative des expressions polynomiales de la forme suivante :*

$$P = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha Y^\alpha, \quad (13)$$

où  $a_\alpha \in \mathbb{C}$  et  $Y_{i,j}$  ( $i = 1, \dots, p_j$  et  $j = 1, 2$ ) désigne une base de  $\mathcal{G}_j$ ,  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$  est un  $k$ -uplet de couples  $(i, j)$  avec  $i \in \{1, \dots, p_j\}$ , et où l'on pose :

$$Y^\alpha = Y_{\alpha_1} \dots Y_{\alpha_k} \quad \text{avec} \quad |\alpha| = \sum_{l=1}^k j(\alpha_l).$$

Lorsque dans (13), on ne considère que des termes avec  $|\alpha| = m$ , l'ensemble des expressions polynomiales de cette forme est désigné par  $\mathcal{U}_m(\mathcal{G})$ .

Notons que la représentation  $\pi_{\ell, \mathcal{H}}$  de l'algèbre  $\mathcal{G}$  s'étend naturellement à une représentation de l'algèbre enveloppante  $\mathcal{U}(\mathcal{G})$ . Pour tout  $t > 0$ , on définit un automorphisme  $\delta_t$  de  $\mathcal{G}$  par la condition :

$$\delta_t(a) = t^j a \quad \text{si } a \in \mathcal{G}_j.$$

On peut naturellement étendre la définition de  $\delta_t$  (appelée famille de dilatation) à l'algèbre enveloppante  $\mathcal{U}(\mathcal{G})$  en posant :

$$\delta_t(P) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha (\delta_t Y)^\alpha = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha t^{|\alpha|} Y^\alpha \quad \text{pour } t > 0.$$

On note que :

$$\mathcal{P} \in \mathcal{U}_m(\mathcal{G}) \iff \delta_t(\mathcal{P}) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha (\delta_t Y)^\alpha = t^m \mathcal{P}, \quad \forall t > 0.$$

À tout élément  $Y$  de  $\mathcal{G}$ , on peut associer un champ de vecteur  $\lambda(Y)$  sur le groupe  $G$ , invariant à gauche défini par :

$$(\lambda(Y)f)(u) = \frac{d}{dt} f(u \cdot \exp(tY))|_{t=0}, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}^k), \forall u \in G$$

Cette correspondance permet d'identifier l'algèbre enveloppante  $\mathcal{U}(\mathcal{G})$  avec l'algèbre de tous les polynômes de champs de vecteurs invariants à gauche. À  $P \in \mathcal{U}(\mathcal{G})$ , défini dans (13), on peut associer :

$$\lambda(P) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \lambda(Y)^\alpha.$$

On va rappeler le théorème conjecturé par C. Rockland dans [13] et démontré dans le cas du groupe de Heisenberg par lui, puis dans le cas général par R. Beals [1] pour la condition nécessaire et par B. Helffer et J. Nourrigat dans [8] pour la condition suffisante. À noter que le cas du rang 3, qui finalement est le seul qui nous sera utile ici fut obtenu antérieurement dans [5].

**Théorème 2.16** (Théorème 0.1 dans [6]). *Soit  $\mathcal{G}$  une algèbre de Lie graduée et soit  $\mathcal{P} \in \mathcal{U}_m(\mathcal{G})$ , alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *L'opérateur  $\mathcal{P}$  défini dans (4) est hypoelliptique dans  $G$  (le groupe associé à l'algèbre de Lie  $\mathcal{G}$ ).*



2. Pour toute représentation  $\pi$  dans  $\widehat{G}$  non triviale, l'opérateur  $\pi(\mathcal{P})$  est injectif dans  $\mathcal{S}_\pi$  (où  $\mathcal{S}_\pi$  désigne l'espace des vecteurs  $C^\infty$  de la représentation).

Combiné avec un résultat de Rothschild-Stein [15] dans le cas particulier où l'ordre  $m$  de l'opérateur  $\mathcal{P}$  est pair et l'algèbre de Lie est stratifiée de type 1 ou de type 2, le théorème de Helffer-Nourrigat prend la forme suivante.

**Théorème 2.17.** *Soit  $\mathcal{G}$  une algèbre de Lie graduée et stratifiée de type 1 ou de type 2 et soit  $\mathcal{P} \in \mathcal{U}_m(\mathcal{G})$  avec  $m$  est pair (juste dans le cas de type-2), alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. L'opérateur  $\mathcal{P}$  défini dans (4) est hypoelliptique dans  $G$ .
2. L'opérateur  $\mathcal{P}$  défini dans (4) est hypoelliptique maximal dans  $G$ .
3. Pour toute représentation  $\pi$  dans  $\widehat{G}$  non triviale, l'opérateur  $\pi(\mathcal{P})$  est injectif dans  $\mathcal{S}_\pi$  (où  $\mathcal{S}_\pi$  désigne l'espace des vecteurs  $C^\infty$  de la représentation).

**Remarque 2.18.** *La condition 3 sera appelée la condition de Rockland. Pour la vérifier, on observe que pour  $\pi$  dans  $\widehat{G}$  non triviale il suffit de montrer que, si  $u$  vérifie  $\pi(\mathcal{P})u = 0$ , alors*

$$\text{Dans le cas stratifié de Type 1 : } \quad \pi(Y_j)u = 0, \quad \forall j = 1, \dots, p,$$

$$\text{Dans le cas stratifié de Type 2 : } \quad \pi(X_\ell)u = 0 \text{ et } \pi(Y_j)u = 0, \forall \ell = 1, \dots, p \text{ et } j = 1, \dots, q.$$

Ceci implique en effet, dans le cas stratifié de type 1 et 2, que

$$\pi(Y)u = 0, \quad \forall Y \in \mathcal{G}.$$

Puis, par l'hypothèse que  $\pi$  est irréductible et non triviale, nous obtenons que  $u = 0$ .

On va terminer cette partie en citant un autre résultat, du à Helffer-Nourrigat dans [7], qui intervient dans la preuve de leur théorème et qui nous sera très utile.

**Théorème 2.19.** *Si  $\mathcal{P} \in \mathcal{U}_m(\mathcal{G})$  est un opérateur hypoelliptique maximal, alors il existe une constante  $C$  strictement positive telle que, pour toute représentation induite  $\pi = \pi_{\ell, \mathcal{H}}$ , pour tout  $u$  dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^k(\pi))$ , on ait l'estimation maximale suivante :*

$$\sum_{|\alpha| \leq m} \|\pi(Y^\alpha)u\|_{L^2(\mathbb{R}^k)}^2 \leq C \left( \|\pi(\mathcal{P})u\|_{L^2(\mathbb{R}^k)}^2 + \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^k)}^2 \right).$$

## 2.5 Application à l'hypoellipticité maximale des champs de vecteurs

On suppose que les champs  $X_i$  et  $Y_j$  pour  $i \in \{1, \dots, p\}$  et  $j \in \{1, \dots, q\}$  vérifient (Ho) en  $z_0$ . À l'opérateur défini en (4), on va d'abord associer en  $x_0$ , un élément de l'algèbre enveloppante  $\mathcal{U}(\mathcal{G})$  où  $\mathcal{G}$  désigne l'algèbre de Lie nilpotente libre à  $p+q$  générateurs  $(Z_1, \dots, Z_{p+q})$  et de rang de nilpotence  $r$ . On suit ici la démarche de Rothschild-Stein dans [15]. On associe à l'opérateur  $P$  un élément  $\mathcal{P}_{z_0}$  de  $\mathcal{U}_m(\mathcal{G})$  défini par :

$$\mathcal{P}_{z_0} = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(z_0) Z^\alpha$$

et on rappelle un résultat qui s'appuie sur les articles [14], [6] et [2]) :

**Théorème 2.20.** *Soit  $P$  l'opérateur défini en (4) avec la condition de Hörmander et  $z_0 \in \Omega$ . Si  $\mathcal{P}_{z_0}$  est hypoelliptique alors l'opérateur  $P$  est hypoelliptique maximal dans un voisinage de  $z_0$ .*

La réciproque n'est en général pas vraie. C'est tout l'objet du livre de [8] de donner des conditions suffisantes optimales pour cette hypoellipticité maximale.

## 3 Démonstration du résultat principal quand $d = 2$

La démonstration consiste à construire une algèbre de Lie graduée  $\mathcal{G}$  de rang 3, stratifiée de type 2 et, en tout point  $x \in \mathbb{T}^2$ , un élément  $\mathcal{K}_x$  de  $\mathcal{U}_2(\mathcal{G})$  hypoelliptique. On déduira ensuite de l'estimation maximale obtenue pour chaque  $\mathcal{K}_x$ , une estimation maximale pour l'opérateur  $K$ .

Pour définir  $\mathcal{K}_x$ , on remplacera  $B_e(x)$  par une constante  $b \in \mathbb{R}$  fixé, et on montrera une estimation globale pour le modèle suivant :

$$K_b = v \cdot \nabla_x + b(v_1 \partial_{v_2} - v_2 \partial_{v_1}) - \Delta_v + v^2/4 - 1, \text{ dans } \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2,$$

qui apparaîtra comme l'image par une représentation induite de  $\mathcal{K}_x$ . Ensuite on utilisera une partition de l'unité et on contrôlera les erreurs.

### 3.1 Application de la Proposition 2.11 :

On va montrer qu'on peut se mettre dans le cadre de la Proposition 2.11. On cherche donc une algèbre de Lie graduée  $\mathcal{G}$  de type 2, une sous-algèbre  $\mathcal{H}$ , un élément  $\tilde{K}_b$  dans  $\mathcal{U}_2(\mathcal{G})$  et une forme linéaire  $\ell$  tels que

$$\pi_{\ell, \mathcal{H}}(\tilde{K}_b) = K_b.$$

Pour cela, on détermine les conditions nécessaires sur les crochets entre les éléments générateurs de cette algèbre. Dans l'écriture de  $K_b$  on voit apparaître les opérateurs différentiels de degré 1 à coefficients polynomiaux suivants :

$$X'_{1,1} = \partial_{v_1} \qquad X''_{1,1} = iv_1 \qquad (14)$$

$$X'_{2,1} = \partial_{v_2} \qquad X''_{2,1} = iv_2 \qquad (15)$$

$$X_{1,2} = v \cdot \nabla_x. \qquad (16)$$

$K_b$  s'écrit en effet comme polynôme de ces cinq opérateurs différentiels

$$K_b = X_{1,2} - \sum_{k=1}^2 \left( (X'_{k,1})^2 + \frac{1}{4}(X''_{k,1})^2 - \frac{i}{4}(X'_{k,1}X''_{k,1} - X''_{k,1}X'_{k,1}) \right) - ib \left( X'_{1,1}X''_{2,1} - X'_{2,1}X''_{1,1} \right). \qquad (17)$$

On regarde maintenant l'algèbre de Lie engendrée par ces cinq opérateurs et leurs crochets. Ceci nous conduit à introduire trois nouveaux éléments qui vérifient les relations suivantes :

$$X_{2,2} := [X'_{1,1}, X''_{1,1}] = [X'_{2,1}, X''_{2,1}] = i, \\ X_{1,3} := [X_{1,2}, X'_{1,1}] = \partial_{x_1}, \quad X_{2,3} := [X_{1,2}, X'_{2,1}] = \partial_{x_2}.$$

On observe aussi que l'on a les propriétés suivantes :

$$[X'_{1,1}, X'_{2,1}] = [X''_{1,1}, X''_{2,1}] = 0, \\ [X'_{j,1}, X_{k,3}] = [X''_{j,1}, X_{k,3}] = [X_{k,3}, X_{2,2}] = \dots = 0 \quad , \quad \forall j, k = 1, 2.$$

On construit alors une algèbre de Lie  $\mathcal{G}$  graduée vérifiant les mêmes relations de commutateurs. Plus précisément,  $\mathcal{G}$  est stratifiée de type 2, nilpotente de rang 3, son espace vectoriel sous-jacent est  $\mathbb{R}^8$ , et  $\mathcal{G}_1$  est engendrée par  $Y'_{1,1}, Y'_{2,1}, Y''_{1,1}$  et  $Y''_{2,1}$ ,  $\mathcal{G}_2$  est engendrée par  $Y_{1,2}$  et  $Y_{2,2}$  et  $\mathcal{G}_3$  est engendré par  $Y_{1,3}$  et  $Y_{2,3}$ . Les lois de l'algèbre sont données par :

$$Y_{2,2} = [Y'_{1,1}, Y''_{1,1}] = [Y'_{2,1}, Y''_{2,1}], \quad Y_{1,3} = [Y_{1,2}, Y'_{1,1}], \quad Y_{2,3} = [Y_{1,2}, Y'_{2,1}], \qquad (18)$$

$$[Y'_{1,1}, Y'_{2,1}] = [Y''_{1,1}, Y''_{2,1}] = 0, \qquad (19)$$

$$[Y'_{j,1}, Y_{k,3}] = [Y''_{j,1}, Y_{k,3}] = [Y_{k,3}, Y_{2,2}] = \dots = 0 \quad \forall j, k = 1, 2. \qquad (20)$$

On vérifie que l'application  $\pi$  (avec la convention que si  $\diamond = \emptyset$  il n'y a pas d'exposant) définie sur sa base par

$$\pi(Y_{i,j}^\diamond) = X_{i,j}^\diamond \quad \text{avec } i = 1, 2, j = 1, 2, 3 \text{ et } \diamond \in \{\emptyset, ', ''\}. \qquad (21)$$

définit bien une représentation  $\pi$  de l'algèbre  $\mathcal{G}$ .

On observe maintenant que notre représentation  $\pi$  peut se réécrire sous la forme

$$\begin{aligned}\pi(Y) &= P_1(Y)\partial_{v_1} + P_2(v_1, Y)\partial_{v_2} + P_3(v_1, v_2, Y)\partial_{x_1} + P_4(v_1, v_2, x_1, Y)\partial_{x_2} \\ &\quad + iQ(v_1, v_2, x_1, x_2, Y),\end{aligned}$$

où pour tout  $Y \in \mathcal{G}$ , il existe  $a, b, c, d, \alpha, \beta, \gamma$ , et  $\delta \in \mathbb{R}$  tels que

$$\begin{aligned}Y &= aY'_{1,1} + bY'_{2,1} + cY''_{1,1} + dY''_{2,1} \\ &\quad + \alpha Y_{1,2} + \beta Y_{2,2} \\ &\quad + \gamma Y_{1,3} + \delta Y_{2,3},\end{aligned}$$

et les polynômes  $P_j$  avec  $j = 1, \dots, 4$  et  $Q$  sont définis par

$$\begin{aligned}P_1(Y) &= a, P_2(v_1, Y) = b, P_3(v_1, v_2, Y) = \alpha v_1 + \gamma \\ P_4(v_1, v_2, x_1, Y) &= \alpha v_2 + \delta \text{ et } Q(v, x, Y) = cv_1 + dv_2 + \beta.\end{aligned}$$

On peut désormais appliquer la Proposition 2.11. On obtient alors  $\pi \equiv \pi_{\ell, \mathcal{H}}$  avec

$$\ell \in \mathcal{G}^*, \langle \ell, Y \rangle = Q(0, Y) = \beta,$$

$$\mathcal{H} := \{Y \in \mathcal{G} / P_1(0, Y) = \dots = P_4(0, Y) = 0\} = \text{Vect}(Y''_{1,1}, Y''_{2,1}, Y_{1,2}, Y_{2,2}),$$

Retournons à notre opérateur  $K_b$  qui a été écrit comme un polynôme de champs de vecteurs  $\{X_{j,2}, X_{j,3}, X'_{j,1}, X''_{j,1}\}_{j=1,2}$  dans (17). On définit alors  $\tilde{K}_b$  comme le même polynôme mais cette fois-ci fonction des champs de vecteurs  $\{Y_{j,2}, Y_{j,3}, Y'_{j,1}, Y''_{j,1}\}_{j=1,2}$  définis comme suit

$$\begin{aligned}\tilde{K}_b &= Y_{1,2} - \sum_{k=1}^2 \left( (Y'_{k,1})^2 + \frac{1}{4}(Y''_{k,1})^2 - \frac{i}{4}(Y'_{k,1}Y''_{k,1} - Y''_{k,1}Y'_{k,1}) \right) \\ &\quad - ib \left( Y'_{1,1}Y''_{2,1} - Y'_{2,1}Y''_{1,1} \right)\end{aligned}\tag{22}$$

et on vérifie que

$$\pi_{\ell, \mathcal{H}}(\tilde{K}_b) = K_b.$$

Notons qu'avec les notations utilisées dans l'introduction de la section, on a :

$$\mathcal{K}_x = \tilde{K}_{B_e(x)}.$$

### 3.2 Vérification du critère de Rockland

Pour démontrer l'hypoellipticité maximale, il faut vérifier le critère de Rockland (cf Théorème 2.17) pour  $\tilde{K}_b$ . Soit  $\pi$  une représentation unitaire sur  $G$  dans  $V_\pi$ . On va montrer que l'opérateur  $\pi(\tilde{K}_b)$  est un opérateur injectif dans l'espace  $\mathcal{S}_\pi$  des vecteurs  $C^\infty$  de la représentation, qui s'identifie quand  $\pi$  est irréductible à  $S(\mathbb{R}^{k(\pi)})$ . Soit  $u \in S(\mathbb{R}^{k(\pi)})$  tel que

$$\pi(\tilde{K}_b)u = 0.$$

D'une part, on a

$$\operatorname{Re}\langle \pi(\tilde{K}_b)u, u \rangle = 0,$$

D'autre part, par intégration par parties et en utilisant que l'opérateur  $\pi(Y)$  est un opérateur formellement anti-adjoint (voir Proposition 2.13), on obtient

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\langle \pi(\tilde{K}_b)u, u \rangle &= \underbrace{\operatorname{Re}\langle \pi(Y_{1,2})u, u \rangle}_I + \sum_{k=1}^2 \left( \|\pi(Y'_{k,1})u\|^2 + \|\pi(Y''_{k,1})u\|^2 \right) \\ &\quad - b \operatorname{Re} \underbrace{\left\langle i \left( \pi(Y'_{1,1})\pi(Y''_{2,1}) - \pi(Y'_{2,1})\pi(Y''_{1,1}) \right) u, u \right\rangle}_{II}. \end{aligned}$$

D'abord, on va calculer  $I$ . En utilisant le fait que l'opérateur  $\pi(Y_{1,2})$  est anti-adjoint d'après la Proposition 2.13, on obtient

$$\langle \pi(Y_{1,2})u, u \rangle = -\langle u, \pi(Y_{1,2})u \rangle = -\overline{\langle \pi(Y_{1,2})u, u \rangle}.$$

Par conséquent, on a

$$\langle \pi(Y_{1,2})u, u \rangle + \overline{\langle \pi(Y_{1,2})u, u \rangle} = 0,$$

d'où ,

$$I = \operatorname{Re}\langle \pi(Y_{1,2})u, u \rangle = \left( \langle \pi(Y_{1,2})u, u \rangle + \overline{\langle \pi(Y_{1,2})u, u \rangle} \right) / 2 = 0.$$

Ensuite, on passe au calcul du terme  $II$ . En utilisant que  $\pi$  est une représentation et les relations des commutateurs données dans (19), on obtient

$$\begin{aligned} [\pi(\tilde{Y}'_{1,1}), \pi(\tilde{Y}''_{2,1})] &= \pi([\tilde{Y}'_{1,1}, \tilde{Y}''_{2,1}]) = 0 \\ [\pi(\tilde{Y}'_{2,1}), \pi(\tilde{Y}''_{1,1})] &= \pi([\tilde{Y}'_{2,1}, \tilde{Y}''_{1,1}]) = 0. \end{aligned}$$

Alors les opérateurs  $i\pi(Y'_{1,1})\pi(Y''_{2,1})$  et  $i\pi(Y'_{2,1})\pi(Y''_{1,1})$  sont des opérateurs anti-adjoints sur l'espace  $\mathcal{S}_\pi$  munis du produit scalaire de  $V_\pi$  pour toute représentation  $\pi$ . Par intégration par parties, on a

$$\begin{aligned}\langle i\pi(Y'_{1,1})\pi(Y''_{2,1})u, u \rangle &= -\overline{\langle i\pi(Y'_{1,1})\pi(Y''_{2,1})u, u \rangle}, \\ \langle i\pi(Y'_{2,1})\pi(Y''_{1,1})u, u \rangle &= -\overline{\langle i\pi(Y'_{2,1})\pi(Y''_{1,1})u, u \rangle},\end{aligned}$$

et donc,

$$\operatorname{Re} \langle i\pi(Y'_{1,1})\pi(Y''_{2,1})u, u \rangle = \operatorname{Re} \langle i\pi(Y'_{2,1})\pi(Y''_{1,1})u, u \rangle = 0.$$

Par conséquent, on obtient

$$II = \operatorname{Re} \langle i \left( \pi(Y'_{1,1})\pi(Y''_{2,1}) - \pi(Y'_{2,1})\pi(Y''_{1,1}) \right) u, u \rangle = 0.$$

D'où,

$$\operatorname{Re} \langle \pi(\tilde{K}_b)u, u \rangle = \sum_{k=1}^2 \left( \|\pi(Y'_{k,1})u\|^2 + \|\pi(Y''_{k,1})u\|^2 \right),$$

qui implique que

$$\pi(Y'_{j,1})u = \pi(Y''_{j,1})u = 0, \quad \forall j = 1, 2. \quad (23)$$

Il reste à considérer  $Y_{1,2}$ , pour lequel on peut remarquer que

$$Y_{1,2} = \tilde{K}_b + \sum_{k=1}^2 \left( (Y'_{k,1})^2 + \frac{1}{4}(Y''_{k,1})^2 - \frac{i}{4}[Y'_{k,1}, Z''_{k,1}] \right) + ib \left( Y'_{1,1}Y''_{2,1} - Y'_{2,1}Y''_{1,1} \right).$$

En appliquant  $\pi$  et par action sur  $u$ , on a

$$\begin{aligned}\pi(Y_{1,2})u &= \pi(\tilde{K}_b)u + \sum_{k=1}^2 \pi \left( (Y'_{k,1})^2 + \frac{1}{4}(Y''_{k,1})^2 - \frac{i}{4}[Y'_{k,1}, Y''_{k,1}] \right) u \\ &\quad + ib \pi \left( Y'_{1,1}Y''_{2,1} - Y'_{2,1}Y''_{1,1} \right) u \\ &= 0.\end{aligned}$$

De la Remarque 2.18 dans le cas stratifié de type 2, on déduit que

$$\pi(Y)u = 0, \quad \forall Y \in \mathcal{G}, \quad \text{et } u = 0.$$

L'opérateur  $\pi(\tilde{K}_b)$  est donc injectif dans l'espace  $\mathcal{S}_\pi$  pour toute représentation irréductible et non triviale  $\pi$ . Par conséquent, d'après le Théorème 2.17 l'opérateur  $\tilde{K}_b$  est hypoelliptique maximal dans le groupe  $G$ . En appliquant le Théorème 2.19 avec  $K_b = \pi_{\ell, \mathcal{H}}(\tilde{K}_b)$ , on obtient l'existence de  $C > 0$  telle que l'inégalité suivante

$$\begin{aligned} \|X_{1,2}u\| + \sum_{k=1}^2 \left( \|(X'_{k,1})^2u\| + \|(X''_{k,1})^2u\| \right) + \sum_{k,\ell=1}^2 \|X'_{k,1}X''_{\ell,1}u\| \\ \leq C (\|K_bu\| + \|u\|), \quad \forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2), \end{aligned} \quad (24)$$

soit vérifiée.

### 3.3 Deuxième approche.

Dans cette approche, on va utiliser la méthode d'addition des variables pour remplacer les champs  $\{Y_{j,2}, Y_{j,3}, Y'_{j,1}, Y''_{j,1}\}_{j=1,2}$  par les champs  $\{Z_{j,2}, Z_{j,3}, Z'_{j,1}, Z''_{j,1}\}_{j=1,2}$  sur  $\mathbb{R}^8$  définies par :

$$Z'_{1,1} = \partial_{x'_1} \qquad Z''_{1,1} = \partial_{x''_1} + x'_1 \partial_{y_2} \quad (25)$$

$$Z'_{2,1} = \partial_{x'_2} \qquad Z''_{2,1} = \partial_{x''_2} + x'_2 \partial_{y_2} \quad (26)$$

$$Z_{1,2} = \partial_{y_1} + x'_1 \partial_{z_1} + x'_2 \partial_{z_2} \qquad Z_{2,2} = \partial_{y_2} \quad (27)$$

$$Z_{1,3} = \partial_{z_1} \qquad Z_{2,3} = \partial_{z_2}. \quad (28)$$

Dans les coordonnées exponentielles convenables sur  $G$  les champs de vecteurs  $\{Z_{j,2}, Z_{j,3}, Z'_{j,1}, Z''_{j,1}\}_{j=1,2}$  correspondent à la représentation régulière de  $\mathcal{G}$  dans  $G$  et sont des champs de vecteurs invariants à gauche sur le groupe. Dans ces coordonnées, l'opérateur  $\tilde{K}_b$  s'écrit comme un polynôme des champs de vecteurs  $\{Z_{j,2}, Z_{j,3}, Z'_{j,1}, Z''_{j,1}\}_{j=1,2}$ , et en utilisant le Théorème 2.19 sur les groupes nilpotents, on obtient l'estimation maximale suivante

$$\begin{aligned} \|Z_{1,2}u\|^2 + \sum_{k=1}^2 \left( \|(Z'_{k,1})^2u\|^2 + \|(Z''_{k,1})^2u\|^2 \right) + \sum_{k,\ell=1}^2 \|Z'_{k,1}Z''_{\ell,1}u\|^2 \\ \leq C \left( \|\tilde{K}_b u\|^2 + \|u\|^2 \right), \quad \forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^8). \end{aligned} \quad (29)$$

#### étude préliminaire.

Avant de donner la démonstration de l'inégalité maximale pour l'opérateur  $\tilde{K}_b$ , on va commencer par montrer comment on passe aisément de l'inégalité :

$$\|Q(D_x)u\|^2 \leq C(\|P(D_x)u\|^2 + \|u\|^2), \quad \forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^k), \quad (30)$$

à l'inégalité

$$|Q(\xi)|^2 \leq C(|P(\xi)|^2 + 1), \forall \xi \in \mathbb{R}^k. \quad (31)$$

Ici  $D_{x_j} = -i \frac{d}{dx_j}$  et  $P$  et  $Q$  sont des polynômes.

En utilisant le Théorème de Plancherel, on obtient

$$\|Q(\cdot)w\|^2 \leq C(\|P(\cdot)w\|^2 + \|w\|^2), \forall w \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_\xi^k), \quad (32)$$

Pour montrer (31) en  $\xi = \xi_0$ , on considère la famille de gaussiennes

$$w_h(\xi) = ch^{-\frac{k}{2}} e^{-\frac{(\xi-\xi_0)^2}{2h}}, \quad h > 0, \quad (33)$$

où  $c > 0$  est tel que  $\|w_h\| = 1$ .

Par application de l'inégalité (32) à la fonction  $w_h$ , on obtient

$$\|Q(\cdot)w_h\|^2 \leq C(\|P(\cdot)w_h\|^2 + 1), \quad (34)$$

Il reste à montrer que

$$\|(P(\cdot) - P(\xi_0))w_h\| = \mathcal{O}(h^{\frac{1}{2}}) \text{ et } \|(Q(\cdot) - Q(\xi_0))w_h\| = \mathcal{O}(h^{\frac{1}{2}}). \quad (35)$$

En effet, on peut écrire :

$$P(\xi) = P(\xi_0) + O_1(\eta) \text{ et } Q(\xi) = Q(\xi_0) + O_2(\eta)$$

où  $\eta = \xi - \xi_0$ ,  $O_1(\eta)$  et  $O_2(\eta)$  sont des polynômes qui s'annulent en  $\eta = 0$ .

Ensuite, par définition de la norme  $L^2(\mathbb{R}^k)$ , on a

$$\|(P(\cdot) - P(\xi_0))w_h\|^2 = ch^{-\frac{k}{2}} \int_{\mathbb{R}^k} O_1^2(\eta) e^{-\frac{\eta^2}{h}} d\eta. \quad (36)$$

En effectuant le changement de variables :

$$\mathbb{R}^k \ni \eta = (\eta_1, \dots, \eta_k) \rightarrow \Phi(\eta) = (\tau_1, \dots, \tau_k) = \left( \frac{\eta_1}{\sqrt{h}}, \dots, \frac{\eta_k}{\sqrt{h}} \right),$$

l'égalité (36) prend la forme suivante :

$$\|(P(\cdot) - P(\xi_0))w_h\|^2 = c \int_{\mathbb{R}^k} O_1^2(h^{\frac{1}{2}}\tau) e^{-\tau^2} d\tau.$$

Comme  $O_1$  est un polynôme s'annulant en 0, il peut s'écrire comme suit :

$$O_1(h^{\frac{1}{2}}\tau) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^k, 1 \leq |\alpha| \leq m} C_\alpha h^{\frac{|\alpha|}{2}} \tau^\alpha,$$



avec  $m = \deg(O_1)$ . En utilisant l'expression précédente, on obtient

$$\|(P(\cdot) - P(\xi_0))w_h\|^2 = c \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^k, 2 \leq |\alpha| \leq 2m} C_\alpha h^{\frac{|\alpha|}{2}} \int_{\mathbb{R}^k} \tau^\alpha e^{-\tau^2} d\tau.$$

Pour tout  $\alpha \in \mathbb{Z}^k$ , l'intégrale  $\int_{\mathbb{R}^k} \tau^\alpha e^{-\tau^2} d\tau$  est convergente, on a donc

$$\|(P(\cdot) - P(\xi_0))w_h\|^2 = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^k, 2 \leq |\alpha| \leq 2m} C'_\alpha h^{\frac{|\alpha|}{2}} = O(h).$$

Ceci montre l'égalité (35). Puis, en passant à la limite quand  $h \rightarrow 0$  dans l'estimation (34), on déduit

$$|Q(\xi_0)|^2 \leq C(|P(\xi_0)|^2 + 1), \forall \xi_0 \in \mathbb{R}^k.$$

#### Retour à la démonstration de l'inégalité maximale.

On montre maintenant comment on en déduit l'inégalité maximale pour l'opérateur  $K_b$  sans passer par la Proposition 2.11. En appliquant la transformation de Fourier partielle  $\mathcal{F}_{(x'',y) \rightarrow (\xi'',\eta)}$  en les variables  $(x'', y) = (x''_1, x''_2, y_1, y_2)$  à l'estimation (29), le théorème de Plancherel implique, pour tout  $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^8_{x',z,\xi'',\eta})$ ,

$$\begin{aligned} & \|\mathcal{F}_{(x'',y) \rightarrow (\xi'',\eta)} Z_{1,2} u\|^2 + \sum_{k=1}^2 \left( \|\mathcal{F}_{(x'',y) \rightarrow (\xi'',\eta)} (Z'_{k,1})^2 u\|^2 + \|\mathcal{F}_{(x'',y) \rightarrow (\xi'',\eta)} (Z''_{k,1})^2 u\|^2 \right) \\ & + \sum_{k,\ell=1}^2 \|\mathcal{F}_{(x'',y) \rightarrow (\xi'',\eta)} Z'_{k,1} Z''_{\ell,1} u\|^2 \leq C \left( \|\mathcal{F}_{(x'',y) \rightarrow (\xi'',\eta)} \tilde{K}_b u\|^2 + \|\mathcal{F}_{(x'',y) \rightarrow (\xi'',\eta)} u\|^2 \right), \end{aligned} \quad (37)$$

où les normes sont celles de l'espace  $L^2(\mathbb{R}^8)$ .

On pose  $\widehat{Z} = \mathcal{F}_{(x'',y) \rightarrow (\xi'',\eta)} Z \mathcal{F}_{(x'',y) \rightarrow (\xi'',\eta)}^{-1}$  pour tout  $Z$  polynôme de champs de vecteurs sur  $\mathbb{R}^8$ . En particulier, les opérateurs  $\widehat{Z}_{k,j}^\diamond$  avec  $k = 1, 2, j = 1, 2, 3$  et  $\diamond \in \{\emptyset, \prime, \prime\prime\}$  sont donnés par :

$$\begin{aligned} \widehat{Z}'_{1,1} &= \partial_{x'_1} & \widehat{Z}''_{1,1} &= i(\xi''_1 + x'_1 \eta_2) \\ \widehat{Z}'_{2,1} &= \partial_{x'_2} & \widehat{Z}''_{2,1} &= i(\xi''_2 + x'_2 \eta_2) \\ \widehat{Z}_{1,2} &= i\eta_1 + x'_1 \partial_{z_1} + x'_2 \partial_{z_2} & \widehat{Z}_{2,2} &= i\eta_2 \\ \widehat{Z}_{1,3} &= \partial_{z_1} & \widehat{Z}_{2,3} &= \partial_{z_2}. \end{aligned}$$

Alors l'estimation (37) prend la forme suivante :

$$\begin{aligned} \|\widehat{Z}_{1,2}w\|^2 + \sum_{k=1}^2 \left( \|(\widehat{Z}'_{k,1})^2w\|^2 + \|(\widehat{Z}''_{k,1})^2w\|^2 \right) + \sum_{k,\ell=1}^2 \|\widehat{Z}'_{k,1}\widehat{Z}''_{\ell,1}w\|^2 \\ \leq C \left( \|\widehat{K}_b w\|^2 + \|w\|^2 \right), \quad \forall w \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^8), \end{aligned} \quad (38)$$

Ensuite, pour montrer le passage de  $k = 8$  à  $k = 4$  avec des paramètres  $(\xi'', \eta) = (\xi''_0, \eta_0)$  dans l'estimation (38), on considère la famille de fonctions test suivante :

$$\mathbb{R}^8 \ni (x', z, \xi'', \eta) \rightarrow W_h(x', z, \xi'', \eta) = f(x', z) w_h(\xi'', \eta), \quad h > 0,$$

où  $w_h$  est définie en (33). Par application de l'inégalité (37) à la fonction  $W_h$ , on obtient

$$\begin{aligned} \|\widehat{Z}_{1,2}W_h\|^2 + \sum_{k=1}^2 \left( \|(\widehat{Z}'_{k,1})^2W_h\|^2 + \|(\widehat{Z}''_{k,1})^2W_h\|^2 \right) + \sum_{k,\ell=1}^2 \|\widehat{Z}'_{k,1}\widehat{Z}''_{\ell,1}W_h\|^2 \\ \leq C \left( \|\widehat{K}_b W_h\|^2 + \|W_h\|^2 \right). \end{aligned} \quad (39)$$

En procédant comme dans le cas préliminaire, on passe à la limite quand  $h \rightarrow 0$  dans l'estimation (39) et on déduit qu'il existe  $C > 0$  tel que pour tout  $(\xi''_0, \eta_0) \in \mathbb{R}^4$  et  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$

$$\begin{aligned} \sum_{k,\ell=1}^2 \|\widehat{Z}'_{k,1}\widehat{Z}''_{\ell,1}(\xi''_0, \eta_0)f\|^2 + \sum_{k=1}^2 \left( \|(\widehat{Z}'_{k,1})^2(\xi''_0, \eta_0)f\|^2 + \|(\widehat{Z}''_{k,1})^2(\xi''_0, \eta_0)f\|^2 \right) \\ + \|\widehat{Z}_{1,2}(\xi''_0, \eta_0)f\|^2 \leq C \left( \|\widehat{K}_b(\xi''_0, \eta_0)f\|^2 + \|f\|^2 \right), \end{aligned} \quad (40)$$

où les normes sont maintenant dans l'espace  $L^2(\mathbb{R}^4)$ .

Finalement, pour déduire l'estimation maximale (29), il suffit de choisir  $(\xi''_0, \eta_0) = (0, 0, 0, 1)$  et d'effectuer le changement de notation suivant :

$$\begin{aligned} x'_1 &\longleftrightarrow v_1 & x'_2 &\longleftrightarrow v_2 \\ z_1 &\longleftrightarrow x_1 & z_2 &\longleftrightarrow x_2. \end{aligned}$$

On en déduit alors l'estimation maximale (24).

### 3.4 Preuve du Théorème 1.7

#### 3.4.1 Première étape.

On fixe  $x_0 \in \mathbb{R}^2$  et on note  $\mathcal{B}_e(x_0) = b_0 \in \mathbb{R}$ . On rappelle l'opérateur  $K$

$$K = v \cdot \nabla_x - (v \wedge \mathcal{B}_e) \cdot \nabla_v - \Delta_v + v^2/4 - 1,$$

On commence par  $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$  avec  $\text{diam}(\text{Supp } u) \leq \varepsilon$ , on a

$$Ku = (K - K_{b_0})u + K_{b_0}u,$$

D'une part, on vérifie qu'il existe  $C > 0$  tel que :

$$\begin{aligned} \|(K - K_{b_0})u\| &= \|(\mathcal{B}_e - \mathcal{B}_e(x_0))(v_1 \partial_{v_2} - v_2 \partial_{v_1})u\| \\ &\leq \|\nabla_x \mathcal{B}_e\|_{L^\infty} |x - x_0| \|(v_1 \partial_{v_2} - v_2 \partial_{v_1})u\| \\ &\leq C \varepsilon \|(v_1 \partial_{v_2} - v_2 \partial_{v_1})u\|. \end{aligned} \quad (41)$$

On obtient alors l'estimation suivante :

$$\|(K - K_{b_0})u\| \leq C\varepsilon \|u\|_{\tilde{B}^2}$$

D'autre part, par l'inégalité (24) et le Théorème 2.20 au point  $x_0$ , on obtient que l'opérateur  $K_{b_0}$  est hypoelliptique maximal dans  $B(x_0, \varepsilon)$ . Donc l'opérateur  $K_{b_0}$  vérifie, pour une constante  $C > 0$  assez grande, l'estimation suivante

$$\|K_{b_0}u\| \geq \frac{1}{C} \|X_{1,2}u\| + \frac{1}{C} \sum_{k=1}^2 \left( \|(X'_{k,1})^2 u\| + \|(X''_{k,1})^2 u\| \right) + \frac{1}{C} \sum_{k,\ell=1}^2 \|X'_{k,1} X''_{\ell,1} u\| - C \|u\|, \quad (42)$$

Finalement, on observe que

$$\|Ku\| \geq \|K_{b_0}u\| - \|(K - K_{b_0})u\|,$$

En utilisant les inégalités (41) et (42) et en choisissant  $0 < \varepsilon < 1$ , on obtient alors qu'il existe  $C > 0$  telle que :

$$\begin{aligned} \|X_{1,2}u\| + \sum_{k=1}^2 \left( \|(X'_{k,1})^2 u\| + \|(X''_{k,1})^2 u\| \right) + \sum_{k,\ell=1}^2 \|X'_{k,1} X''_{\ell,1} u\| \\ \leq C (\|Ku\| + \|u\|), \quad \forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2) \text{ avec } \text{diam}(\text{Supp } u) \leq \varepsilon. \end{aligned} \quad (43)$$

### 3.4.2 Deuxième étape.

On introduit pour  $\varepsilon > 0$ , une partition de l'unité  $(\varphi_j)_{j=1}^{n_0}$  dans la variable d'espace  $x \in \mathbb{T}^2$  subordonnée à un recouvrement de  $\mathbb{T}^2$  par des boules  $B(x_j, \varepsilon)$  qui sont définies par :

$$B(x_j, \varepsilon) := \{x \in \mathbb{T}^2 / d(x, x_j) < \varepsilon\}, \quad \forall j = 1, \dots, n_0.$$

On a donc  $\text{Supp } \varphi_j \subset B(x_j, \varepsilon) \quad \forall j \in \{1, \dots, n_0\}$  et

$$\sum_{j=1}^{n_0} \varphi_j^2 = 1.$$

#### étape intermédiaire.

On va montrer l'estimation maximale suivante :

$$\begin{aligned} \|X_{1,2}\varphi_j u\| + \sum_{k=1}^2 \left( \|(X'_{k,1})^2 \varphi_j u\| + \|(X''_{k,1})^2 \varphi_j u\| \right) + \sum_{k,\ell=1}^2 \|X'_{k,1} X''_{\ell,1} \varphi_j u\| \\ \leq C (\|K\varphi_j u\| + \|\varphi_j u\|), \quad \forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2). \end{aligned} \quad (44)$$

Pour la montrer, on va revenir à l'identification entre  $u$  et  $\tilde{u}$  expliquée dans l'introduction. Pour  $j = 1, \dots, n_0$ , on peut identifier la fonction  $\varphi_j \in \mathcal{S}(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2)$ , avec  $\text{Supp } \varphi_j \subset B(x_j, \varepsilon)$ , à la fonction  $\tilde{\varphi}_j \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$  qui est  $\Gamma$ -périodique. Pour  $\varepsilon$  assez petit, les composantes connexes de  $\text{Supp } \tilde{\varphi}_j$  se décomposent de façon qu'il existe  $\tilde{x}_j$  et une fonction  $\tilde{\varphi}_{j,0}$  à support dans  $B(\tilde{x}_j, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^2$  tels que

$$\tilde{\varphi}_j = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^2 \times \{0\}} \tau_\alpha \tilde{\varphi}_{j,0},$$

où  $\tau_\alpha$  est la translation par  $\alpha$  et telle que

$$\|\varphi_j u\|_{L^2(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2)} = \|\tilde{\varphi}_{j,0} \tilde{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)}.$$

En appliquant l'estimation (43) à la fonction  $w = \tilde{\varphi}_{j,0} \tilde{u}$  avec  $u \in \mathcal{S}(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2)$  et observant que  $\text{diam}(\text{Supp } w) \leq \varepsilon$ , on obtient qu'il existe  $C > 0$  telle que :

$$\begin{aligned} \|X_{1,2}\tilde{\varphi}_{j,0} \tilde{u}\| + \sum_{k=1}^2 \left( \|(X'_{k,1})^2 \tilde{\varphi}_{j,0} \tilde{u}\| + \|(X''_{k,1})^2 \tilde{\varphi}_{j,0} \tilde{u}\| \right) + \sum_{k,\ell=1}^2 \|X'_{k,1} X''_{\ell,1} \tilde{\varphi}_{j,0} \tilde{u}\| \\ \leq C (\|K\tilde{\varphi}_{j,0} \tilde{u}\| + \|\tilde{\varphi}_{j,0} \tilde{u}\|). \end{aligned} \quad (45)$$

On note que  $X_{j,2}, X_{j,3}, X'_{j,1}$ , et  $X''_{j,1}$ , avec  $j = 1, 2$  sont des opérateurs différentiels. D'après l'identification et la définition des dérivées sur le tore, on a alors

$$\begin{aligned} \|\widetilde{X_{1,2}\varphi_j u}\| + \sum_{k=1}^2 \left( \|\widetilde{(X'_{k,1})^2\varphi_j u}\| + \|\widetilde{(X''_{k,1})^2\varphi_j u}\| \right) + \sum_{k,\ell=1}^2 \|\widetilde{X'_{k,1}X''_{\ell,1}\varphi_j u}\| \\ \leq C \left( \|\widetilde{K\varphi_j u}\| + \|\varphi_j u\| \right), \end{aligned} \quad (46)$$

Finalement, par l'équivalence entre la norme  $\|\cdot\|_{L^2_{\text{per}}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)}$  et la norme  $\|\cdot\|_{L^2(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2)}$ , on en déduit l'estimation (44).

**étape intermédiaire :** Le but de cette étape est de montrer les deux estimations suivantes :

$$\forall \eta > 0, \exists C_\eta > 0 / \forall u \in \tilde{B}^2, \|u\|_{\tilde{B}^1} \leq \eta \|u\|_{\tilde{B}^2} + C_\eta \|u\|, \quad (47)$$

$$\forall \varphi \in C^\infty(\mathbb{T}_x^2), \exists C_\varphi > 0 / \|[K, \varphi]u\| \leq C_\varphi \|u\|_{\tilde{B}^1}. \quad (48)$$

Soit  $u \in \mathcal{S}(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2)$ , d'après la définition de la norme  $\|\cdot\|_{B^1}$ , on a

$$\begin{aligned} \|u(x, \cdot)\|_{B^1}^2 &= \sum_{|\alpha|+|\beta|\leq 1} \|v^\alpha \partial_v^\beta u(x, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \\ &= \sum_{|\alpha|+|\beta|\leq 1} \langle v^\alpha \partial_v^\beta u(x, \cdot), v^\alpha \partial_v^\beta u(x, \cdot) \rangle, \end{aligned}$$

En effectuant une intégration par parties par rapport à  $v$ , on a, pour tout  $x \in \mathbb{T}^2$ ,

$$\begin{aligned} \|u(x, \cdot)\|_{B^1}^2 &= \sum_{|\alpha|+|\beta|\leq 1} \left\langle v^\alpha u(x, \cdot), (-1)^{|\beta|} \partial_v^\beta \left( v^\alpha \partial_v^\beta u(x, \cdot) \right) \right\rangle \\ &= \sum_{|\alpha|+|\beta|\leq 1} \left\langle u(x, \cdot), (-1)^{|\beta|} v^\alpha \partial_v^\beta \left( v^\alpha \partial_v^\beta u(x, \cdot) \right) \right\rangle, \end{aligned}$$

Ensuite, en utilisant la formule de Leibniz, l'égalité précédente prend la forme suivante :

$$\|u(x, \cdot)\|_{B^1}^2 = \sum_{|\alpha'|+|\beta'|\leq 2} C_{\alpha'} C_{\beta'} \left\langle u(x, \cdot), v^{\alpha'} \partial_v^{\beta'} u(x, \cdot) \right\rangle.$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on obtient qu'il existe  $C > 0$  tel que :

$$\|u(x, \cdot)\|_{B^1}^2 \leq C \|u(x, \cdot)\| \|u(x, \cdot)\|_{B^2}.$$

Finalement, par l'identité remarquable on obtient que pour tout  $\eta > 0$ , il existe  $C_\eta > 0$  tel que :

$$\forall \eta > 0, \|u(x, \cdot)\|_{B^1}^2 \leq \eta \|u(x, \cdot)\|_{B^2}^2 + C_\eta \|u(x, \cdot)\|^2,$$

puis, en intégrant en  $x$  sur le tore  $\mathbb{T}^2$ , on en déduit l'estimation (47).

En remarquant maintenant que le commutateur vaut

$$[K, \varphi] = [v \cdot \nabla_x, \varphi] = v \cdot \nabla_x \varphi,$$

d'après l'égalité précédente et en appliquant l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\|[K, \varphi]u\| = \|v \cdot \nabla_x \varphi u\| \leq \|\nabla_x \varphi\|_{L^\infty(\mathbb{T}^2)} \|u\|_{\tilde{B}^1} \leq C_\varphi \|u\|_{\tilde{B}^1}.$$

**Fin de la preuve :** Soit  $B_e \in \text{Lipsch}(\mathbb{T}^2)$  et  $u \in S(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2)$ . On va contrôler terme par terme. Par la partition de l'unité et par l'application de l'inégalité (44), on obtient qu'il existe  $C > 0$  tel que

$$\|u\|_{\tilde{B}^2}^2 = \sum_{j=1}^{n_0} \|\varphi_j u\|_{\tilde{B}^2}^2 \leq C \sum_{j=1}^{n_0} (\|K \varphi_j u\|^2 + \|\varphi_j u\|^2), \quad (49)$$

En utilisant la définition du commutateur, on obtient

$$\sum_{j=1}^{n_0} \|K \varphi_j u\|^2 \leq 2 \sum_{j=1}^{n_0} (\|[\varphi_j, K]u\|^2 + \|\varphi_j K u\|^2).$$

D'après l'estimation (47)-(48), on obtient, pour tout  $\eta > 0$ , l'existence de  $C_\eta > 0$  telle que :

$$\sum_{j=1}^{n_0} \|K \varphi_j u\|^2 \leq C_\eta \|K u\|^2 + \eta \|u\|_{B^2}^2. \quad (50)$$

En injectant l'inégalité (50) dans l'inégalité (49), on en déduit que pour tout  $\eta > 0$ , il existe  $C_\eta > 0$  telle que :

$$\|u\|_{\tilde{B}^2}^2 \leq C_\eta \|K u\|^2 + \eta \|u\|_{B^2}^2 + C \|u\|^2,$$

Ensuite, en utilisant les mêmes techniques, on a

$$\begin{aligned} \|v \cdot \nabla_x u\|^2 &= \sum_{j=1}^{n_0} \|\varphi_j(v \cdot \nabla_x u)\|^2 \\ &\leq 2 \sum_{j=1}^{n_0} (\|[\varphi_j, v \cdot \nabla_x]u\|^2 + \|(v \cdot \nabla_x)(\varphi_j u)\|^2) \end{aligned}$$

En utilisant les inégalités (50) et (44), on obtient qu'il existe  $C' > 0$  et pour tout  $\eta' > 0$ ,  $C_{\eta'} > 0$  telles que :

$$\begin{aligned} \|v \cdot \nabla_x u\|^2 &\leq \sum_{j=1}^{n_0} \left( C_{\eta'} \|\varphi_j K u\|^2 + \eta' \|\varphi_j u\|_{B^2}^2 + \|\varphi_j u\|^2 \right) \\ &\leq C_{\eta'} \|K u\|^2 + \eta' \|u\|_{B^2}^2 + C' \|u\|^2. \end{aligned}$$

Il reste à estimer le terme suivant

$$\|B_e(v_1 \partial_{v_2} - v_2 \partial_{v_1})u\|^2 = \sum_{j=1}^{n_0} \|B_e(v_1 \partial_{v_2} - v_2 \partial_{v_1})(\varphi_j u)\|^2.$$

Par application directe des inégalités (44) et (50), on obtient qu'il existe  $C, C'' > 0$  et pour tout  $\eta'' > 0$ ,  $C_{\eta''} > 0$  telles que :

$$\begin{aligned} \|B_e(v_1 \partial_{v_2} - v_2 \partial_{v_1})u\|^2 &\leq C \sum_{j=1}^{n_0} (\|K(\varphi_j u)\|^2 + \|u\|^2) \\ &\leq C_{\eta''} \|K u\|^2 + \eta'' \|u\|_{B^2}^2 + C'' \|u\|^2. \end{aligned}$$

Choisissant  $\eta, \eta'$  et  $\eta'' > 0$  tels que  $\eta + \eta' + \eta'' < 1$ , on obtient donc l'existence d'une constante  $\tilde{C} > 0$  tel que :

$$\|(v \cdot \nabla_v - B_e(v_1 \partial_{v_2} - v_2 \partial_{v_1}))u\| + \|u\|_{B^2} \leq \tilde{C}(\|K u\| + \|u\|), \quad \forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2).$$

## 4 Démonstration du résultat principal quand $d = 3$

### 4.1 Préliminaires

On présente maintenant la démonstration du Théorème 1.7 quand  $d = 3$ , et on va expliquer les différences dans les étapes de la preuve, avec celles dans le cas où  $d = 2$ . L'approche est la suivante, on remplace d'abord  $B_e(x)$  par

un vecteur constant  $b := (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$  fixé, et on montre une estimation globale pour le modèle suivant :

$$K_b = v \cdot \nabla_x + (v \wedge b) \cdot \nabla_v - \Delta_v + v^2/4 - 3/2. \quad (51)$$

On définit la transformation canonique suivante

$$V_M : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, \quad (x, v) \longrightarrow V_M(x, v) := (Mx, (M^{-1})^t v),$$

où  $M$  est la matrice de rotation qui s'obtient par la multiplication entre les deux matrices de rotations  $R(\theta_1)$  et  $R(\theta_2)$  autour des axes  $(Ox)$  et  $(Oz)$  et d'angles de rotation  $\theta_1$  et  $\theta_2$  respectivement

$$R(\theta_1) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ 0 & \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{pmatrix} \quad R(\theta_2) := \begin{pmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où les deux angles sont définis par

$$\theta_1 = \arctan(b_1/b_2) \quad , \quad \theta_2 = \arctan(\sqrt{b_1^2 + b_2^2}/b_3).$$

On note que les opérateurs différentiels suivants sont invariants par conjugaison par la transformation  $V_M$  :

$$V_M (v \cdot \nabla_x) V_{M^{-1}} = v \cdot \nabla_x \quad \text{et} \quad V_M (-\Delta_v + v^2/4 - 3/2) V_{M^{-1}} = -\Delta_v + v^2/4 - 3/2.$$

Par construction de la matrice  $M$ , la conjugaison de l'opérateur magnétique donne la forme suivante :

$$V_M (v \wedge b) \cdot \nabla_v V_{M^{-1}} = |b|(v_1 \partial_{v_2} - v_2 \partial_{v_1}).$$

Par conséquent, la conjugaison de l'opérateur de Fokker-Planck-magnétique défini en (51), par l'opérateur de transformation canonique  $V_M$ , nous donne l'opérateur suivant

$$Q_{|b|} := V_M K_b V_{M^{-1}} = v \cdot \nabla_x + |b|(v_1 \partial_{v_2} - v_2 \partial_{v_1}) - \Delta_v + v^2/4 - 3/2, \quad (52)$$

où on désigne par  $|b|$  la norme euclidienne du vecteur  $b \in \mathbb{R}^3$ .

On remarque que l'espace  $\tilde{B}^2$  est invariant par rotation. Les estimations maximales pour  $K_b$  sont donc équivalentes aux estimations maximales pour  $Q_{|b|}$  (avec contrôle uniforme des constantes).

Comme dans le cas  $d = 2$ , la démonstration consiste à construire une algèbre de Lie graduée  $\mathcal{G}$  de rang 3, et, en tout point  $x \in \mathbb{T}^3$ , un élément  $\mathcal{Q}_{|b|}$  de  $\mathcal{U}_2(\mathcal{G})$  hypoelliptique. On déduira de l'estimation maximale obtenue pour chaque  $\mathcal{Q}_{|b|}$ , une estimation maximale pour l'opérateur  $Q_{|b|}$ .



## 4.2 Construction de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ :

On se met dans le cadre de la Proposition 2.11. On cherche donc une algèbre de Lie graduée  $\mathcal{G}$  de type 2 et de rang 3, une sous-algèbre  $\mathcal{H}$ , un élément  $\tilde{Q}_b$  dans  $\mathcal{U}_2(\mathcal{G})$  et une forme linéaire  $\ell$  tels que

$$\pi_{\ell, \mathcal{H}}(\tilde{Q}_b) = Q_b.$$

Pour cela, on détermine les conditions nécessaires sur les crochets entre les éléments générateurs de cette algèbre. Dans l'écriture de  $K_b$  on voit apparaître les opérateurs différentiels de degré 1 à coefficients polynomiaux suivants :

$$\begin{aligned} X'_{1,1} &= \partial_{v_1} & X''_{1,1} &= iv_1 \\ X'_{2,1} &= \partial_{v_2} & X''_{2,1} &= iv_2 \\ X'_{3,1} &= \partial_{v_3} & X''_{3,1} &= iv_3 \\ X_{1,2} &= v \cdot \nabla_x \end{aligned} \quad (53)$$

$Q_b$  s'écrit en effet comme polynôme de ces sept opérateurs différentiels

$$\begin{aligned} Q_b &= X_{1,2} - \sum_{k=1}^3 \left( (X'_{k,1})^2 + \frac{1}{4}(X''_{k,1})^2 - \frac{i}{4}(X'_{k,1}X''_{k,1} - X''_{k,1}X'_{k,1}) \right) \\ &\quad - i|b| \left( X'_{1,1}X''_{2,1} - X'_{2,1}X''_{1,1} \right). \end{aligned} \quad (54)$$

On regarde maintenant l'algèbre de Lie engendrée par ces sept opérateurs et leurs crochets. Ceci nous conduit à introduire quatre nouveaux éléments :

$$\begin{aligned} X_{2,2} &= [X'_{1,1}, X''_{1,1}] = [X'_{2,1}, X''_{2,1}] = i & X_{1,3} &= [X_{1,2}, X'_{1,1}] = \partial_{x_1} \\ X_{2,3} &= [X_{1,2}, X'_{2,1}] = \partial_{x_2} & X_{3,3} &= [X_{1,2}, X'_{3,1}] = \partial_{x_3}. \end{aligned}$$

On observe aussi les relations de commutateurs triviales comme

$$[X'_{1,1}, X'_{2,1}] = [X''_{1,1}, X''_{2,1}] = [X'_{j,1}, X_{k,3}] = [X''_{j,1}, X_{k,3}] = [X_{k,3}, X_{2,2}] = 0,$$

pour tout  $j, k = 1, 2, 3$ .

On construit alors une algèbre de Lie  $\mathcal{G}$  stratifiée de type 2 vérifiant les mêmes relations de commutateurs. Plus précisément  $\mathcal{G}$  est stratifiée de type 2 et nilpotente de rang 3, dont l'espace vectoriel sous-jacent est  $\mathbb{R}^{11}$ , où  $\mathcal{G}_1$  est engendrée par  $Y'_{1,1}, Y'_{2,1}, Y'_{3,1}, Y''_{1,1}, Y''_{2,1}$  et  $Y''_{3,1}$ ,  $\mathcal{G}_2$  est engendré par  $Y_{1,2}$  et  $Y_{2,2}$  et  $\mathcal{G}_3$  est engendrée par  $Y_{1,3}, Y_{2,3}$  et  $Y_{3,3}$ . Les lois de l'algèbre sont

données par :

$$Y_{2,2} = [Y'_{1,1}, Y''_{1,1}] = [Y'_{2,1}, Y''_{2,1}], \quad Y_{1,3} = [Y_{1,2}, Y'_{1,1}], \quad (55)$$

$$Y_{2,3} = [Y_{1,2}, Y'_{2,1}], \quad Y_{3,3} = [Y_{1,2}, Y'_{3,1}], \quad (56)$$

$$[Y'_{1,1}, Y'_{2,1}] = [Y''_{1,1}, Y''_{2,1}] = 0, \quad (57)$$

$$[Y'_{j,1}, Y_{k,3}] = [Y''_{j,1}, Y_{k,3}] = [Y_{k,3}, Y_{2,2}] = \dots = 0, \quad \forall j, k = 1, 2, 3. \quad (58)$$

On vérifie que l'application  $\pi$  (avec la convention que si  $\diamond = \emptyset$  il n'y a pas d'exposant)

$$\pi(Y_{i,j}^\diamond) = X_{i,j}^\diamond \quad \text{avec } i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3 \text{ et } \diamond \in \{\emptyset, \prime, \prime\prime\} \quad (59)$$

définit une représentation  $\pi$  de  $\mathcal{G}$ . On observe maintenant que notre représentation  $\pi$  peut se réécrire sous la forme

$$\begin{aligned} \pi(Y) &= P_1(Y)\partial_{v_1} + P_2(v_1, Y)\partial_{v_2} + P_3(v_1, v_2, Y)\partial_{v_3} \\ &\quad + P_4(v_1, v_2, v_3, Y)\partial_{x_1} + P_5(v_1, v_2, v_3, x_1, Y)\partial_{x_2} \\ &\quad + P_6(v_1, v_2, v_3, x_1, x_2, Y)\partial_{x_3} + Q'(v_1, v_2, v_3, x_1, x_2, x_3, Y), \end{aligned}$$

où pour tout  $Y \in \mathcal{G}$ , il existe  $a_i, b_i, \beta, \gamma, \alpha_i \in \mathbb{R} \quad \forall i = 1, 2, 3$  tels que

$$\begin{aligned} Y &= a_1 Y'_{1,1} + a_2 Y'_{2,1} + a_3 Y'_{3,1} + b_1 Y''_{1,1} + b_2 Y''_{2,1} + b_3 Y''_{3,1} \\ &\quad + \beta Y_{1,2} + \gamma Y_{2,2} \\ &\quad + \alpha_1 Y_{1,3} + \alpha_2 Y_{2,3} + \alpha_3 Y_{3,3}, \end{aligned}$$

et les polynômes  $P_j$  avec  $j = 1, \dots, 6$  et  $Q'$  sont définis par

$$\begin{aligned} P_1(Y) &= a_1, \quad P_2(v_1, Y) = a_2, \quad P_3(v_1, v_2, Y) = a_3 \\ P_4(v_1, v_2, v_3, Y) &= cv_1 + \alpha_1, \quad P_5(v_1, v_2, x_1, Y) = \beta v_2 + \alpha_2, \\ P_6(v_1, v_2, v_3, x_1, x_2, Y) &= cv_3 + \alpha_3 \text{ et } Q'(v, x, Y) = b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_3 v_3 + d. \end{aligned}$$

En appliquant la Proposition 2.11, on obtient alors  $\pi \equiv \pi_{\ell, \mathcal{H}}$  avec

$$\ell \in \mathcal{G}^*, \quad \langle \ell, Y \rangle = Q'(0, Y) = d,$$

$$\mathcal{H} := \{Y \in \mathcal{G} / P_1(0, Y) = \dots = P_6(0, Y) = 0\} = \text{Vect}(Y''_{1,1}, Y''_{2,1}, Y''_{3,1}, Y_{1,2}, Y_{2,2}),$$

Retournons à notre opérateur  $Q_b$  qui a été écrit comme un polynôme de champs de vecteurs  $\{X_{j,2}, X_{j,3}, X'_{j,1}, X''_{j,1}\}_{j=1,2,3}$  dans (17). On définit alors

$\tilde{Q}_b$  comme le même polynôme mais cette fois-ci fonction des champs de vecteurs  $\{Y_{j,2}, Y_{j,3}, Y'_{j,1}, Y''_{j,1}\}_{j=1,2,3}$  comme suit

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_{|b|} = Y_{1,2} - \sum_{k=1}^3 \left( (Y'_{k,1})^2 + \frac{1}{4}(Y''_{k,1})^2 - \frac{i}{4}(Y'_{k,1}Y''_{k,1} - Y''_{k,1}Y'_{k,1}) \right) \\ - i|b| \left( Y'_{1,1}Y''_{2,1} - Y'_{2,1}Y''_{1,1} \right), \end{aligned} \quad (60)$$

et on vérifie que

$$\pi_{\ell, \mathcal{H}}(\tilde{K}_b) = K_b.$$

### 4.3 Vérification du critère de Rockland

Soit  $\pi$  une représentation unitaire sur  $G$  dans  $V_\pi$ . On va montrer que l'opérateur  $\pi(\tilde{Q}_{|b|})$  est un opérateur injectif dans l'espace  $\mathcal{S}_\pi$  des vecteurs  $C^\infty$  de la représentation, s'identifie quand  $\pi$  est irréductible à  $S(\mathbb{R}^{k(\pi)})$ . Soit  $u \in S(\mathbb{R}^{k(\pi)})$  tel que

$$\pi(\tilde{Q}_{|b|})u = 0.$$

En appliquant les techniques utilisées dans la Section 3.2, on vérifie pour un système de générateurs la propriété suivante :

$$\pi(Y_{i,j}^\diamond)u = 0 \quad \forall i, j = 1, 2, 3 \text{ et } \diamond \in \{\emptyset, ', ''\}.$$

D'après la Remarque 2.18 dans le cas stratifié de type 2, on en déduit que

$$\pi(Y)u = 0, \quad \forall Y \in \mathcal{G},$$

et que  $u = 0$ .

L'opérateur  $\pi(\tilde{Q}_{|b|})$  est donc injectif dans l'espace  $\mathcal{S}_\pi$  pour toute représentation irréductible et non triviale  $\pi$ . Par conséquent, d'après le Théorème 2.17 l'opérateur  $\tilde{Q}_{|b|}$  est hypoelliptique maximal dans le groupe  $G$ . En appliquant le Théorème 2.19 ( $Q_{|b|} = \pi_{\ell, \mathcal{H}}(\tilde{Q}_{|b|})$ ), on obtient l'inégalité suivante

$$\begin{aligned} \|X_{1,2}u\| + \sum_{k=1}^2 \left( \|(X'_{k,1})^2u\| + \|(X''_{k,1})^2u\| \right) + \sum_{k,\ell=1}^2 \|X'_{k,1}X''_{\ell,1}u\| \\ \leq C (\|Q_{|b|}u\| + \|u\|), \quad \forall u \in S(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3). \end{aligned} \quad (61)$$

Par la conjugaison par la transformation canonique  $V_{M^{-1}}$  de l'opérateur  $Q_{|b|}$ , on a alors

$$\begin{aligned} \|X_{1,2}u\| + \sum_{k=1}^3 \left( \|(X'_{k,1})^2u\| + \|(X''_{k,1})^2u\| \right) + \sum_{k,\ell=1}^3 \|X'_{k,1}X''_{\ell,1}u\| \\ \leq C (\|K_bu\| + \|u\|), \quad \forall u \in S(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3). \end{aligned} \quad (62)$$

## 4.4 Fin de la preuve

Pour la suite de la preuve, il n’y a aucune différence avec le cas  $d = 2$ , on utilise une partition de l’unité et on contrôle l’erreur, afin d’obtenir l’estimation maximale (3) pour l’opérateur initial  $K$  dans l’espace  $\mathcal{S}(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)$ . Pour plus de détails sur un résultat similaire sans champ magnétique mais avec un potentiel électrique, nous renvoyons au chapitre 9 du livre de B.Helffer et F.Nier [4].

## Références

- [1] R Beals. Opérateurs invariants hypoelliptiques sur un groupe de lie nilpotent. *Séminaire Goulaouic-Schwartz 1976/1977 : équations aux dérivées partielles et analyse fonctionnelle*, pages 1–8, 1976. [15](#)
- [2] P. Bolley, J. Camus, and J. Nourrigat. La condition de Hörmander-Kohn pour les opérateurs pseudo-différentiels. *Communications in Partial Differential Equations*, 7(2) :197–221, 1982. [6](#), [17](#)
- [3] A.D. Fokker. *Ann. d. Physik*, 43 :812, 1914. [1](#)
- [4] Bernard Helffer and Francis Nier. *Hypoelliptic estimates and spectral theory for Fokker-Planck operators and Witten Laplacians*. Springer, 2005. Lecture Notes.. [1](#), [35](#)
- [5] B Helffer and F Nourrigat. Hypoellipticité pour des groupes nilpotents de rang de nilpotence 3. *Communications in Partial Differential Equations*, 3(8) :643–743, 1978. [7](#), [15](#)
- [6] B. Helffer and J. Nourrigat. Caractérisation des opérateurs hypoelliptiques homogènes. *Communications in Partial Differential Equations*, 4(8) :899–958, 1979. [15](#), [17](#)
- [7] B. Helffer et J. Nourrigat. Approximation d’un système de champs de vecteurs et applications à l’hypoellipticité. *Arkiv för Matematik*, 17 (1-2), 1979. [16](#)
- [8] B. Helffer and J.Nourrigat. Hypoellipticité maximale pour des opérateurs polynômes de champs de vecteurs. Birkhäuser *Progress in Mathematics*, 58, 1985. [11](#), [12](#), [15](#), [17](#)
- [9] F. Hérau and F. Nier. Isotropic hypoellipticity and trend to equilibrium for the Fokker-Planck equation with a high-degree potential. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 171(2) :151–218, 2004. [1](#)
- [10] Z. Karaki. Trend to the equilibrium for the Fokker-Planck system with a strong external magnetic field. [2](#), [3](#)

- [11] Alexander A Kirillov. Unitary representations of nilpotent lie groups. *Russian mathematical surveys*, 17(4) :53, 1962. [8](#)
- [12] M. Planck. *Sitzber. Preuss. Akad. Wiss.*, page 324, 1917. [1](#)
- [13] C. Rockland. Hypoellipticity on the Heisenberg group-representation-theoretic criteria. *Transactions of the American Mathematical Society*, 240 :1–52, 1978. [15](#)
- [14] L.P. Rothschild. A criterion for hypoellipticity of operators constructed from vector fields. *Communications in Partial Differential Equations*, 4(6) :645–699, 1979. [17](#)
- [15] L. P. Rothschild and E.M. Stein. Hypoelliptic differential operators and nilpotent groups. *Acta Mathematica*, 137(1) :247–320, 1976. [7](#), [16](#), [17](#)