



HAL
open science

Théorème de Gauss-Bonnet pour les surfaces : vers une philosophie intrinsèque de la géométrie différentielle (Partie I)

Joël Merker, Jean-Jacques Szczeciniarz

► To cite this version:

Joël Merker, Jean-Jacques Szczeciniarz. Théorème de Gauss-Bonnet pour les surfaces : vers une philosophie intrinsèque de la géométrie différentielle (Partie I). 2019. hal-01971403

HAL Id: hal-01971403

<https://hal.science/hal-01971403>

Preprint submitted on 7 Jan 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Théorème de Gauss-Bonnet pour les surfaces : vers une philosophie intrinsèque de la géométrie différentielle (Partie I)

Joël MERKER¹ et Jean-Jacques SZCZECINIARZ²

Université Paris-Sud et Université Paris Diderot

RÉSUMÉ. À juste titre, Hegel et Schopenhauer ont critiqué sévèrement les diverses démonstrations du théorème $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = \pi$ d'Euclide, leur adressant le reproche d'introduire de façon arbitraire des artifices de tracé qui conduisent le philosophe spéculatif à un sentiment de malaise en présence de « tours d'escamotage » au cours desquels la vérité « s'introduit par la petite porte dérobée ».

En élaborant des analyses philosophiques motivées et *conceptuellement génétiques* qui seront internes à la contexture métaphysique même de la pensée mathématique — trop souvent oblitérée par des pratiques réductrices —, nous argumenterons au contraire que la vérité « entre par la grande porte » dans les théories mathématiques, et ce, en nous référant au développement ultime du théorème d'Euclide, l'un des plus importants de toute la géométrie différentielle contemporaine, à savoir le *Théorème de Gauss-Bonnet*, emblème paradigmatique d'une liaison, au sens lautmanien du terme, entre *Topologie* et *Géométrie*.

Effectivement, l'énoncé du *Théorème de Gauss-Bonnet* fait surgir une forme inattendue de *réflexivité* — concept majeur et universel de philosophie des mathématiques —, de sorte que la géométrie se contemple elle-même, atteignant une double polarité intuitive en elle-même. C'est donc le concept révolutionnaire et protéiforme de *courbure gaussienne* qui déclenche une conceptualité nouvelle au-dessus de la géométrie euclidienne.

Ici, l'égalité entre intégrale de courbure totale et caractéristique d'Euler indique qu'un concept de nature topologique est *égal* à un nombre qui exprime un concept de nature géométrique. Ceci démontre encore que les mathématiques se développent par intervention de disciplines différentes les unes sur les autres, comme outils d'observation, structuration formelle, nouveaux points de vue unificateurs. Grâce aux trajectoires multiples que permet l'architecture mobile des mathématiques, nous disposons toujours d'une démultiplication des significations des concepts mathématiques.

Toute une force d'embrassement des êtres rationnels est à l'œuvre dans les mathématiques, qui expriment et réalisent un désir continué de *puissance synthétique*. La conceptualisation est certes une première force d'embrassement, mais les êtres, toujours, s'y soustraient, en partie, car le concept, en mathématiques, n'est souvent qu'une vue partielle, d'autres sous-concepts demeurant non-vus, d'autres aspects intrinsèques demeurant non-conceptualisés.

Seules les synthèses complètes telles que le *Théorème de Gauss-Bonnet* embrassent réellement les êtres mathématiques.

Cette force d'entraînement hors de soi que manifeste la pensée mathématique dans sa puissance d'expansion est ici propulsée à travers cette unité grâce aux multiples ressorts de la topologie et de la géométrie. Ainsi, la question des fondements de la géométrie (euclidienne) se trouve-t-elle entièrement transformée dans les nouveaux cadres théoriques de la géométrie différentielle, fondée par le moyen de ses extensions synthétiques, qui en sont autant d'accroissements de connaissances.

1. Énoncé du théorème de Gauss-Bonnet classique

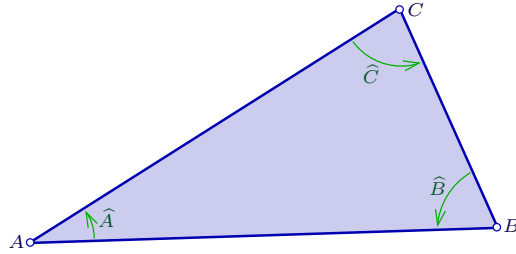
One of the star theorems of differential geometry is the Gauss-Bonnet theorem, which for a compact oriented surface S states that :

$$\int_S K_G dA = 2\pi \chi(S). \quad \text{Michael SPIVAK}$$

Le théorème de Gauss-Bonnet propose une forme aboutie et d'une certaine manière ultime d'un théorème classique d'Euclide.

1. Laboratoire de Mathématiques d'Orsay, Université Paris-Sud, CNRS, Université Paris-Saclay, 91405 Orsay Cedex, France. joel.merker@math.u-psud.fr

2. Laboratoire SPHERE, CNRS, Université Paris Diderot (Paris 7), 75013 Paris, France. jean-jacques.szczeciniarz@univ-paris-diderot.fr



Étant donné un triangle $T = ABC \subset \mathcal{P}$ dans le plan euclidien $\mathcal{P} \cong \mathbb{R}^2$ ayant trois sommets distincts A, B, C , ce théorème maintenant considéré par les géomètres contemporains comme si élémentaire qu'il s'inscrit presque comme immédiateté perceptuelle dans leur intuition constituante, énonce que la somme des angles de T en ses sommets vaut toujours :

$$\pi = \hat{A} + \hat{B} + \hat{C},$$

la mesure des angles s'effectuant en *radians*, avec la normalisation standard $\pi \text{ rad} = 180^\circ$.

Cette découverte ancienne constitue une des racines fondamentales de la pensée mathématique, en tant que cette pensée est un rapport au monde qui cherche à capturer visuellement et mentalement des formes, des invariances, des structures, quelle que soit l'étendue et la complexité du champ ontologique sous-jacent.

Ici, au-delà de l'énonciation universelle figeante, et au-delà de la quantification universelle résumable par l'emploi de quelque symbolisme logique qui soit :

$$\forall A \in \mathcal{P}, \quad \forall B \in \mathcal{P}, \quad \forall C \in \mathcal{P},$$

il faut s'imaginer une variabilité mobile de tous les triangles possibles $ABC \subset \mathcal{P}$ dans le plan, faire voir à son intuition mathématique interne trois points libres bouger en même temps que les trois côtés AB, BC, CA du triangle T se déplacent comme trois membres articulés, et se représenter ainsi par l'*entendement d'appropriation de contenu géométrique* qu'une constance quantitative s'observe dans une variabilité *a priori* inorganisée. Cette variation se fait dans (le) un plan. Si bien qu'elle peut être vue comme une exploration du plan, de ce qui le structure comme étendue 'plate'. Et une compréhension intellectuelle, appropriation d'un contenu qui est dans cette appropriation même géométrique et qui en l'occurrence met en évidence cette constance. On doit pouvoir dire que la base d'une appropriation de contenu géométrique est une constance (quantitative) dans une variabilité inorganisée.

Question 1.1. La mentalisation mathématique est-elle transmissible par le texte ? par le langage ? par la diagrammatisation ?

Cette intégration par la pensée qui se traduit dans une expression de la conscience se construit dans la nature même de la constitution qui met en évidence ces invariants premiers. Il s'agit de la façon dont l'étendue (concept travaillé par tous les philosophes) vient à l'espace, comme quantité étendue. Nous reprendrons cette question plus bas en situant le travail de Kant.

Il faut rappeler que le théorème d'Euclide informe toute l'histoire de la philosophie. Hegel en critique la démonstration et lui adresse le reproche d'introduire de façon arbitraire un artifice extérieur, à savoir le tracé d'une parallèle à la base du triangle, laquelle est ensuite utilisée pour faire jouer le théorème de Thalès au moyen de paires d'angles alternes-internes *égaux*. considérons une critique représentative de l'histoire de la philosophie, celle de Schopenhauer.

Nous sommes certainement forcés de reconnaître, en vertu du principe de contradiction que ce qu'Euclide démontre est bien tel qu'il le démontre ; mais nous n'apprenons pas pourquoi il en est ainsi. Aussi éprouve-t-on presque le même sentiment de malaise qu'on éprouve après avoir assisté à des tours d'escamotage, auxquels en effet, la plupart des démonstrations d'Euclide ressemblent étonnamment. Presque toujours, chez lui, la vérité s'introduit par la petite porte dérobée, car elle résulte, par accident, de quelque circonstance accessoire ; dans certains cas la preuve par l'absurde ferme successivement toutes les portes, et n'en laisse ouverte qu'une seule, par laquelle nous sommes contraints de passer par ce seul motif. Dans d'autres, comme dans le théorème de Pythagore, on tire des lignes, on ne sait pour quelle raison ; on s'aperçoit plus tard que c'étaient des nœuds coulants qui serrent à l'improviste, pour surprendre le comportement du curieux qui cherchait à s'instruire ; celui-ci tout saisi, est obligé d'admettre une chose dont la contexture intime lui est encore parfaitement incomprise, et cela à tel point qu'il qu'il pourra étudier Euclide en entier sans avoir une compréhension effective des relations de l'espace.³

D'ailleurs, il existe de nombreuses autres démonstrations de ce théorème de géométrie du triangle, comme celle qui consiste à glisser le long des côtés en effectuant une rotation à chaque angle, mais à toutes ces démonstrations, avec Hegel et Schopenhauer, on pourrait aussi adresser le même reproche d'artificialité imprévisible des constructions. Certainement, il faudrait examiner plus en profondeur cette question de l'« arbitraire » de la démonstration, lequel, chez Hegel, est simplement une preuve (ou une confirmation) du caractère arbitraire et dogmatique des mathématiques — à la différence, selon lui, de la philosophie. Mais cela nous engagerait dans des interrogations sans limites sur l'instantanéité mystérieuse du caractère *a posteriori* de tout acte mathématique guidé par l'intelligence des contenus.

Pour l'instant, il nous faut dire que l'arbitraire est ce dont tout mathématicien essaie de se défaire en réalisant des démonstrations les plus intrinsèques possible, et de là, nous allons tenter d'apporter une réponses aux objections philosophiques formulées plus haut qui critiquent la nature des mathématiques. De ce point de vue il peut être dit que la géométrie que nous allons examiner « tend vers la philosophie » et présente dans son mouvement même une expression philosophique et un appel à la philosophie. C'est pourquoi il est souvent aisé d'attribuer aux mathématiques elles-mêmes les propriétés que Hegel repère dans la philosophie elle-même.

En se plaçant d'un point de vue supérieur qui embrasse une multiplicité de géométries possibles, il s'avère que le théorème d'Euclide est d'abord et avant tout une expression de la nature « euclidienne » du plan. Et que l'introduction — considérée comme arbitraire ou extérieure — d'une parallèle à un côté du triangle correspond à une autre expression de cette nature euclidienne. Comme nous allons le voir, les métriques riemanniennes, les connexions symétriques, et le théorème de Gauss-Bonnet permettent en effet de mettre en évidence des modulations thématiques éclairantes sur la diversité ontologique des géométries possibles.

Par conséquent, en se plaçant donc d'un point de vue mathématique « relevé » — dans un sens proche de l'*Aufhebung* hégélienne — qui tient et doit tenir compte d'ascensions ontologiques existantes, puisque le théorème d'Euclide peut et doit être vu comme l'expression d'une propriété essentielle de la nature euclidienne du plan, et même de l'espace tridimensionnel, et puisque la démonstration qui fait appel à la notion de parallèle et à

3. Schopenhauer, *Le monde comme volonté et comme représentation*, Livre I, 15.

des propriétés purement euclidiennes que l'on désigne sous le nom de *Théorème de Thalès*, développe une compréhension de cette propriété essentielle, alors le reproche hégélien cesse d'avoir lieu d'être. Car effectivement, il faut pouvoir se dire et se représenter non seulement qu'une parallèle à la base passant par le sommet du triangle existe et qu'elle est unique, mais surtout que c'est là une propriété caractéristique de la nature euclidienne d'un espace.

Une question surgit alors : quel statut accorder au fameux axiome des parallèles dans ce cadre de réflexion ? Si même les propriétés euclidiennes familières sont devenues quasiment des propriétés de notre perception de l'espace et du plan, comment en sommes-nous arrivés là ? L'axiome des parallèles définit l'espace euclidien, et il nous fournit aussi les modalités de notre déplacement dans cet espace, car nous pouvons effectuer des translations, des rotations, des réflexions.

En tout cas, il faut selon nous distinguer entre une réflexion mathématique en profondeur sur l'espace et une présentation axiomatique de la géométrie de l'espace comme nous la trouvons dans l'œuvre d'Euclide, qui s'est transmise pendant plus de deux millénaires. Toute présentation axiomatique positionne les résultats qui en sont issus comme effet d'une nécessité déductive. Cette nécessité se présente comme interne à la formation de concepts, mais souvent sans éclairages génétiques explicites. La réflexion conceptuelle est l'effet de la construction du contenu mathématique même. Elle est de l'ordre de la synthèse constructive. Et la synthèse constructive suppose elle-même un examen conceptuel de l'espace sous différentes caractéristiques.

Un tel examen contribue à accroître une connaissance de l'espace qui va se trouver liée à des études produites. Nous montrerons que dans la forme de ce devenir historique apparaît comme une nécessité de la réflexion de la géométrie sur elle-même, et nous soutiendrons que les formes de sa transmission même sous forme axiomatique en sont encore une manifestation. Et cette réflexion interne des mathématiques sur elles-mêmes peut adopter des formes extrêmement diverses.

Or dans le destin de la géométrie, deux aspects essentiels nouveaux sont apparus : les propriétés métriques, puis les propriétés topologiques, d'une nature conceptuelle plus délicate. À ce point de notre analyse, nous sommes rendus proche de la position de Hilbert devant l'axiomatique euclidienne⁴ Certains énoncés supposent des précisions de nature topologique, d'autres de nature métrique, et donc, il faut tenir compte de propriétés supérieures de l'espace qui ont été conçues au cours de l'histoire de la géométrie. La liaison entre géométrie et topologie, longtemps restée implicite, s'est révélée corrélativement avec l'émergence autonome de la topologie. Ce qui signifie que toute propriété géométrique est (peut-être) en liaison avec une propriété topologique. Ce qui n'empêche pas de faire une distinction entre ces deux types de propriétés. Cela change la question fondationnelle à laquelle les philosophes des mathématiques dominants sont tant attachés. Tout énoncé géométrique doit rester ouvert sur ses corrélations éventuelles avec la topologie ou même avec l'algèbre et l'analyse qui en précisent la signification. C'est là tout le travail de Hilbert, qui a cependant continué de raisonner en termes axiomatiques.

Notre thèse est que dans cette réflexion sur ces liens se déploie une réflexion philosophique en elle-même et pour elle-même, au contact de la géométrie quand elle est relevée à un niveau mathématique supérieur. Et comme nous allons le voir, ce credo donne sens à

4. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*, Mit Supplementen von Dr Paul Bernays. Stuttgart, B. G. Teubner, 1968.

une étude spéculative autonome sur la forme générale du théorème d'Euclide bien connue des mathématiciens : le *théorème de Gauss-Bonnet*.

À présent, revenons à notre représentation, comme nous l'avons dit plus haut, d'une variabilité mentalisée, au sens d'intégrée à la pensée de tous les triangles possibles d'un plan. En refusant de souscrire aux tentatives heidegériennes de relégation de l'activité scientifique à une forme de confinement au seul développement du principe de raison, il s'agissait d'insister ici, en guise de préliminaire métaphysique, sur l'intrication fondamentale entre le mouvement et la quantification universelle du multiple, ce à quoi seule une activité mentale libre et imprévisible peut et doit donner accès. L'intuition *est* mouvement, et donc, puisque la mathématique *est* synthèse d'intuitions, l'activité cérébrale intuitive demeure absolument déterminante dans l'appréhension des contenus mathématiques, fussent-ils axiomatiques. C'est-à-dire que l'intuition comme saisie immédiate, comme vision intellectuelle, est liée à l'appréhension du mouvement.

Examinons quelque peu ce rapport à l'intuition, d'abord en suivant Kant. Une définition de 1770 est précisée dans la *Critique de la raison pure*.

Celle-ci [la mathématique] ne peut rien établir par simples concepts mais vole aussitôt vers l'intuition dans laquelle elle considère le concept *in concreto*, non pas empiriquement pourtant, mais dans une intuition qu'elle représente *a priori* c'est-à-dire a construite et dans laquelle ce qui suit des conditions générales de la construction doit également valoir pour l'objet construit.⁵

En reprenant l'expression de Cavailles,

[l'intuition] est non pas contemplation d'un tout fait, mais appréhension dans l'épreuve de l'acte des conditions mêmes qui la rendent possible.⁶

Et ensuite Kant, dans le même mouvement de pensée, distingue philosophie et mathématiques de manière tout à fait différente de la conception de Hegel.

Le philosophe peut réfléchir sur le concept de triangle autant qu'il veut [...], y distinguer le concept de ligne droite ou d'un angle ou du nombre trois et les éclaircir, sans pour cela parvenir à d'autres propriétés qui ne sont pas renfermées dans ces concepts.⁷

Si le mathématicien doit être toujours guidé par l'intuition dans l'enchaînement de ses raisonnements, c'est que l'intuition possède une structure, ou une réalité propre, de quelque ordre soit-elle. Bien plus, la dualité des deux formes de l'intuition rend le problème insoluble.

Sans doute y a-t-il subordination de l'espace au temps, puisque toute synthèse s'accomplit dans le temps ;

Je ne peux me représenter une ligne, si petite soit-elle, sans la tirer par la pensée.⁸

Et Kant explique l'application du nombre à l'espace.

Le pur schéma de la grandeur comme d'un concept de l'entendement est le nombre qui est une représentation embrassant l'addition successive de l'unité à l'unité (homogène). Donc le nombre n'est rien d'autre que l'unité de la synthèse du divers *d'une intuition homogène en général* par le fait que j'engendre le temps dans l'appréhension de l'intuition.⁹

5. Kant, *Kritik der reinen Vernunft*, Methodenlehre, I, 1, Cassirer, III, p. 486.

6. *Méthode axiomatique et formalisme. Essai sur le problème du fondement des mathématiques*, Hermann, Paris, 1981.

7. Kant, *Kritik der reinen Vernunft*, Methodenlehre, I, 1, Cassirer, III, p. 487.

8. Axiomes de l'intuition, *op. cit.*, p. 27.

Rappelons ici, au plus profond de la philosophie de Kant, que la théorie du schématisme est le moyen (conceptuel) qu'a inventé Kant pour faire le lien entre d'une part l'intuition qui fournit des perceptions singulières, et d'autre part les concepts de l'entendement qui eux sont universels et actifs. Les schémas sont alors un mixte intuition/concept produit par l'imagination.

C'est ici que les difficultés de l'analyse kantienne apparaissent. Il faut passer de cette « intuition homogène en général » aux deux intuitions particulières de notre faculté de connaître.

[Le temps] contient les rapports de la succession, du simultané et de ce qui est simultané avec le successif (le persistant) [. . .], manière dont l'esprit s'affecte lui-même,¹⁰

tandis que l'espace est

la propriété formelle (de l'esprit) d'être affecté par les objets.¹¹

La difficulté de cette double intuition est soulignée par Kant.

Ici, toute la difficulté réside en ceci : comment le sujet peut-il avoir une intuition intérieure de lui-même ? Mais cette difficulté est commune à toutes les théories.¹²

Nous sommes tellement un objet par nous-mêmes que nous avons besoin de l'espace pour représenter notre vie intérieure, ajoute Cavallès.

Nous ne pouvons nous représenter le temps, qui n'est pourtant pas un objet de l'intuition extérieure, que sous l'image d'une ligne, en tant que nous la traçons, mode de représentation sans lequel nous ne pourrions pas reconnaître qu'il n'a qu'une dimension ; de même, la détermination de la longueur du temps ou des moments pour toutes nos perceptions intérieures doit être tirée de ce que les choses extérieures nous présentent de changeant, par suite nous devons ordonner les déterminations du sens intime [interne] dans le temps comme nous ordonnons celle du sens externe dans l'espace.¹³

L'analyse de Cavallès est celle que nous reprendrons à notre compte pour lui faire emprunter une autre direction.

Mais alors le temps s'évanouit dans l'espace, le temps est grandeur extensive¹⁴

dans laquelle la représentation des parties rend possible la représentation du tout¹⁵

ou plutôt il n'y a qu'une seule intuition, celle du mouvement qui trace les lignes, décrit les cercles, tire la ligne droite, image du temps.¹⁶

C'est là que se situe la difficulté selon Cavallès. Nous effectuons une distinction entre nous comme sujet connaissant et un système d'objets qui affectent notre sensibilité et dès lors, dit encore Cavallès, nous pouvons isoler ce qui se rapporte uniquement au moi. La représentation du temps n'est obtenue que par abstraction de l'espace dans la synthèse sensible, dit Cavallès. Mais il a fallu se donner préalablement l'espace avant la synthèse.

9. *Schématisme*, *op. cit.*, p. 144.

10. *Esthétique transcendantale*, *op. cit.*, p. 75

11. *ibid.*, p. 76.

12. *op. cit.*, p. 127.

13. *op. cit.*, p. 129.

14. Cavallès, *op. cit.*, p. 29.

15. *Axiomes de l'intuition* p. 157.

16. *Ibidem*.

Ce qui produit d'abord le concept de la succession, c'est le mouvement comme acte du sujet, si nous faisons abstraction de celui-ci et faisons attention seulement à l'action par laquelle nous déterminons le sens intime conformément à sa forme.¹⁷

L'espace est « l'image pure de toutes les quantités »¹⁸, et il est de fait lié de manière interne à la quantité. Et la géométrie travaille et expose ces formes quantitatives. Et c'est le mouvement qui trace ces formes quantitatives.

En effet, le mouvement est lié à la quantification universelle du multiple — mais sous quelle forme ? On sait depuis les Éléates que le mouvement est un parcours du multiple. Mais comment intervient la quantification ? Tout point, sans précision de cette notion, est traversé ou supporté par le mouvement. le mouvement s'éprouve comme effectuation du tracé de n'importe quelle figure. Et comme l'espace est l'image pure de toutes les quantités, pour le sens extérieur, le mouvement est condition de l'effectuation de la spatialité quantitative.

Les difficultés liées à cette présentation sont les suivantes. La question de fond reste la question du temps qui a glissé du temps-schème au temps-image spatialisée. Nous pouvons travailler sur ce temps quand par exemple nous l'envisageons comme paramètre, mais le temps que Kant considère est celui qui n'est pas image, il est

méthode pour procurer à un concept son image.¹⁹

En second lieu mais la difficulté est moindre, *La quantification universelle n'est pas liée à une empiricité*. Tout comme la notion d'universalité. Le mouvement supporte l'universalité sans pour autant la produire sous sa forme idéale. Si le mouvement est l'effectuation du quantitatif géométrique, il n'est pas empirique mais condition de toute empiricité représentée. C'est dans ce cadre que nous proposons une réflexion sur la géométrie, dont l'axe principal devient le mouvement. On sait que l'une des difficultés rencontrées par la géométrie a été de donner un statut au mouvement géométrique, vu que ce dernier est toujours d'abord pensé comme un mouvement physique, ce qui est le cas chez Aristote. Le mouvement cette fois explicité dans des concepts géométriques fait partie de la réflexion géométrique et de la mise en forme de la géométrie euclidienne.

Dans notre représentation d'une variabilité de tous les triangles possibles d'un plan, il nous faut discerner trois points qui se meuvent, considérer leurs positions respectives les uns par rapport aux autres, les joindre virtuellement par des segments de droite. Une figure de triangle apparaît dès lors que ces trois points ne sont pas alignés. La discernabilité du triangle est universelle. C'est là un travail propre du spatial quantitatif. Mais pourquoi ?

C'est une perception de nature topologique qui est première : je sais former une figure en joignant trois points non alignés. Les conditions de la connaissance sont-elles ainsi qu'elles nous 'donnent' un triangle ? Puis-je ne pas voir un triangle quand je considère trois points non alignés qui sont joints ? En quel sens ? Si je définis le triangle comme une figure formée par trois points non alignés que j'ai reliés, évidemment non. L'idéalité triangle est nécessairement structurée ainsi : qui se donne trois points non alignés dans le plan se donne un triangle. Ce qui veut dire qu'il se donne trois angles solidaires. Cependant, l'objet triangle concentre plus que le descriptif que j'en ai donné. On connaît une quantité imposante de propriétés du triangle. En décrivant l'objet triangle, je me donne ainsi un ensemble

17. Déduction transcendantale, *op. cit.*, p. 128.

18. Schématisme, *op. cit.*, p. 144.

19. Schématisme, *op. cit.*, p. 144.

important de propriétés possibles. C'est l'ensemble de ces propriétés — nous dirions virtualités — que porte l'idéalité triangle.

Nous n'avons pas répondu à la question de sa discernabilité universelle. Tout le monde peut tracer un triangle en pensée en joignant trois points non alignés, ou tout le monde peut parcourir en pensée un triangle. Dans ces deux, cas nous avons affaire à un mouvement en pensée. C'est ce mouvement qui est universel, imaginé par tout un chacun.

Dans l'élaboration philosophique dont nous avons donné quelques éléments, Kant a tenté de répondre à cette question par sa théorie du schématisme. Nous allons préciser ce qui est nécessaire pour notre propos. Kant suppose que la constitution de l'objet et les conditions de l'accès cognitif à l'objet sont identiques. Il en est de même pour le schème qui a permis la production du triangle. Caveing²⁰ préfère user du terme d'*omnisubjectivité*. Tout sujet ayant accès à la figure triangle passe par les mêmes conditions d'accession qui correspondent à la structure de l'objet, précisément parce que ces conditions sont celles qui constituent l'objet. Il faut voir dans l'*omnisubjectivité* plus qu'une généralisation à tout sujet. Nous dirons que c'est constitutif de tout sujet. Cette supposition suffit-elle à nous faire sortir d'une simple généralité empirique ? Et à passer à une quantification universelle ?

Il faudrait consentir à fonder empiriquement l'universalité du quantificateur. Tout triangle est ainsi construit en lui-même de sorte que je puisse y avoir accès. Tout triangle renvoie à tout sujet percevant un triangle. De sorte que cette empiricité fondatrice (un sujet percevant) est de portée universelle. L'idéalité triangle n'est aucun des triangles tracés sur une feuille de papier. Elle concentre en elle la double polarité : celle de l'objet, et celle du sujet, dont la corrélation définit l'universalité. L'empiricité l'a portée au-delà d'elle-même.

En adoptant une position proche de celle de Kant, nous ne présupposons rien de la structure de cette *omnisubjectivité*. Nous obéissons à une injonction théorique impliquée par l'universalité que comporte un objet géométrique.

Le mouvement, celui qui engendre un triangle, ou celui qui trace un triangle possède une portée universelle.

Et c'est par l'appel au mouvement que nous pouvons comprendre la nature d'un objet géométrique comme le triangle, nous ne devons jamais en disjoindre sa relation à son engendrement. C'est là ce qu'il faut entendre par portée universelle. En restant portés par ce mouvement d'engendrement du triangle nous allons en faire sortir une réflexion sur soi de nature géométrique.

Donc si comme dit Kant, le philosophe ne sait pas quoi faire avec le triangle, le géomètre en produisant une réflexion à partir de sa construction va monter vers la philosophie, et transformer à rebours la réflexion philosophique. En approfondissant la géométrie d'Euclide il la réfléchit et lui donne une signification qui transforme et étend ses concepts. Le travail du géomètre permet d'extraire certains concepts qui donnent une signification beaucoup plus ample au théorème d'Euclide. Ce dernier est mis en position réflexive grâce à l'intervention du concept de courbure. C'est à travers ce dernier que le mouvement accomplit sa fonction constituante, et concentre de nombreux éléments qui permettent une extension de la géométrie.

De ce point de vue ils permettent aussi de répondre à certaines questions qui faisaient difficulté chez Kant. En simplifiant, la question de la dualité des intuitions que nous avons rencontrée plus haut peut prendre la forme suivante. Dès lors que nous pouvons établir

20. *Le problème des objets dans la pensée mathématique*, Vrin, Paris, 2004.

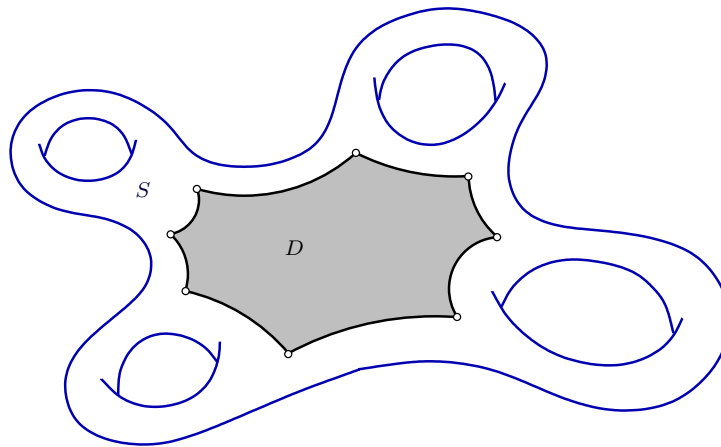
qu'une forme de réflexivité surgit dans le développement de la géométrie, que d'une certaine façon la géométrie peut se voir elle-même, elle atteint cette double polarité en elle-même. D'autre part, nous allons le voir, le théorème de Gauss-Bonnet nous permet d'opérer des abstractions d'espace. Nous restons malgré ces abstractions dans l'extériorité. C'est le concept de courbure qui nous place au-dessus de la géométrie euclidienne.

De l'autre côté, la difficulté kantienne tient à l'indifférence à l'objet.

Le type de la science, son effort vers un type rationnel classique aussi bien que extension mathématique négligent complètement l'apport de l'objet pour la structure de la théorie.²¹

Le fondement par l'unité formelle de l'espace tel que le propose Kant, permettant de sortir du concept n'est pas possible. Cette unité varie quant à sa forme et son caractère formel se transforme dans la construction même de la géométrie. Se met en place de la sorte une variation de l'intuition elle-même qui emprunte des formes argumentatives.

Nous allons argumenter dans le sens ci-dessus pour donner une signification philosophique — essentiellement issue de l'approfondissement du travail géométrique sur l'espace euclidien — au développement ultime du théorème d'Euclide, à savoir l'un des plus importants de la géométrie différentielle : le *théorème de Gauss-Bonnet*.



Directement maintenant, *i.e.* sans présentation conceptuelle anticipante — mais des éclaircissements commentatifs suivront —, et puisqu'il s'articule au théorème d'Euclide, voici le

Théorème 1.2. [de Gauss-Bonnet général] *Sur une surface orientée lisse S munie d'une métrique gaussienne ds^2 , soit un domaine relativement compact non vide :*

$$D \Subset S,$$

dont le bord lisse par morceaux :

$$\partial D = C_1 \cup \dots \cup C_L$$

est constitué d'un nombre fini $L \geq 1$ de courbes fermées simples orientées C_1, \dots, C_L lisses par morceaux. Alors sa caractéristique d'Euler $\chi(D)$ est donnée par la formule :

$$2\pi \chi(D) = \iint_D K_G dA + \sum_{1 \leq \ell \leq L} \int_{C_\ell} k_g ds + \sum_{1 \leq \ell \leq L} \sum_{1 \leq m \leq M_\ell} \alpha_{\ell, m},$$

21. Cavailles, *Sur la logique et la théorie de la science*, Paris, Vrin, 1976.

où K_G est la courbure de Gauss de S , où dA est l'élément d'aire infinitésimale sur S , où k_g est la courbure géodésique, et où $\alpha_{\ell,1}, \dots, \alpha_{\ell,m_\ell}$ sont les angles extérieurs entre deux morceaux lisses consécutifs de C_ℓ .

Dans cette égalité, le membre de gauche est de nature purement topologique, amorphe, qualitative, celui de droite de nature géométrique, différentielle, quantitative. Ainsi le théorème de Gauss-Bonnet est-il emblème paradigmatique d'une *liaison*, au sens lautmanien du terme, entre :

$$\text{Topologie} \longleftrightarrow \text{Géométrie.}$$

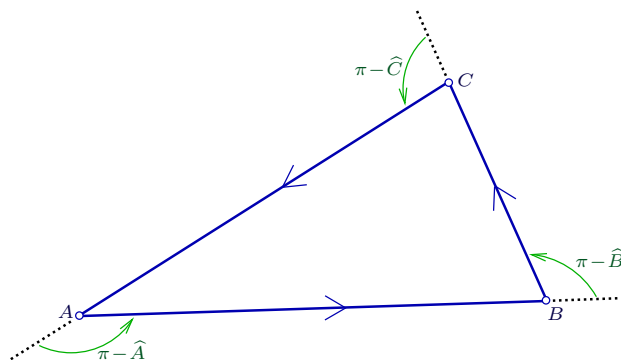
Cette relation entre topologie et géométrie, explicitant une synthèse entre ces deux disciplines, demande quelques commentaires que nous esquissons ici. Comment un point de vue topologique peut-il se mettre en liaison avec un point de vue géométrique ? Avant de donner des éléments de réponse à cette question, insistons sur le fait que les mathématiques se développent par intervention de disciplines différentes les unes sur les autres, à différents titres, outils d'observation, structuration formelle, nouveau point de vue unifiant. Science en quelque sorte qualitative de l'espace, la topologie apparaît comme plus primitive que la géométrie, même si elle vient historiquement après. La topologie prend ici la forme de recherche d'invariants. C'est à travers des résultats qui mettent en évidence des invariants que la géométrie est rejointe. Mais le théorème d'Euler est une relation de nature quantitative entre des constituants polyédriques. Par ce biais, elle se rapproche de certains aspect de la géométrie. Une quantification minimale de la visée topologique va permettre la synthèse que propose le théorème de Gauss-Bonnet. Ce n'est pas ainsi que la caractéristique d'Euler a été vue, mais la synthèse fournie par le théorème en laisse voir un nouvel aspect.

C'est un théorème très avancé dont on ne peut remobiliser instantanément les divers concepts : ds^2 , D , C_ℓ , $\chi(D)$, K_G , dA , k_g , $\alpha_{\ell,m}$, lesquels seront présentés en temps voulu.

Tout d'abord, dans le cas planaire $S = \mathcal{P}$, lorsque $D = T$ est simplement un triangle comme ci-dessus, la caractéristique d'Euler se calcule aisément :

$$\begin{aligned} \chi(T) &= \text{nombre(sommets)} - \text{nombre(arêtes)} + \text{nombre(faces)} \\ &= 3 - 3 + 1 \\ &= 1, \end{aligned}$$

parce que T constitue une triangulation en elle-même de lui-même, il auto-incarne le quantum en lequel sa forme peut décomposer toute forme topologique abstraite, et la complexité intérieure potentielle en laquelle il pourrait s'auto-fragmenter se resynthétise par trivialité homologique : le caractère global de son essence locale est principe même de son caractère de monade.



Ensuite, par simple règle des angles complémentaires, les angles extérieurs en les trois sommets valent :

$$\pi - \widehat{A}, \quad \pi - \widehat{B}, \quad \pi - \widehat{C},$$

et puisque la courbure de Gauss d'un plan $K_G \equiv 0$, ainsi que la courbure géodésique de segments de droite $k_g \equiv 0$, sont toutes deux identiquement nulles, la formule de Gauss-Bonnet se « projette » :

$$2\pi \cdot 1 = 0 + 0 + \pi - \widehat{A} + \pi - \widehat{B} + \pi - \widehat{C},$$

pour redonner une formulation équivalente au théorème d'Euclide, à un 'micro-calcul' près.

L'idéalisation génératrice de contenus mathématiques s'articule à une circulation virtuelle possible multiple entre étages de généralité, les deux relations les plus fondamentales étant celle de *vérification d'accrochage cohérent à l'acquis*, et celle de *protension à l'extension*.

En effet, quelle signification donner à un théorème que l'on retrouve comme corollaire d'un théorème général dans lequel on a annulé deux termes, ceux qui ne figurent pas dans le théorème particulier ? La réponse est que l'annulation de la valeur d'un terme ne signifie pas que ce terme n'existe pas. Dire que la courbure est nulle possède un sens conceptuel positif. Car la figure considérée, un plan dont la courbure est nulle, appartient à la catégorie des objets géométriques dont la courbure prend différentes valeurs, depuis des valeurs négatives jusqu'à des valeurs positives, en s'annulant au milieu. Le passage au point de vue de la courbure autorise une extension des objets géométriques au-delà de la géométrie euclidienne. En conséquence le théorème d'Euclide appartient à un énoncé plus général qui n'est plus celui confiné à la géométrie euclidienne. Comme nous l'avons énoncé la courbure est donc le concept qui permet l'extension de la géométrie, il est en quelque sorte un opérateur de réflexion. Il rend possible à la manière d'un transcendantal le concept qui détermine différentes géométries.

Dans la formule de Gauss-Bonnet, tout contribue à l'harmonie et à la vérité d'une égalité. Entre Euclide et Gauss-Bonnet, c'est une ascension génétique qui *engendre* trois types de termes :

- la courbure de Gauss K_G , invariant 2-dimensionnel ;
- la courbure géodésique k_g , invariant 1-dimensionnel ;
- les discontinuités d'angles extérieurs $\alpha_{\ell,m}$, données 0-dimensionnelles.

Même s'il n'y a pas, entre ces trois quantités géométriques :

$$\sum_{1 \leq \ell \leq L} \sum_{1 \leq m \leq M_\ell} \alpha_{\ell,m}, \quad \int_{C_1 \cup \dots \cup C_L} k_g ds, \quad \iint_D K dA,$$

de correspondance terme à terme avec les trois dénombrements (trop variables !) d'une triangulation de D (voir ci-dessous) :

$$\text{nombre(sommets)}, \quad \text{nombre(arêtes)}, \quad \text{nombre(faces)},$$

il y a *égalité entre leurs sommes alternées*, à un facteur 2π près : telle est la nature d'une *découverte d'invariant*, par l'action renouvelable d'une faculté universelle de l'entendement mathématique, toujours exposé à une forme d'insatisfaction dans le fait de chercher à voir au sein de là où rien n'est d'avance visible.

Cette égalité possède de nombreuses significations qui doivent être analysées, dans le détail de ses termes, dans la signification de l'égalité.

Commençons par la formule d'Euler. Elle possède une histoire qui date d'avant Euler. Il en existe plusieurs dizaines de démonstrations. C'est le premier grand invariant topologique auquel un mathématicien a affaire. La somme alternée des côtés, des faces et des sommets est invariante pour tout polygone régulier. La plupart des démonstrations procèdent par visualisation des côtés, faces et sommets, le polyèdre étant projeté dans le plan. Cette somme porte sur des objets qui vont de la dimension topologique 1 jusqu'à la dimension 2. L'agencement des figures (polyèdre) est un montage qui est une reconstitution à partir de ces objets de dimension croissante, pris dans leur 'entièreté'. Ce sont là comme les constituants minimaux d'un squelette de l'espace et donc de figures (polyèdres). Au lieu de chercher à calculer une longueur, une aire ou un volume, quantités géométriques, nous nous arrêtons aux éléments 'non évalués'. Leur combinaison peut être l'objet d'un résultat algébrique. Même si le terme de droite est un nombre, les concepts qui donnent lieu à cette évaluation numérique font partie des notions classiques de topologie algébrique. Essayons de les caractériser plus précisément.

Tout polyèdre régulier peut être reconstruit à partir de ses constituants d'une manière qui est liée à la structure de l'espace qui les loge. La longue histoire des cinq polyèdres réguliers qui remonte au Timée et passe par Kepler témoigne de la conception métaphysique qui a présidé à son élaboration. On sait qu'au XIX^{ème} siècle, l'objet d'étude de la topologie (devenue topologie algébrique) est non pas le polyèdre, mais le complexe simplicial. En allant au-delà de la dimension 3, on définit les complexes simpliciaux comme formés de simplexes soumis à certaines conditions d'incidence. Et l'étude de ces complexes repose sur la connaissance des nombres dits de Betti, attachés à eux et invariants par toute équivalence topologique. Comme on le voit dans le cadre de cette discipline on procède à l'étude de certaines propriétés de l'espace qui vont dans une direction très différente de celle de la géométrie différentielle.

Chacun de ces concepts doit être comme moment de ce qui est appelé une ascension, situé en ces étages. Le concept de courbure intégrale ou de courbure gaussienne est une découverte de Gauss. Comme nous l'avons noté, il change le point de vue sur la géométrie. Comme 'transcendental', il rend possible *a priori* plusieurs géométries. Il est remarquable que ce soit ce concept qui soit l'un des opérateurs de liaison avec le point de vue de la topologie (algébrique). Il est pourtant 'perceptible' que la courbure gaussienne puisse donner des indications sur les relations entre des éléments simpliciaux, (pour les polyèdres, E, F, V). C'est l'aspect remarquable de ces disciplines, elles laissent comme un écho intuitif des éléments de notre représentation perceptive de l'espace.

Un étage intermédiaire plus accessible — lorsqu'on ne le connaît pas déjà — de cet énoncé est le cas 'particulier' (déjà extrêmement général!) où le domaine $D = S$ est la surface entière, sans bord, de telle sorte que deux termes disparaissent dans le membre de droite de l'égalité. Cette étape intermédiaire possède une signification complète en elle-même.

Plus qu'un corollaire, il s'agit d'un théorème en tant que tel.

Théorème 1.3. [de Gauss-Bonnet Compact] *La caractéristique d'Euler $\chi(S)$ d'une surface compacte orientée S sans bord vaut :*

$$\chi(S) = \frac{1}{2\pi} \iint_S K_G dA.$$

Autrement dit, l'invariant topologique le plus élémentaire $\chi(S)$ d'une surface vaut, à la constante 2π près, la *curvatura integra* de Gauss, à savoir l'intégrale complète de la courbure K_G sur S .

Phénomène surprenant, cette égalité est vraie quelle que soit la métrique gaussienne lisse ds^2 choisie sur S — il y en a un très grand nombre, de cardinal égal à la puissance du continu. Si la surface est déformée, sa caractéristique d'Euler, qui est un invariant topologique, ne change pas, tandis que la courbure en certains points change. Le Théorème 1.3 établit — phénomène quelque peu troublant — que l'intégrale de toutes les courbures ne change pas, quelle que soit la déformation. Par exemple, toute sphère $S \subset \mathbb{R}^3$ défigurée par plusieurs 'bosses' possède toujours une courbure totale égale à $4\pi = 2\pi \cdot \chi(S)$, quel que soit le cabossage.

Dans la formule générale, à cause des termes de bord $\int_{C_\ell} k_g ds$ et des termes d'angle α_ℓ qui alourdissent le travail mental de saisie intuitive complète adéquate, cette indépendance vis-à-vis du choix d'une métrique n'avait probablement pas été vue ou thématifiée dans l'horizon de compréhension. Autrement dit, particularisation et spécialisation sont auxiliaires incontournables de mise en perspective.

Pourquoi en est-il ainsi ? Que signifie cette indépendance vis-à-vis d'une métrique ? D'abord nous devons remarquer que très souvent, à cause des trajectoires multiples que permet l'organisation mathématique, nous disposons d'une démultiplication des significations des concepts mathématiques. Ici, l'égalité nous indique qu'un concept de nature topologique exprimé par un nombre caractéristique d'Euler est égal à un nombre qui exprime un concept de nature géométrique. Cela veut dire que le nombre de droite possède une signification topologique (= le nombre de gauche) et certainement de nature globale. Est-ce là la raison qui rend la courbure gaussienne indépendante de la métrique ? On sait qu'une métrique représente les conditions fixées sur une variété d'après lesquelles calculer une longueur, une aire. Et on le sait également, comment calculer une courbure.

Toute confrontation à un énoncé mathématique exige des *analyses d'intégration à la pensée de vérité*, moment mentaux réflexifs essentiels sans lesquels il serait impossible que des individus en formation deviennent des mathématiciens, puisque l'activité 'cérébrale' intuitive permanente constitue le nœud réel, peu transmissible par écrit, du mouvement de la pensée. L'activité intellectuelle d'un sujet, même mise entre parenthèses au nom d'exigences transcendentales d'objectivité maintes fois promulguées par la philosophie des mathématiques, demeure une nécessité de fait, pas seulement pratique, puisque la théorie manque, mais surtout constituante, et aussi partiellement mystérieuse en tant qu'elle s'exécute en chaque autre sujet pensant.

Ce phénomène est l'effet d'une omnisubjectivité dont nous avons parlé. Et corrélatif de cette omnisubjectivité, il y a l'objet construit lui-même.

Nous voudrions encore insister sur la nature du concept de courbure gaussienne, dont nous verrons encore quelques propriétés. La courbure gaussienne est un concept qui 'achève' la présentation de la sphère, il est une forme de réalisation de la surface à un niveau supérieur. On verra que cette propriété de la courbure gaussienne la rapproche de la notion découverte par Gauss également, du caractère intrinsèque de celle-ci.

Une écriture équivalente du théorème de Gauss-Bonnet Compact, mais plus 'parfaite' car exprimant mieux le rapport aux modèles directeurs, est :

$$\frac{1}{2} \chi(S) = \iint_S K_G \frac{dA}{4\pi},$$

puisque cette écriture signale, dans la fraction $\frac{dA}{4\pi}$, le lien intime avec la sphère unité dans l'espace euclidien :

$$S^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\},$$

dont l'aire vaut 4π d'après Archimède :

$$1 = \int_{S^2} K_G \frac{dA}{4\pi}.$$

Le lien avec la sphère unité dans l'espace euclidien, signalé ici qui montre cette aire égale à la caractéristique est l'expression du fait que (dans ce cas) l'aire est sur les deux terrains de la courbure et de la topologie de la caractéristique d'Euler. De manière analogue, la mesure de probabilité $\frac{d\theta}{2\pi}$ sur le cercle unité $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, de masse totale :

$$1 = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{2\pi},$$

apparaît naturellement dans les formules de calcul des coefficients de Fourier :

$$\widehat{f}(k) := \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \frac{d\theta}{2\pi} \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

d'une fonction $f \in L^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ intégrable définie sur \mathbb{R} et 2π -périodique. Même si le coefficient $\frac{1}{2}\chi(S)$ devant la caractéristique d'Euler ne semble pas naturel pour l'instant, il deviendra clair plus tard qu'il a lui aussi un sens normalisateur.

Avant d'entamer des commentaires explicatifs, il importe d'insister sur la force d'embrassement des êtres. Dans leur ensemble, les mathématiques expriment un *désir de puissance synthétique* sur les êtres rationnels. La conceptualisation est une première force d'embrassement, mais les êtres, toujours, s'y soustraient, en partie, car le concept, en mathématiques, n'est souvent qu'une vue partielle, d'autres sous-concepts demeurant non-vus, d'autres aspects intrinsèques demeurant non-conceptualisés. On doit voir la force d'entraînement hors de soi que manifeste la pensée mathématique comme puissance d'expansion, ici propulsée à travers cette unité à multiples ressorts de la topologie et de la géométrie.

Force d'embrassement peut être dite en termes de puissance synthétique qui pousse au développement et à l'unité. Un ensemble d'unités relationnelles, indéfiniment expansives et dont les éléments sont toujours en voie de renouvellement, donne une forme anticipatrice aux concepts ainsi obtenus. Caveing analyse cette mise en œuvre de la pensée relationnelle que poursuit toute activité mathématique. Nous emploierons également une notion de champ de conscience qui a pour contenu la région du champ transcendantal qui est thématifiée par le mathématicien. Il est en devenir incessant, ouvert et temporalisé.²² Les termes comme '*région*' sont métaphoriques. Le *champ de conscience*, terme emprunté à la phénoménologie, est la *région* du champ transcendantal qui constitue son objet actuel, ce que Cavaillès nommait le *champ thématique* du mathématicien, il relève si l'on veut du pour soi, alors que le champ transcendantal relèverait de l'en soi. C'est la conscience singulière du mathématicien en tant qu'elle est habitée par le langage spécifique des mathématiques. Et c'est elle qui s'engage dans l'expérience pensée du relationnel expansif. C'est sans doute l'un des aspects essentiels de l'activité mathématique que cet entraînement à progresser dans l'expansion synthétique du relationnel.

22. Caveing, *Le problème des objets dans la pensée mathématique*, Vrin, Paris, 2004, p.167.

Retenons alors l'hypothèse que de tout temps, quelle qu'ait été la place du développement historique, ce qui a guidé secrètement et silencieusement la recherche mathématique, c'est en quelque sorte la présence de schèmes relationnels à valeur anticipatrice ouvrant en définitive sur l'explicitation ou l'invention de relations dans le champ thématique sous investigation.²³

L'ontologie physique offre un réservoir inépuisable de surfaces visibles qui convainc de l'extension ontologique première du théorème de Gauss-Bonnet : la notion de surface S quelconque, déjà extrêmement vaste. Ensuite, le choix d'un domaine quelconque $D \subset S$ sur la surface renforce le sentiment d'immensité. Enfin, la variabilité de la métrique parachève cette extensionnalité.

Le sentiment d'immensité est de plusieurs ordres. Il y a celui qui correspond au sublime dynamique de Kant. Nous sommes en proie à ce sentiment esthétique analysé par Kant dans la *Critique du Jugement* quand nous sommes mathématiciens des surfaces.

Il y a aussi celui que nous éprouvons quand nous considérons la variété des surfaces et l'infinité d'une surface déjà en voie de mathématisation — ce, toujours dans le cadre des formes de pensée qui visent au contrôle mathématique des infinités. L'analyse de Kant est très complexe. Il distingue le sublime mathématique et le sublime dynamique. Le sublime dynamique correspond au sentiment du sublime que nous pouvons éprouver dans le travail mathématique. Cette considération ne peut être complètement développée dans ce cadre. Ce sentiment est un sentiment esthétique, subjectif. Il est en rapport avec la peur.

Pour la faculté de juger esthétique réfléchissante la nature ne peut posséder une valeur <gelten> comme force, être sublime dynamiquement, que dans la mesure où elle est considérée comme objet de peur.²⁴

Le champ mathématique présente ainsi une forme de sublime apparentée à celle de la nature. Il est certes pour une part importante l'œuvre des mathématiciens, esprits humains. Mais il ouvre aussi au spectacle de l'inachèvement et de ses déflagrations.

Nous avons trouvé notre limite propre en ce qui est incommensurable dans la nature et dans l'incapacité de notre faculté à saisir une mesure proportionnée à l'évaluation esthétique de la grandeur de son domaine, et cependant aussi découvert en notre raison, une autre mesure non sensible, qui comprend sous elle comme unité cette infinité, par rapport à laquelle tout dans la nature est petit, si bien que nous avons découvert en notre esprit une supériorité sur la nature en son immensité [. . .]. Sa force irrésistible nous fait connaître, en tant qu'êtres de la nature notre faiblesse physique, mais en même temps, elle dévoile une faculté qui nous permet de nous considérer comme indépendants par rapport à elle et une supériorité sur la nature sur laquelle se fonde une conservation de soi-même toute différente de celle qui est attaquée par la nature qui nous est extérieure [. . .]. En ce sens, la nature n'est pas considérée comme sublime dans notre jugement esthétique parce qu'elle engendre la peur mais parce qu'elle constitue un appel à la force qui est en nous (mais qui n'est pas nature).²⁵

Les élaborations mathématiques dans leur profondeur parfois inouïe présentent des paysages mais aussi toujours un au-delà de ces étendues induisant un sentiment d'effroi. On pourrait qualifier ces étendues et leur au-delà du vocable d'*immensité sans cesse potentialisée*.

23. *Ibidem*, p. 259.

24. Kant, *Critique de la faculté de juger*, Trad. A. Philonenko, Vrin, Paris, 1968, p. 99.

25. *Ibidem*.

Thèse 1.4. *Les mathématiques élaborent des formes de pensée sur le Vaste des immensités abstraites, elles-mêmes évolutives.*

Le rapport métaphysique que les mathématiques développent face au monde vaste du synthétique *a priori* qu'elles créent de manière immanente, ne s'apparente pas seulement à l'inachevabilité de l'exploration astrophysique, il est engagé dans un destin de métamorphose de la nature des synthèses face à du Vaste qui demeure, à cause de l'indéfinitude de l'infini, insaisissable en totalité.

2. La courbure locale intrinsèque

Un des concepts nouveaux de la géométrie contemporaine est celui qui enveloppe la différence entre local et global. Il est le résultat d'une longue réflexion sur les conditions de l'élaboration mathématique, en particulier en topologie mais elle concerne toutes les disciplines mathématiques. Le local délimite ou particularise l'espace de validité d'un concept, pour le préciser en mettant en suspens la question de sa globalisation à tout le domaine où il est construit. Il est au cœur de la signification du théorème de Gauss-Bonnet qui présente une version locale et une version globale. Une façon de l'expliciter consiste d'abord à faire appel à des concepts algébriques qui structurent cette différence dans le cas de la courbure des surfaces intrinsèques.

Soit J un transport parallèle (notion définie ci-dessous) sur une surface abstraite S munie d'une *métrique riemannienne*, laquelle associe à toute paire de champs de vecteur sur S une fonction :

$$p \longmapsto \langle X_p, Y_p \rangle \quad (p \in S),$$

réalisant le *produit scalaire* entre les vecteur X_p et Y_p aux divers points $p \in S$. Bien entendu, cette application doit être symétrique $\langle Y, X \rangle = \langle X, Y \rangle$ et bilinéaire par rapport à chacun de ses arguments :

$$\langle f_1 X_1 + f_2 X_2, Y \rangle = f_1 \langle X_1, Y \rangle + f_2 \langle X_2, Y \rangle,$$

quel que soit le choix de fonctions lisses $f_1, f_2 \in \mathcal{C}^\infty(S)$.

Ainsi, une métrique riemannienne est une façon de se donner des conditions d'effectuation de mesures, qui lui sont donc relatives. Dans cette mise en valeur des conditions de la mesure nous poursuivons un travail d'objectivation et de constitution de l'objectivité. Cependant, si l'on considère une surface S munie d'une métrique riemannienne g , on ne sait pas en général comparer des vecteurs tangents en des points différents de la surface. Une structure supplémentaire est alors nécessaire.

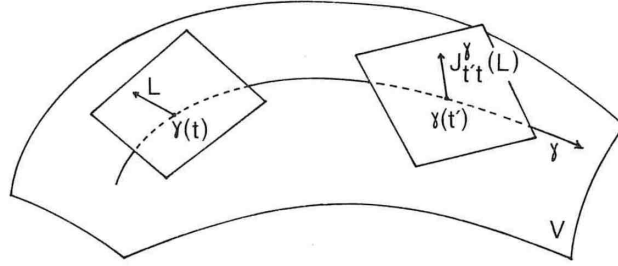
On appelle *transport parallèle sur S* la donnée d'une application :

$$J: (\gamma, t, t') \longrightarrow J_{t't}^\gamma$$

qui, à toute courbe différentiable $\gamma: I \longrightarrow V$ dans S définie sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$, et à tout couple (t, t') de valeurs du paramètre dans l'intervalle I , associe une *isométrie* des espaces (vectoriels) tangents :

$$J_{t't}^\gamma: T_{\gamma(t)}S \xrightarrow{\sim} T_{\gamma(t')}S,$$

lesquels sont munis des produits scalaires issus de la métrique riemannienne. Cet isomorphisme est alors appelé *transport parallèle le long de γ* .



C'est là un concept-clef que nous devons voir comme une construction de l'objectivité de la courbure par son enregistrement dans le déplacement des espaces tangents. Nous sommes descendus un peu plus profondément dans l'énonciation de conditions de constitution de l'objet géométrique, en établissant une nouvelle contrainte imposée par la comparaison de vecteurs tangents en des points distincts d'une variété. C'est ce que nous continuerons à développer en analysant le théorème de Gauss-Bonnet. Mais ici, le transport parallèle nous montre comment des conditions de parallélisme doivent être construites quand nous *comparons* des vecteurs tangents en des points distincts d'une variété. C'est en ce sens que le transport explicite leur objectivité.

On notera dorénavant $\mathcal{X}(S)$ l'espace des champs de vecteurs différentiables sur S . Un champ de vecteurs, notion qui vient certainement de la physique, est une application qui, à chaque point d'un espace ou d'une variété, associe un vecteur. C'est une manière de munir l'espace d'une potentialité d'action répartie de manière uniforme sur tout son domaine.

Pour tout champ $X \in \mathcal{X}(S)$ et pour tout nombre $t_0 \in I$, l'application $t \mapsto J_{t_0,t}^\gamma(X_{\gamma(t)})$ de I dans l'espace tangent fixé $T_{\gamma(t_0)}(S)$ est différentiable. On demande alors que sa dérivée :

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_{t_0} [J_{t_0,t}^\gamma(X_{\gamma(t)})] \in T_{\gamma(t_0)}S$$

ne dépende pas des distorsions éventuelles d'ordre supérieur de γ , mais seulement de son vecteur tangent $L := \frac{d\gamma}{dt}(t_0)$ au point $\gamma(t_0)$. On note $\nabla_L X$ cette dérivée, et on l'appelle *dérivée covariante* du champ de vecteurs X par rapport à L .

Un théorème mathématique précis démontre qu'étant donné un tel transport parallèle abstrait $J_{t',t}^\gamma(\cdot)$, pour tous champs de vecteurs $X, Y \in \mathcal{X}(S)$ sur la surface, et pour toutes fonctions lisses $f, g \in \mathcal{C}^\infty(S)$, les 5 = 4 + 1 propriétés suivantes sont satisfaites :

- (1) $\nabla_X(Y_1 + Y_2) = \nabla_X(Y_1) + \nabla_X(Y_2)$,
- (2) $\nabla_{X_1+X_2}(Y) = \nabla_{X_1}(Y) + \nabla_{X_2}(Y)$,
- (3) $\nabla_{gX}(Y) = g \nabla_X(Y)$,
- (4) $\nabla_X(fY) = f \nabla_X(Y) + X(f)Y$,

où $X(f)$ désigne l'*action* du champ de vecteurs X , envisagé comme *opérateur de différentiation d'ordre 1*, sur la fonction f . Il est bien remarquable que le champ soit un pourvoyeur d'action, ici de différentiation. Les concepts (ou les structures) mathématiques agissent sur les objets. Et dans le cas qui nous occupe, cette action sur les objets (les fonctions) est indifféremment répartie sur tout l'espace.

La dérivée covariante doit respecter les règles de dérivation, car elle a intégré à un niveau supérieur le concept de dérivation qu'elle adapte à une situation plus générale. La nouvelle théorie avec ses nouvelles situations est théoriquement homogène, elle doit adapter tout l'arsenal ancien de la dérivation à cette situation, en particulier elle doit adapter

un élément de linéarité par rapport à la direction. Autrement dit, lorsque les concepts de la géométrie différentielle se développent c'est une nouvelle forme de dérivation qui prolonge et transforme adéquatement l'ancienne qui se met en place.

Ici, la condition (3) exprime une $\mathcal{C}^\infty(S)$ -linéarité par rapport à la *direction* X le long de laquelle $\nabla_X(\bullet)$ dérive.

Mais comme c'est réellement Y que $\nabla_X(\bullet)$ dérive, une loi de produit inspirée de la règle élémentaire de différentiation d'un produit — classiquement attribuée à Leibniz — :

$$(fg)' = f'g + fg'$$

doit être satisfaite, ce qu'exprime (4) à un niveau plus sophistiqué.

De plus, l'hypothèse faite ci-dessus que le transport parallèle respecte la structure riemannienne, c'est-à-dire les produits scalaires infinitésimaux, se ré-exprime comme une *cinquième* condition de compatibilité avec la métrique :

$$(5) X(\langle X, Y \rangle) = \langle \nabla_X(Y), Z \rangle + \langle Y, \nabla_X(Z) \rangle.$$

On appelle alors $\nabla_X(Y)$ *dérivée covariante de Y dans la direction X* .

Inversement — et c'est toute la force du sous-bassement synthétique et interrogatif des mathématiques, toujours en quête de reformulations et d'*équivalences avançantes* —, on démontre en géométrie différentielle qu'un concept abstrait de dérivée covariante pour lequel les propriétés (1) à (5) sont transmuées en axiomes, engendre, grâce à un procédé ordinaire d'intégration, des transports parallèles $J_{t',t}^\gamma(\bullet)$ le long de toutes les courbes $\gamma \subset S$.

L'être abstrait d'un opérateur $\nabla_\bullet(\bullet)$ de dérivation covariante est manifestement *différentiel*, donc en particulier local. En lui-même, $\nabla_\bullet(\bullet)$ interprète la correction que l'on doit apporter, au plan infinitésimal, aux translations euclidiennes naïves afin que le concept prenne tout son sens mathématique.

Parce qu'il ne font que différentier des objets fonctionnels différentiables donnés, les opérateurs de type $\nabla_\bullet(\bullet)$ sont intrinsèquement *plus simples* que les applications de transport $J_{t',t}^\gamma(\bullet)$.

Ainsi, la théorie mathématique établit qu'il y a essentiellement équivalence, dans leurs incarnations conceptuelles effectives, entre :

$$\text{Idée de transport parallèle} \quad \iff \quad \text{Idée de dérivation covariante.}$$

De plus, elle décide d'*articuler* la progression théorique à l'élémentarité réelle, fût-elle constatée *a posteriori*.

La théorie mathématique vérifie aussi que le transport parallèle ne dépend pas du choix d'un paramétrage (quelconque) des courbes. Cependant, en lui-même, le transport *dépend* du chemin γ emprunté, et c'est en cela que réside la différence discriminante majeure avec la théorie euclidienne.

L'intérêt des axiomes (1) à (5) est de définir des règles d'usage, transférées et insérées dans le cadre des surfaces différentiables, bien au-delà du cadre euclidien familier. Mais on peut d'ailleurs parfaitement voir comment les règles usuelles de dérivation dans \mathbb{R}^2 deviennent un cas particulier restreint de ces conceptions. Il en va de même d'un grand nombre de concepts élémentaires de la géométrie euclidienne, qui deviennent, dans un regard théorique a posteriori, cas particuliers de concepts supérieurs. La pensée complète de l'objet mathématique exige en effet des re-circulations synthétiques entre théories engendrées et théories génitrices.

La géométrie initiale a ainsi joué un double rôle. Elle a d'une part été la théorie initiale à partir de laquelle réfléchir à de nouvelles situations : elle port(ait) en elle des généralisations potentielles de concepts dont elle permet d'extraire une signification plus profonde. D'autre part, elle « retombe » à l'état de cas particuliers des cas généraux qui l'ont portée au-delà d'elle-même. C'est ce que signifie ici l'expression « *recirculations synthétiques* ».

3. 1-forme différentielle associée à une différentiation covariante

Maintenant, puisque la courbure riemannienne $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur S a été conceptuellement créée pour donner un sens au produit scalaire entre paires de vecteurs, donc en particulier à leur orthogonalité, il est *naturel*, comme en géométrie euclidienne, de rapporter les vecteurs à des bases *orthonormées*.

Sur un ouvert U contenu dans S , envisagé comme 'morceau' (essentiellement local) de S , si deux champs de vecteurs quelconques $X_1, Y_1 \in \mathcal{X}(S)$ sont donnés et sont linéairement indépendants, le procédé de Gram-Schmidt permet de leur substituer deux autres champs de vecteurs :

$$X := \frac{1}{\sqrt{\langle X_1, X_1 \rangle}} X_1,$$

$$Y := \frac{\sqrt{\langle X_1, X_1 \rangle}}{\sqrt{\langle X_1, X_1 \rangle \langle Y_1, Y_1 \rangle - \langle X_1, Y_1 \rangle^2}} \left(-\frac{\langle X_1, Y_1 \rangle}{\sqrt{\langle X_1, X_1 \rangle}} X_1 + Y_1 \right),$$

qui deviennent de norme 1, et mutuellement orthogonaux, en tout point de $U \subset S$:

$$1 \equiv \langle X, X \rangle, \quad 0 \equiv \langle X, Y \rangle = \langle Y, X \rangle \quad 1 \equiv \langle Y, Y \rangle.$$

L'intérêt de cette réduction à un champ de repères orthogonaux des espaces tangents :

$$T_p S = \mathbb{R} X_p \oplus \mathbb{R} Y_p \quad (\forall p \in U),$$

va au-delà d'une analogie entre la structure tangentielle de S et la géométrie euclidienne standard. En effet, la réduction à une orthogonalité simplifie substantiellement la *forme algébrique* du concept de dérivation covariante, et au-delà encore, va même permettre de produire une formule intégrale explicite du transport parallèle associé.

Plus précisément, en utilisant le fait qu'une différentiation des identités :

$$1 \equiv \langle X, X \rangle, \quad 0 \equiv \langle X, Y \rangle, \quad 1 \equiv \langle Y, Y \rangle,$$

au moyen d'un champ de vecteurs quelconque $Z \in \mathcal{X}(S)$ produit 0 à gauche :

$$0 \equiv \langle \nabla_Z(X), Y \rangle + \langle X, \nabla_Z(Y) \rangle,$$

on démontre par un raisonnement mathématique rigoureux que la différentiation covariante doit nécessairement agir au niveau infinitésimal comme une *rotation*, d'angle $-\frac{\pi}{2}$, suivie d'une certaine dilatation qui dépend du point.

C'est-à-dire que dans un champ de repères orthonormés $\{X_p, Y_p\}_{p \in U}$, pour tout champ $Z \in \mathcal{X}(U)$, on a des formules :

$$\begin{aligned} \nabla_Z(X) &= -\omega(Z) Y, \\ \nabla_Z(Y) &= \omega(Z) X, \end{aligned}$$

qui expriment comment les vecteurs de la base ambiante sont différenciés. Ici, la rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$ envoie X sur $-Y$ et Y sur X . Ici, le facteur de dilatation en question est repéré au moyen d'une certaine 1-forme différentielle :

$$\omega \in \Gamma(U, T^*X).$$

Une forme différentielle générale α sur U , rappelons-le brièvement, est une application $\mathcal{C}^\infty(U)$ -linéaire :

$$\alpha: \mathcal{X}(U) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(U)$$

du \mathcal{C}^∞ -module $\mathcal{X}(U)$ des champs de vecteurs différentiables sur U à valeurs dans la \mathbb{R} -algèbre $\mathcal{C}^\infty(U)$ des fonctions indéfiniment différentiables sur U . Dans cette première étape de la présentation, nous avons trouvé une synthèse intermédiaire en cette application linéaire ω qui va des champs de vecteurs vers les fonctions différentiables : ce que nous gagnons à travers cette synthèse, c'est la linéarité.

Cette 1-forme de connexion ω est un nouveau concept qui retranscrit alors une abstraction de la notion de connexion comme collection de formes linéaires sur les espaces tangents à S . Autrement dit, en tout point $p \in U$, la 1-forme ω associe une forme linéaire :

$$\omega_p: T_p S \longrightarrow \mathbb{R},$$

de telle façon que pour tout champ $Z \in \mathcal{X}(U)$, la fonction $p \mapsto \omega_p(Z_p)$ soit différentiable.

Cette 1-forme ω , uniquement déterminée par $\nabla_\bullet(\bullet)$, est appelée *forme (locale) de connexion* associée au champ de repères orthonormés.

Ici, donc, le concept subit une transformation avantageuse. Le nombre de fonctions au moyen desquelles il s'exprime est réduit. Sa signification géométrique s'en trouve éclaircie.

Dans de telles bases locales orthonormées, les transports parallèles :

$$J_{t',t}^\gamma: T_{\gamma(t)} S \longrightarrow T_{\gamma(t')} S$$

deviennent alors de simples *rotations* — dépendant de γ , de t , et de t' —, puisque la structure métrique est respectée. Par conséquent, l'action linéaire de $J_{t',t}^\gamma$ ne s'exprime pas comme une matrice 2×2 quelconque dans les bases :

$$\{X_{\gamma(t)}, Y_{\gamma(t)}\} \quad \text{et} \quad \{X_{\gamma(t')}, Y_{\gamma(t')}\},$$

mais comme une *matrice de rotation* :

$$J_{t',t}^\gamma = \begin{pmatrix} \cos \theta^\gamma(t', t) & -\sin \theta^\gamma(t', t) \\ \sin \theta^\gamma(t', t) & \cos \theta^\gamma(t', t) \end{pmatrix},$$

pour un certain angle $\theta^\gamma(t', t) \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

Les axiomes naturels d'inversion et de transitivité des sens de parcours imposent des relations de Chasles :

$$\theta^\gamma(t, t) = 0 \quad \text{et} \quad \theta^\gamma(t'', t') = \theta^\gamma(t'', t) + \theta^\gamma(t', t).$$

Ensuite, une analyse de pensée convainc aisément que si un transport parallèle $J_{\bullet,\bullet}^\gamma$ existe dans un champ de repères orthonormés, alors son angle de rotation est nécessairement relié à la forme différentielle fondamentale par l'équation :

$$\omega\left(\frac{d\gamma}{dt}(t)\right) = -\frac{\partial \theta^\gamma(t', t)}{\partial t'} \Big|_{t'=t}.$$

Toujours, donc, avec une paire $\{X, Y\}$ de champs de vecteurs orthonormés locaux définis dans un ouvert $U \subset S$:

$$1 \equiv \langle X, X \rangle, \quad 0 \equiv \langle X, Y \rangle = \langle Y, X \rangle, \quad 1 \equiv \langle Y, Y \rangle.$$

une simple intégration de cette relation différentielle permet de reconstituer l'angle induit par un transport parallèle à partir du constituant fondamental ω de l'opérateur de différentiation covariante :

$$\theta^\gamma(t', t) = \int_t^{t'} \omega\left(\frac{d\gamma}{du}(u)\right) du.$$

En résumé — et en conclusion transitoire —, le parcours de pensée mathématique a été le suivant.

- Élaboration d'un concept abstrait de transport parallèle.
- Naissance d'un concept infinitésimal de différentiation covariante.
- Normalisation et simplification des équations mathématiques caractéristiques.
- Réinterprétation infinitésimale de l'écart-transport.
- Réintégration globale de l'écart-transport infinitésimal.

En mathématiques, le savoir absolu, c'est la compréhension des synthèses, au-delà et par-delà le labyrinthe symbolique des démonstrations détaillées. Toujours, les concepts sont travaillés par des équivalences potentielles ou actuelles, puisqu'ils portent en eux un gradient transformationnel, avec une grande part d'irréversibilité synthétique, témoin d'avancement de connaissance.

Ici, en géométrie *analytique et différentielle*, la plupart des conceptions s'enracinent dans l'infinitésimal. Les caractéristiques même des êtres s'expriment selon certaines modalités fonctionnelles spécifiques qui intègrent ce qu'ils sont réellement. La présence de l'infinitésimal dans la structuration théorique, au fond, n'est due qu'à sa force de donation instantanée. L'objet, dans sa production intellectuelle, se réoriente, comme par un magnétisme, dans les directions synthétiques adéquates.

Pourquoi l'infinitésimal est-il au fond de tous ces concepts ? D'abord, on sait qu'il est à la base métaphysique de toute conception de la notion de différentielle. Depuis le XVII^{ème} siècle, l'infinitésimal est au cœur de la réflexion physico-mathématique. Mais il s'est propagé à tous les concepts introduits en géométrie *différentielle*. Et ce, même quand une construction algébrique vient gouverner les structures qui organisent la géométrie, comme c'est par exemple le cas pour les formes différentielles. Bien plus, ces développements lui donnent de nouvelles base d'appui, à travers lesquelles il se réalise. On doit noter la puissance synthétique du thème infinitésimal qui possède ce pouvoir de se lier à l'algébrique sous diverses formes.

Il est étonnant que le transport parallèle puisse se réduire, comme nous l'avons vu plus haut, à une rotation suivie d'une dilatation. Mais précisément, une compréhension en profondeur du transport parallèle implique le concept de rotation. C'est la 1-forme dite *1-forme de connexion* qui a permis de l'introduire effectivement.

Au niveau de l'individualité pensante, du sujet mathématique, du je en apprentissage, tout cela demeure souvent invisible.

4. Holonomie du transport parallèle

En général, le transport parallèle d'un vecteur $Z_p \in T_p S$ le long d'une courbe fermée partant d'un point $p \in S$ et y revenant donne des vecteurs différents, y compris *a fortiori* lorsqu'on change de courbe. Autrement dit, si $\lambda: [0, 1] \rightarrow S$ avec $\lambda(0) = p = \lambda(1)$ est une telle courbe, alors en général :

$$J^\lambda(Z_p) \neq Z_p,$$

pour la plupart des lacets λ et des vecteurs $Z_p \in T_p S$.

Commençons par penser cette possibilité au moyen d'une conceptualisation minimale, qui laisse implicites de nombreuses questions. En mathématiques, fréquemment, les concepts ne sont qu'expression de potentialités, ils conceptualisent en anticipation, et non en clôture : c'est toute la force de leur flexibilité, et aussi, la faiblesse de leurs accomplissements, aspect d'ouverture fréquemment invisible aux philosophies des mathématiques.

À cet effet, introduisons une notation pour désigner l'ensemble des lacets en question :

$$\Omega_p(S) := \left\{ \text{lacets différentiables } \lambda: [0, 1] \rightarrow S, \lambda(0) = p = \lambda(1) \right\}.$$

Les lacets peuvent être composés. En effet, si λ_1 et λ_2 sont deux lacets en p , on définit :

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 =: \lambda,$$

comme étant le lacet parcourant d'abord λ_2 , puis λ_1 , et on renormalise le paramétrage à être encore l'intervalle $[0, 1]$. D'ailleurs, pour des lacets (différentiables), $\Omega_p(S)$ est un groupe (abstrait), appelé *groupe de Poincaré (différentiable) de S* .

À tout lacet $\lambda \in \Omega_p(S)$ est associé un transport parallèle :

$$J^\lambda: T_p S \xrightarrow[\perp]{\sim} T_p S,$$

qui est un isomorphisme linéaire respectant la structure euclidienne infinitésimale de $T_p S$:

$$\langle J^\lambda(X), J^\lambda(Y) \rangle = \langle X, Y \rangle.$$

On appelle *groupe orthogonal* le groupe des transformations qui respectent ce produit scalaire, et on le note :

$$J^\lambda \in O(T_p S) \cong O_2(\mathbb{R}) := \{A \in GL_2(\mathbb{R}) : {}^t A A = I_{2 \times 2}\}.$$

Il est évident que pour tous $\lambda_1, \lambda_2 \in \Omega_p(S)$, on a :

$$J^{\lambda_1} \circ J^{\lambda_2} = J^{\lambda_1 \cdot \lambda_2},$$

ainsi que :

$$J^{\lambda^-} = (J^\lambda)^{-1},$$

où λ^- est le lacet λ parcouru en sens inverse.

Dans le groupe de Poincaré, certains lacets λ sont dits *homotopes à zéro* lorsqu'ils peuvent être (différentiablement) déformés jusqu'à devenir *constants* — autrement dit, s'il existe une famille à 1 paramètre :

$$\left(\lambda_s(t) \right)_{s \in [0,1]} \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} \lambda_0(t) &\equiv \lambda(t), \\ \lambda_1(t) &\equiv p \end{aligned} \quad (\text{lacet constant}).$$

On vérifie alors que les J^{λ° , pour des lacets λ° homotopes à zéro, préservent toute orientation donnée de $T_p S$ donnée à l'avance, c'est-à-dire :

$$J^{\lambda^\circ} \in \text{SO}(T_p S) \cong \text{SO}_2(\mathbb{R}) := \{A \in \text{GL}_2(\mathbb{R}) : {}^t A A = I_{2 \times 2}, \det A = 1\},$$

ce qui conduit à introduire :

$$\Omega_p^\circ(S) := \left\{ \text{lacets différentiables } \lambda : [0, 1] \longrightarrow S, \text{ homotopes à zéro, } \lambda(0) = p = \lambda(1) \right\}.$$

On appelle :

$$\begin{aligned} \{J^\lambda\}_{\lambda \in \Omega_p(S)} & \quad \text{groupe d'holonomie de } S \text{ en } p, \\ \{J^\lambda\}_{\lambda \in \Omega_p^\circ(S)} & \quad \text{groupe d'holonomie restreinte de } S \text{ en } p. \end{aligned}$$

Ces groupes d'holonomie sont intimement liés à une nature quantitative qui est la *courbure* de la surface S munie de sa métrique.

Le commentaire philosophique de cette situation se développe sur plusieurs plans. Dans les mathématiques récentes, la géométrie est contrôlée par une structure algébrique qui s'impose : la structure de groupe. Par sa forme, un groupe réussit à exprimer et à contrôler un ensemble de gestes exploratoires d'une entité géométrique comme une surface. Cela est dû partiellement à la forme de stabilité qu'introduit la structure de groupe régissant les éléments géométriques qui sont en jeu. Les lacets, qui sont des chemins dont les extrémités sont confondues, permettent de prélever juste ce qu'il faut d'occupation de l'espace (surface) considéré pour l'explorer. Une sorte de « *squelette flexible* » peut rendre compte de propriétés topologiques de la surface (ou de la variété). Et ces éléments, en se composant suivant les lois du groupe qu'ils forment, déploient l'observation topologique.

Nous avons affaire ici à une forme d'abstraction « intermédiaire » dans laquelle un aspect de l'espace (surface ou variété) est prélevé (lacet), lui-même commandé par des éléments de structure algébrique. C'est cette situation « intermédiaire » qui fait la force conceptuelle du groupe de Poincaré. Nous sommes au plus près de l'objet topologique. On remarquera que la propriété topologique principale à laquelle on fait souvent référence est la connexité, qui nous indique si un espace est tout d'un bloc ou non. Les éléments de base qui nous permettent d'examiner l'espace sont suffisamment autonomisés pour que nous puissions exercer notre contrôle et raisonner sur eux en usant et de l'algèbre et de la géométrie qu'ils comportent.

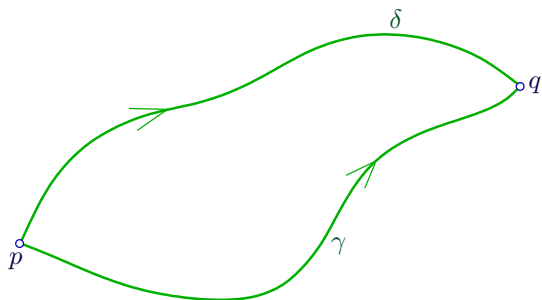
En construisant à partir des lacets le groupe d'holonomie, un observateur se déplace dans l'espace tangent à la variété, en préservant l'orientation. Nous bénéficions des avantages de la structure de groupe, mais cette fois en nous rapprochant de la possibilité d'une analyse de la courbure de la variété. Ce qu'il faut comprendre tient au processus de la réflexion mathématique : nous voulons toujours comprendre ce qu'est la courbure, mais nous nous sommes placés à un niveau depuis lequel les concepts de l'algèbre et de la topologie peuvent contribuer à déterminer le concept de courbure. Et il faut comprendre comment ces nouvelles déterminations entrent en scène.

Il nous faut insister sur le fait qu'une fois la synthèse déterminée effectuée, les concepts ainsi imbriqués continuent d'agir ensemble, ici l'algèbre et la topologie qui lui est intégrée. C'est la raison qui fait de cette synthèse une forme d'irréversibilité.

Les deux concepts dont nous usons ici sont ceux de groupe d'holonomie et de sa restriction. Considérons cette dernière. Nous manipulons des lacets homotopes à zéro que nous transportons parallèlement. Si bien que nous synthétisons la théorie du transport parallèle

et la théorie du groupe de Poincaré. Le groupe d'holonomie qui réussit cette synthèse est devenu le nouvel analyseur de la courbure d'une variété. Le groupe d'holonomie est un groupe orthogonal, car il doit préserver le produit scalaire, la composition des lacets correspondant à leur produit porté par le transport parallèle.

5. La courbure comme infinitésimalisation de l'holonomie



En général, étant donné deux points distincts quelconques sur une surface :

$$p, q \in S, \quad p \neq q,$$

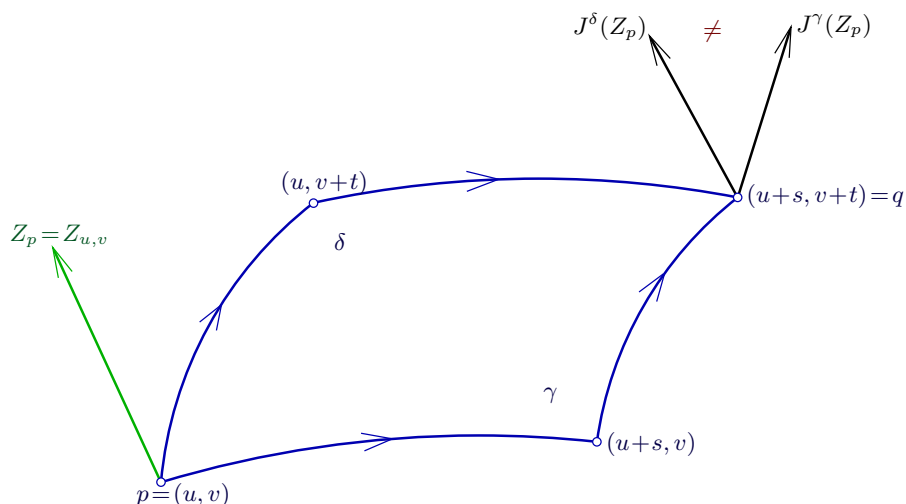
éventuellement arbitrairement proches, quand on prend deux courbes différentes γ et δ allant de p à q , les transports parallèles associés *diffèrent* :

$$J_{q,p}^{\gamma} \neq J_{q,p}^{\delta}.$$

Comment, alors, mesurer l'écart ? Comment quantifier cette différence ?

Une difficulté réside dans la variabilité infinie des choix de courbes joignant p à q : l'espace des courbes est réellement de dimension infinie !

Pour comprendre ce défaut de coïncidence, à nouveau, la théorie mathématique va *infinitésimaliser les considérations*, et contre toute attente, rien ne va être perdu à travers ce passage au microscopique. Ainsi, le point q sera supposé (très) proche de p . Ensuite, les courbes γ et δ vont, pour simplifier, être envisagées comme côtés de parallélogrammes (infiniment) petits, afin de *normaliser* la forme de la dépendance en le choix des courbes.



Plus précisément, dans des coordonnées locales :

$$(u, v) \in U \subset S$$

sur un ouvert $U \subset S$, avec deux quantités réelles $s, t \in \mathbb{R}$ petites qui tendront vers 0, introduisons, comme sur le diagramme, 4 points qui sont sommets d'un parallélogramme.

Si donc $Z_p = Z_{u,v}$ est un vecteur quelconque dans l'espace tangent $T_p S$, et si γ est la courbe inférieure droite du parallélogramme :

$$\gamma: (u, v) \longrightarrow (u + s, v) \longrightarrow (u + s, v + t),$$

tandis que δ est la courbe supérieure gauche :

$$\delta: (u, v) \longrightarrow (u, v + t) \longrightarrow (u + s, v + t),$$

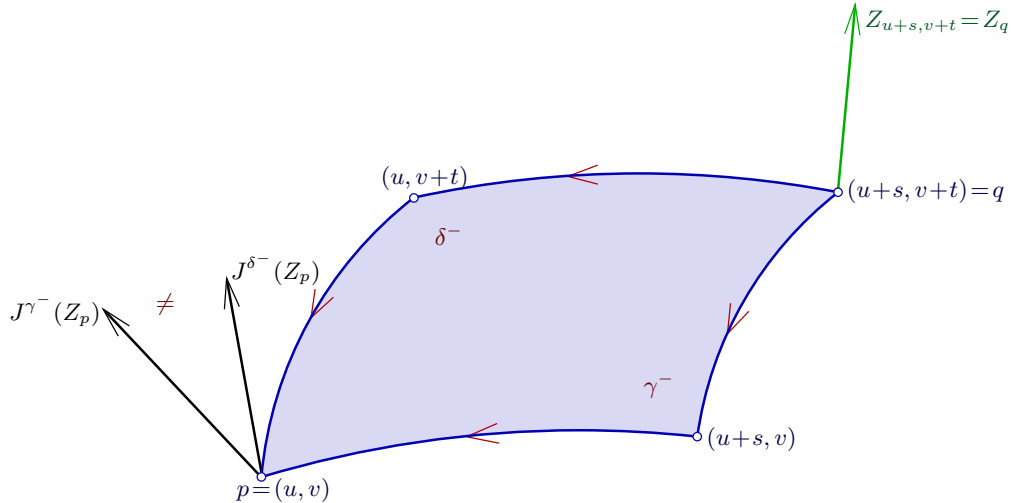
on n'a en général pas coïncidence des transports le long de γ et le long de δ :

$$J^\gamma(Z_p) \neq J^\delta(Z_p) \quad (\text{en général}).$$

En fait, comme le point $q = (u + s, v + t)$ va varier avec $(s, t) \longrightarrow (0, 0)$ lorsque le parallélogramme va se réduire, il vaut mieux — car cela est essentiellement équivalent — mesurer un écart de transport de vecteurs en q vers l'espace tangent fixe $T_p S$ en p .

On considère donc un champ de vecteurs $Z \in \mathcal{X}(U)$ défini au voisinage de p , et on effectue les deux transports parallèles de la valeur $Z_q = Z_{u+s, v+t}$ de Z en q le long des deux courbes γ^- et δ^- parcourues *en sens inverse* :

$$J^{\gamma^-}(Z_q) \neq J^{\delta^-}(Z_q) \quad (\text{en général}).$$



Par divers arguments heuristiques testés sur des exemples où des calculs complets sont accessibles, on se convainc que cette différence est quantitativement de l'ordre de l'*aire* du parallélogramme en question, laquelle est approximativement égale à une constante que multiplie le produit :

$$s t.$$

Comme on l'a déjà fait pour définir la différentiation covariante :

$$\begin{aligned} \nabla_{X_0}(Y) &:= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_0} J_{t_0, t}^\gamma(Y_{\gamma(t)}) \\ &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{J_{t_0, t}^\gamma(Y_{\gamma(t)}) - Y_{\gamma(t_0)}}{t - t_0}, \end{aligned}$$

on va ici examiner le comportement du *quotient* :

$$\lim_{(s,t) \rightarrow (0,0)} \frac{J^{\gamma^-}(Z) - J^{\delta^-}(Z)}{s t},$$

qui converge toujours vers une quantité finie, comme le dévoile un théorème fondamental qui suit. Dans cet énoncé, on observera que :

- γ suit $\frac{\partial}{\partial u}$ pendant le temps s , puis $\frac{\partial}{\partial v}$ pendant le temps t ;
- δ suit $\frac{\partial}{\partial v}$ pendant le temps t , puis $\frac{\partial}{\partial u}$ pendant le temps s .

Théorème 5.1. *Pour tout champ de vecteurs $Z \in \mathcal{X}(U)$:*

$$\lim_{(s,t) \rightarrow (0,0)} \frac{J^{\gamma^-}(Z) - J^{\delta^-}(Z)}{s t} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial v}}(Z) \right) - \nabla_{\frac{\partial}{\partial v}} \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial u}}(Z) \right). \quad \square$$

Ainsi, la quantification du défaut de commutativité infinitésimale du transport parallèle se ré-exprime-t-elle comme défaut de commutativité des deux opérateurs de différentiation covariante $\nabla_{\frac{\partial}{\partial u}}$ et $\nabla_{\frac{\partial}{\partial v}}$ dirigés par les côtés du parallélogramme infinitésimal.

Ce résultat remarquable manifeste un mouvement théorique fréquent en mathématique : le passage d'une propriété d'un domaine d'objets à une propriété du même type des opérateurs.

Cette expression peut ensuite être intégrée pour retrouver des écarts globaux dans les transports parallèles, comme nous allons le voir dans peu de temps. Pour l'instant, ajoutons que cette équation-limite devrait se généraliser à des paires de champs de vecteurs quelconques :

$$X, Y \in \mathcal{X}(U \subset S) \quad \text{au lieu de } \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v},$$

mais une différence de taille apparaît. En effet, pour deux champs quelconques :

$$\begin{aligned} X &= A(u, v) \frac{\partial}{\partial u} + B(u, v) \frac{\partial}{\partial v}, \\ Y &= C(u, v) \frac{\partial}{\partial u} + D(u, v) \frac{\partial}{\partial v}, \end{aligned}$$

on n'a pas en général coïncidence des deux points-extrémités de courbes intégrales :

$$\exp \left(tY(\exp(sX))(p) \right) \neq \exp \left(sX(\exp(tY))(p) \right),$$

ce qui était le cas avec $X = \frac{\partial}{\partial u}$ et $Y = \frac{\partial}{\partial v}$, car :

$$((u, v) + (s, 0)) + (0, t) = ((u, v) + (0, t)) + (s, 0).$$

Donc puisque les points-extrémités de γ et de δ ne coïncident pas en général, on ne peut pas vraiment parler du quotient :

$$\frac{J^{\gamma^-}(Z) - J^{\delta^-}(Z)}{s t} \stackrel{?}{=} \nabla_X(\nabla_Y(Z)) - \nabla_Y(\nabla_X(Z)).$$

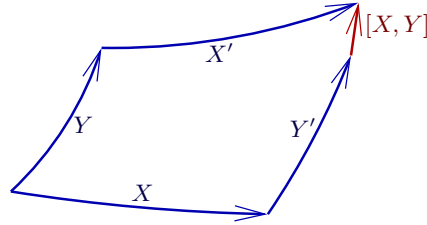
En fait, la non-coïncidence des deux extrémités ci-dessus est quantifiée par le *crochet de Lie* entre les deux champs de vecteurs :

$$[X, Y] := (X(C) - Y(A)) \frac{\partial}{\partial u} + (X(D) - Y(B)) \frac{\partial}{\partial v},$$

au sens où en un point $p \in U \subset S$, la valeur de ce crochet intervient comme terme d'ordre 2 dans le *commutateur* entre les flots respectifs :

$$\exp(-tY) \circ \exp(-tX) \circ \exp(tY) \circ \exp(tX)(p) = p + t^2 [X, Y](p) + O(t^3),$$

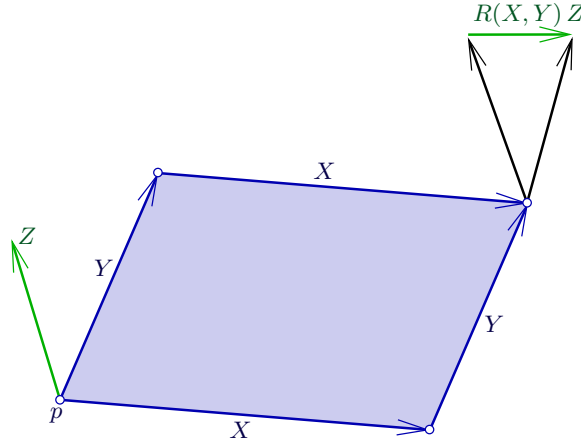
commutateur qui ne peut donc être identiquement nul que lorsque le crochet de Lie s'annule identiquement.



6. Courbure associée à une différentiation covariante

Ceci conduit nécessairement à tenir compte du crochet de Lie dans le quotient ci-dessus en ajoutant un terme correctif. Le bon choix s'exprime alors comme un nouveau concept :

$$R(X, Y) Z := \nabla_X(\nabla_Y(Z)) - \nabla_Y(\nabla_X(Z)) - \nabla_{[X, Y]} Z.$$



Un diagramme, dessiné dans le cas où $[X, Y] = 0$ commutent, illustre ce que fait cet opérateur $R(X, Y) \cdot$ défini pour une paire de champs (X, Y) qui découpent un parallélogramme : il transforme tout champ de vecteurs Z en le champ de vecteurs $R(X, Y) Z$ obtenu en calculant la différence des valeurs de ses deux transports parallèles le long des deux côtés du parallélogramme.

Théorème 6.1. *L'opérateur de courbure $R(\cdot, \cdot) \cdot$ est un tenseur au sens où l'application :*

$$(X, Y, Z) \longmapsto R(X, Y) Z,$$

antisymétrique par rapport à ses deux premiers arguments, est trilinéaire, y compris pour la multiplication par des fonctions différentiables f, g, h quelconques sur la surface :

$$R(fX, gY) hZ = fgh R(X, Y) Z.$$

Vis-à-vis de la métrique, il satisfait de plus :

$$\langle R(X, Y)Z, T \rangle = -\langle R(X, Y)T, Z \rangle. \quad \square$$

Les calculs passés sous silence ici montrent qu'il y a nécessité du terme correctif $-\nabla_{[X,Y]}Z$ pour garantir ce caractère tensoriel. Une double non-commutativité est donc à l'œuvre ici : celle du crochet de Lie, et celle de la non-holonomie.

En conclusion, on a infinitésimalisé l'holonomie, envisagée comme écart de commutativité, et on l'a ensuite conceptualisée au moyen d'un opérateur simple qui dépend de parallélogrammes associés à des paires de champs de vecteurs. En plaçant les uns à côtés des autres de nombreux parallélogrammes infinitésimaux qui reconstitueraient des domaines macroscopiques de la surface S , on pourra s'imaginer reconstituer une vision plus globale de l'holonomie.

Le commentaire philosophique porte ici sur la non-commutativité. De façon générale, il est facile de comprendre comment la non-commutativité est comprise comme un écart à l'holonomie et pourquoi il en est ainsi. Lorsque deux vecteurs sont transportés parallèlement le long de deux côtés suivant deux parcours différents d'un parallélogramme infinitésimal tracé sur une surface, ces deux vecteurs ne sont pas les mêmes en direction. On se représente facilement pourquoi cette différence mesure la courbure de la surface. L'écart en direction est exprimée par l'holonomie. Le développement conceptuel étend l'explication à un domaine plus général qui est celui des rotations. Cette nouvelle synthèse explique et développe en même temps le concept de courbure. Quand l'espace est courbe il n'est nullement indifférent de se déplacer suivant des parcours (infinitésimaux) pour aller d'un point à un autre, et il devient possible de concevoir et de mesurer la différence. Du même coup, j'ai concrétisé les déterminations de la courbure, comme modalité de la spatialisation de la quantité ou quantification de l'espace du déplacement.

Il est très remarquable que tous les arguments qui cherchent à montrer quelle est la structure explicite de la courbure reposent sur des énoncés portant eux-mêmes sur l'examen de la *commutativité* d'un parcours de trajectoires. On a vu plus haut comment cette réflexion s'effectue à l'aide de la structure de groupe de Lie. Celle-ci est une autre synthèse qui nous introduit à un autre champ de réflexion. Nous en dirons un minimum pour être à même d'énoncer un commentaire philosophique.

Sur une variété M , on définit une dérivée de Lie par rapport à un champ de vecteurs $\xi \in \mathcal{X}(M)$. La dérivée de Lie $\mathcal{L}_\xi(\bullet)$ est définie comme une opération effectuée par rapport à ce champ de vecteurs ξ . Appliquée à une grandeur géométrique Q , elle mesure les variations de cette grandeur, par comparaison à ce qu'elle serait si elle était simplement entraînée par le champ ξ . C'est une mesure de variation relative à un champ de vecteurs. On peut la noter $\mathcal{L}_\xi(Q)$. Elle s'applique dans des contextes très généraux. Considérons la dérivée de Lie d'un champ de vecteurs η par rapport au champ ξ .

On a vu qu'un champ de vecteurs s'interprète comme un opérateur différentiel agissant sur des champ scalaires et satisfaisant aux lois d'un opérateur différentiel. Il en est de même de l'opérateur

$$L(\Phi) := \xi(\eta(\Phi)) - \eta(\xi(\Phi)),$$

qui satisfait à ces lois si ξ et η y satisfont aussi. Ce *commutateur* des deux opérations ξ et η s'écrit donc sous la forme d'un crochet de Lie :

$$L = \xi \circ \eta - \eta \circ \xi := [\xi, \eta],$$

et nous l'avons utilisé ci-dessus.

De nouveau, ce commutateur a une signification géométrique. Nous recourons de nouveau à un parallélogramme de flèches construit à l'aide de ξ et de η . Les côtés sont construits à l'ordre $O(\varepsilon)$, et L mesure le défaut de commutativité à l'ordre $O(\varepsilon^2)$. Nous

travaillons, comme nous l'avons indiqué, pour aller au-delà de la simple structure de l'espace tangent, dans une exploration à l'ordre 2. Un déplacement infinitésimal d'un élément du groupe le long du champ de vecteurs ξ représente la transformation correspondant à la multiplication à gauche de tout élément du groupe par l'élément infinitésimal représenté par ξ . Si on multiplie par ε , on peut concevoir $\varepsilon \xi$ comme un déplacement à l'ordre $O(\varepsilon)$ le long du champ de vecteurs ξ . Pour obtenir une information sur la structure de groupe, correspondant à la structure additive de l'espace tangent à l'élément neutre du groupe, on doit aller comme on l'a fait ci-dessus jusqu'à l'ordre $O(\varepsilon^2)$, en regardant le commutateur qui est *un essai dans l'abstrait de la commutativité*. Et $\varepsilon^2[\xi, \eta]$ correspond à la fermeture du parallélogramme dont les premiers côtés sont $\varepsilon \xi$ et $\varepsilon \eta$ à l'origine. La plongée dans l'infinitésimal s'est faite à des ordres différents qui ont permis de décrire les propriétés de commutativité.

Si l'on se rapporte aux développements ci-dessus, on comprend la relation de cette opération de commutation avec les éléments infinitésimaux d'un groupe de Lie. L'exploration d'une surface ou d'une variété a consisté au sein d'une infinitésimalisation de base à tester la commutativité de trajectoires (de courbes) sur la surface en question. Comme les trajectoires doivent pouvoir se composer et se décomposer elles ont été elles-mêmes insérées dans une structure de groupe, elles-mêmes supports pour des propriétés topologiques ou différentielles. Ces constructions dans lesquelles objets et fonctions échangent leur place approfondissent à chaque étape les formes de réflexivité synthétique, installent *nos* productions comme des objets d'analyse *en soi*.

7. Invariances de la forme et de la fonction de courbure

À présent, comment s'exprime l'action de cet opérateur $R(\cdot, \cdot) \cdot$ dans un repère orthonormé local $\{X, Y\}$ sur un ouvert $U \subset S$? Un calcul qui utilise ce qui précède conduit aux expressions :

$$R(Z, T) X = -d\omega(Z, T) Y,$$

$$R(Z, T) Y = d\omega(Z, T) X,$$

où $d\omega = d\omega_{X,Y}$ est la différentielle extérieure de la 1-forme de connexion $\omega = \omega_{X,Y}$ associée — une 2-forme différentielle absolument fondamentale ! Car la clé de voûte de toute la théorie est *l'invariance absolue de cette 2-forme différentielle*.

En effet, on démontre que pour tout autre choix $\{X', Y'\}$ de repère orthormé sur l'ouvert $U \subset S$, qui s'exprime alors nécessairement sous la forme :

$$X'_p = \cos \theta(p) X_p + \sin \theta(p) Y_p,$$

$$Y'_p = -\sin \theta(p) X_p + \cos \theta(p) Y_p,$$

au moyen d'une certaine fonction différentiable unique $p \mapsto \theta(p)$ définie sur U , la nouvelle 1-forme différentielle de connexion associée $\omega_{X',Y'}$ est reliée à l'ancienne par la formule simple :

$$\omega_{X',Y'} = \omega_{X,Y} - d\theta,$$

et alors la relation de Poincaré $d \circ d = 0$ montre l'égalité :

$$\begin{aligned} d\omega_{X',Y'} &= d\omega_{X,Y} - d \circ d\theta \\ &= d\omega_{X,Y} - 0. \end{aligned}$$

En conclusion, la 2-forme différentielle, dite *2-forme de courbure* :

$$\Omega := d\omega,$$

est parfaitement bien définie, de manière interne à la surface, indépendamment de tout choix de repère orthonormé local $\{X, Y\}$, et par conséquent, elle est même définie *globalement* sur S .

Cette simple relation $\omega' = \omega - d\theta$ qui fait apparaître en l'espace du terme additionnel $-d\theta$ une correction nécessaire, ou *changement de jauge*, lorsqu'on effectue un changement de référentiel, produit une relation invariante :

$$\Omega' = \Omega,$$

grâce à un *procédé d'élimination* universel en algèbre et en géométrie : l'*effectuation suppressive*. Les objets dépendent de certains choix ? Cherchons alors à faire disparaître ces choix par approfondissement du calcul — ici, différentiation. Ce procédé est un *leitmotiv* des mathématiques dans leur ensemble, et c'est lui qui, par le calcul, engendre des conceptualisations. L'œuvre d'Élie Cartan en témoigne.

Ensuite, faisons agir cette 2-forme différentielle Ω sur la paire de référence :

$$k := \Omega(X, Y) = d\omega(X, Y),$$

ce qui produit une *fonction globale* sur la surface, appelée *courbure de Gauss*, en tant qu'une vérification théorique convaincant qu'elle coïncide bien avec le concept dont Gauss a démontré l'invariance d'une manière totalement différente.

Qui plus est, le raisonnement élémentaire qui précède permet de déduire une version générale du *Theorema Egregium* de Gauss, à savoir : Si une équivalence Φ entre deux ouverts de deux surfaces munies de deux métriques est donnée :

$$S \supset U \xrightarrow{\Phi} \bar{U} \subset \bar{S},$$

et si $\{\bar{X}, \bar{Y}\}$ est le repère orthonormé transféré par Φ sur la surface-image :

$$\bar{X} = \Phi_*(X) \quad \text{et} \quad \bar{Y} = \Phi_*(Y),$$

alors la 2-forme de courbure et la fonction de courbure coïncident aux points correspondants par Φ :

$$\Omega = \bar{\Omega} \quad \text{et} \quad k = \bar{k}.$$

Nous avons fait apparaître un opérateur, une nouvelle forme synthétique a abstrait le tenseur de courbure. Cet opérateur apparaît dans le calcul des dérivations covariantes et exprime le fait que l'holonomie restreinte empêche d'avoir un théorème d'interversion des dérivées secondes, lorsque nous comparons la définition du crochet avec l'expression suivante des dérivées covariantes

$$K(X, Y) \cdot Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z,$$

définie pour tout triplet X, Y, Z de champs de vecteurs. Cette expression est C^∞ -trilinéaire en X, Y, Z , et antisymétrique en X, Y . Cette trilinearité est encore une manière dont se « déploie » la courbure en fonction des champs de vecteurs lorsqu'ils sont multipliés par une fonction et ce, pour chacun d'eux. La multiplication se transporte d'un champ à toute l'expression, de même que l'expression est additive en chacun des trois champs. La courbure est devenue un concept qui permet de manipuler trois champs de vecteurs en respectant les contraintes ci-dessus. Nous y avons gagné une modalité de réflexion de l'espace.

En particulier nous avons noté qu'une détermination réciproque entre l'holonomie restreinte et la forme de courbure est mise en évidence. Nous avons également, en effet, pu

donner une expression abstraite de la forme de courbure. Nous disposons d'abord d'un opérateur de courbure. Cet opérateur est une nouvelle synthèse, mais en tant qu'opérateur. Il est unique. S'il est défini sur un certain type d'espace local, il ne dépend pas de l'orientation qui y est choisie. Cette remarque pour insister sur le fait que des propriétés essentielles de l'espace (des ouverts de cet espace) sont incluses dans l'opérateur lui-même.

Que signifie ce fait théorique que la courbure dont nous avons pu voir les expressions soit concentrée et exprimée dans un opérateur ? Cela signifie avant tout qu'un objet, ou un phénomène géométrique appréhendable dans une représentation caractérisant des modes de présentation (des reliefs, des creusements, des déformations du planaire, *etc.*) se traduit dans un mode de connaissance conceptuelle et calculable. Ce mode de connaissance fortement synthétique est devenue une forme (qui intègre à la réflexion qu'il propose les avantages fournis par les formes différentielles), pourvue d'une très grande capacité d'intégration. Nous pouvons y voir les conditions de possibilité *a priori* tout autant intuitives que conceptuelles de la quantification de l'espace ou, comme dit ci-dessus, de la spatialisation de la quantification.

8. Réintégration de l'infinésimalisé : mesure de courbure

Toutes ces quantités X , Y , ω , Ω , k sont infinitésimales et ponctuelles. À un certain moment, nous avons fait observer que l'infinésimalisation était une simplification décidée pour les besoins d'une exploration. Et rien ne nous garantissait que notre *conception* du défaut de commutativité du transport parallèle serait complète et achevée de la sorte. Au contraire, nous pouvions craindre que l'emploi de formes géométriques aussi simples que les parallélogrammes infinitésimaux risquât de nous faire perdre l'espoir de comprendre ce qu'il se passe au niveau macroscopique. Contre toute attente, nous allons maintenant argumenter que rien du concept réel n'a été perdu en chemin, et ce, grâce à des procédés d'*intégration*.

Soit $D \subset S$ un domaine bordé par un lacet différentiable $\lambda := \partial D$. Tout ce que nous avons présenté montre que la variation d'angle d'un transport parallèle le long de λ est donnée par la formule :

$$\theta(\lambda) = \int_{\lambda} \omega \quad (\text{mod } 2\pi).$$

Mais alors le théorème de Green-Riemann-Stokes permet de la ré-exprimer comme intégrale de surface, dans le domaine D , de la différentielle extérieure de ω :

$$\begin{aligned} \theta(\lambda) &= \iint_D d\omega \\ &= \iint_D \Omega, \end{aligned}$$

qui n'est autre que la 2-forme de courbure invariante Ω , cette intégrale n'étant en général pas nulle, puisque la courbure n'est pas toujours identiquement nulle.

Nous savions que le changement d'angle est en général non nul le long d'un lacet, et nous avons implicitement compris aussi qu'il ne dépendait pas du choix de repères orthonormés $\{X, Y\}$ ou $\{X', Y'\}$, puisqu'une intégration de la relation :

$$\omega' = \omega - d\theta,$$

donnait instantanément la coïncidence :

$$\begin{aligned}\int_{\lambda} \omega' &= \int_{\lambda} \omega - \int_{\lambda} d\theta \\ &= \int_{\lambda} \omega - 0,\end{aligned}$$

sachant que sur une courbe fermée, l'intégrale d'une dérivée est forcément nulle puisque les valeurs de la primitive sont les mêmes aux extrémités égales.

Mais maintenant, d'un point de vue conceptuel, tout s'éclaire : Ω est une quantité différentielle 2-dimensionnelle *invariante*, et grâce à la transformation de Green-Riemann-Stokes, le changement d'angle s'exprime en fonction d'une intégrale que Gauss appelait la *mesure de courbure* :

$$\theta(\lambda) = \iint_D \Omega \quad (\text{mod } 2\pi),$$

où l'orientation de λ est choisie de telle sorte que D se situe du côté gauche quand on parcourt $\lambda = \partial D$. En conséquence, l'holonomie est non réduite à l'identité dès qu'il y a de la courbure, à savoir, dès que la courbure de Gauss k est non identiquement nulle.

L'invariance du concept de courbure s'exprime d'ailleurs à un niveau tellement élevé que ces intégrales :

$$\iint_D \Omega = \iint_{-D} -\Omega$$

ont une valeur inchangée lorsque S est munie d'une orientation opposée.

9. Théorème de Gauss-Bonnet dans le plan euclidien \mathbb{R}^2

Lorsqu'on munit le plan \mathbb{R}^2 de la métrique pythagoricienne standard :

$$\langle X, Y \rangle := X_1Y_1 + X_2Y_2,$$

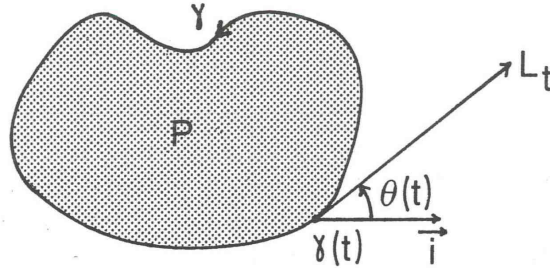
un calcul simple montre que la forme de courbure associée $\Omega \equiv 0$ est identiquement nulle.

En ce moment présent, nous procédons d'une manière qui est fréquente en mathématiques. Du point de vue d'un développement plus conceptuel et plus complet, nous venons en effet de réexprimer une situation et un résultat qui était connus par ailleurs, et qui paraissent maintenant élémentaires, rétrospectivement. Cette procédure est une façon théorique de traiter et d'envisager *par l'après*, ou *par le haut*, le fondement même d'un résultat élémentaire. Ici donc à un niveau supérieur, nous concevons dorénavant mieux ce que signifie *être planaire*, ou même *être euclidien*. Précisément, nous pouvons maintenant nous représenter qu'il s'agit d'une surface pour laquelle la forme de courbure agissant sur deux champs de vecteurs est identiquement nulle.

Essayons alors de mesurer le chemin conceptuel que nous avons accompli, et qui s'est accompli de lui-même par un mouvement intrinsèque autonome. Le plan est maintenant vu à partir d'un cadre conceptuel beaucoup plus ample, qui permet d'explorer en même temps que lui d'autres surfaces. Il a d'abord été la surface de référence, mais il est devenu un cas particulier parmi les surfaces de différentes courbures possibles. Or un ensemble de concepts a été dégagé qui n'apparaissait pas ou ne pouvait pas apparaître au seul examen du plan. Et maintenant, le plan se trouve pourvu de ces propriétés nouvelles qui n'apparaissent pas spontanément, tout comme elles n'apparaissaient pas initialement. Ces propriétés ont donc changé de statut : *leur inexistence n'est plus la même*.

Avant d'exposer le théorème de Gauss-Bonnet général dont l'essence réelle *est* de tenir compte de la présence d'une courbure de Gauss $k \neq 0$ non nulle, il est instructif de présenter ce qu'il se passe quand $k \equiv 0$, avec des hypothèses géométriques assez riches.

Soit donc $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ une courbe différentiable fermée simple, à tangente nulle part nulle. Le théorème de Jordan différentiable montre que γ borde un domaine $P \subset \mathbb{R}^2$ borné, ayant la topologie d'un disque (déformé).²⁶



Paramétrons $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, avec $\gamma(0) = \gamma(1)$. En tout point $t \in [0, 1]$, notons :

$$\theta(t) := \text{Angle} \left(\frac{d\gamma}{dt}(t), \text{axe } 0x \right)$$

l'angle orienté que fait le vecteur tangent avec la direction horizontale représentée par l'axe $0x$. Le résultat élémentaire qui constitue le germe fécond de la théorie de Gauss-Bonnet est un

Théorème 9.1. *La variation totale de l'angle $\theta(t) = \text{Angle} \left(\frac{d\gamma}{dt}, 0x \right)$ le long de la courbe fermée simple γ vaut toujours :*

$$2\pi = \int_0^1 \frac{d\theta}{dt}(t) dt = \int_{\gamma} d\theta. \quad \square$$

Ainsi, lorsqu'on parcourt γ , l'angle effectue un tour complet $2\pi = 360^\circ$. Après reparamétrisation de γ par longueur d'arc :

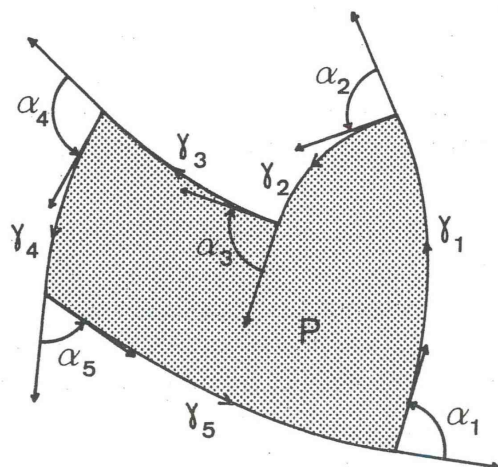
$$\gamma(s), \quad s \in [0, L], \quad L = \text{longueur}(\gamma),$$

la dérivée :

$$\frac{d\theta}{ds}(s) =: \kappa(s)$$

n'est autre que la *courbure* de γ au point $\gamma(s)$.

26. Les figures qui suivent sont extraites du livre de Lehmann-Sacré, *Géométrie et topologie des surfaces*, Presses Universitaires de France, Paris, 1982, 348 pp.



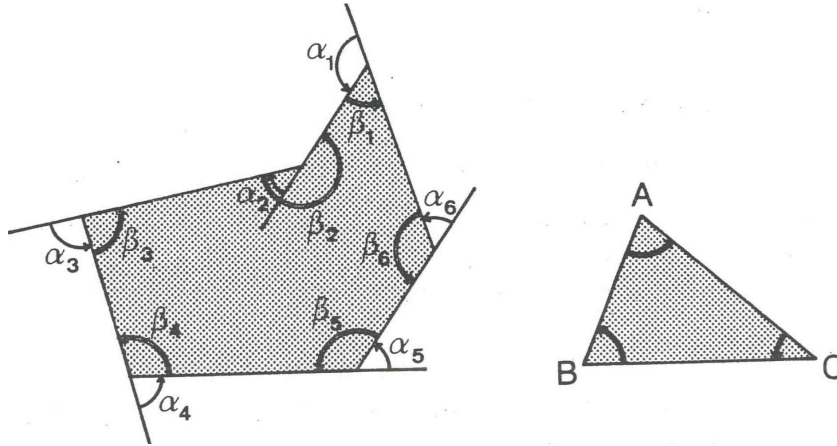
On a considéré la variation d'un angle le long de la courbe, la variation étant déterminée par la manière dont l'angle suit son contour. Cette variation totale vaut 2π , comme le théorème l'a indiqué. Il s'agit de comprendre cette variation angulaire au cours du parcours. C'est aussi un changement en direction d'une tangente à la courbe qui fait un angle avec un axe. La courbure d'une courbe est bien perceptible, comme propriété d'un parcours. De manière quasi anthropomorphique, on dit que la tangente 'éprouve' des discontinuités angulaires, au point de se dédoubler. D'abord, il faut noter que la courbure est ce qui fait qu'une courbe est *courbe*. Elle est comme immanente à la courbe, qu'elle anime de l'intérieur. Et aux points de discontinuité, c'est comme si la courbe se perdait dans sa nature même de courbe, car en ces points, la courbure est deux fois nulle. Une fois d'un côté et une fois de l'autre en le même point : il y a en effet deux tangentes en ces points. Il faudrait sans doute dire que dans ce domaine de la virtualité, il existe en ces points deux manières d'être nul qui se cumulent ou se concentrent.

En suivant la remarque que nous avons faite plus haut sur l'ontologie du virtuel — l'ontologie de l'inexistence —, il se peut que la concentration de courbure fasse écho en symétrie au calcul habituel de la courbure en dérivée seconde.

Plus généralement, en supposant que γ est seulement différentiable par morceaux, la formule devient :

$$(9.2) \quad 2\pi = \int_{\gamma} \kappa(s) ds + \sum_{1 \leq m \leq M} \alpha_m,$$

où $\alpha_1, \dots, \alpha_M$ sont les angles extérieurs entre deux morceaux lisses consécutifs de γ . À ces endroits, la tangente éprouve des discontinuités angulaires. D'une certaine manière, il se produit en ces points une *concentration infinie de courbure*, comme nous allons l'expliquer et le diagrammatiser.



Pour un polygone $P \subset \mathbb{R}^2$ dans le plan euclidien, dont les côtés, rectilignes, n'ont en eux-mêmes aucune courbure, les intégrales de $\kappa(s)$ sur les morceaux lisses du bord $\gamma = \partial P$ sont toutes nulles, et il ne reste plus que :

$$2\pi = 0 + \sum_{1 \leq m \leq M} \alpha_m.$$

En introduisant les angles intérieurs :

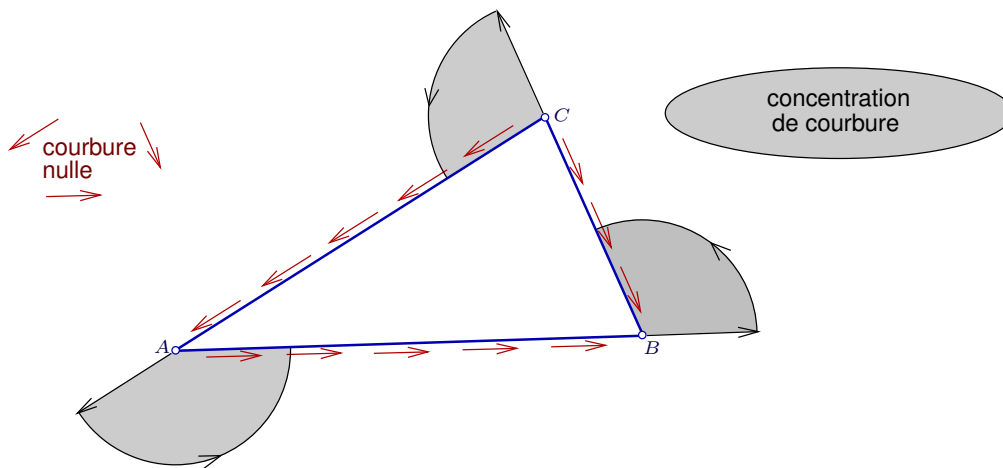
$$\alpha_m := \pi - \beta_m,$$

on en déduit (on retrouve) un théorème classique de géométrie euclidienne : la somme des angles intérieurs à un polygone fermé simple vaut :

$$(M - 2) \pi = \sum_{1 \leq m \leq M} \beta_m.$$

En particulier, lorsque $M = 3$, à savoir pour un triangle, on retrouve la célèbre formule d'Euclide :

$$\pi = \hat{A} + \hat{B} + \hat{C}.$$



Rétrospectivement, à la lumière de la formule générale (9.2) que nous venons d'écrire, il faut comprendre que la courbure est *concentrée* en les trois sommets A, B, C du triangle. Cette observation de compréhension est bien entendu valable aussi pour des polygones simples à un nombre quelconque $M \geq 3$ de côtés.

Cette première présentation préliminaire au théorème de Gauss-Bonnet général est en fait déjà un énoncé de ce théorème. Nous avons au départ une autre sorte de généralisation du théorème d'Euclide.

Nous avons considéré essentiellement un concept de courbure qui correspond immédiatement à la manière dont l'angle θ varie en fonction de l'abscisse curviligne, le long de la courbe parcourue.

Maintenant, regardons comment le concept de courbure va se mettre à l'œuvre.

10. Théorème de Gauss-Bonnet local sur une surface riemannienne S

Qu'en est-il sur une surface S munie d'une connexion métrique quelconque ∇ ? La fonction de courbure k , ou, de manière équivalente, la 2-forme de courbure Ω sur S , va introduire (insérer) un terme nouveau et central dans la formule (9.2).

Comme précédemment, soit $\gamma: [0, L] \rightarrow S$ une courbe différentiable fermée simple à tangente nulle part nulle, paramétrée par longueur d'arc :

$$1 \equiv \left\| \frac{d\gamma}{ds}(s) \right\| \quad (\forall s \in [0, L]).$$

Cette courbe $\gamma = \partial D$ borde un certain domaine $D \subset S$ difféomorphe à un disque. On peut supposer que D se situe à gauche d'un point mobile parcourant γ . Abrégeons ces vecteurs tangents :

$$\tau(s) := \frac{d\gamma}{ds}(s).$$

Soit aussi :

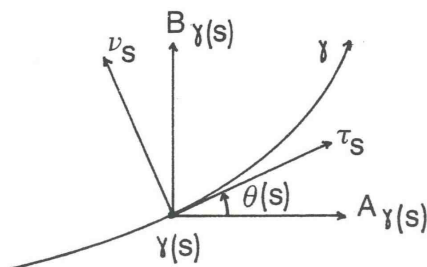
$$\nu(s) := \text{Rotation}_{\frac{\pi}{2}}(\tau(s))$$

le champ de vecteurs unitaire le long de γ rentrant dans le domaine D .

Alors l'invariance de la métrique sous l'action de ∇ assure une relation d'orthogonalité qui implique que $\nabla_{\tau(s)}(\tau)$ est orthogonal à $\tau(s)$, et par conséquent on peut écrire :

$$\nabla_{\tau(s)}(\tau)(s) = k_g(s) \cdot \nu(s),$$

au moyen d'une certaine fonction invariante $s \mapsto k_g(s)$, appelée *courbure géodésique* de γ .



Pour comprendre ce concept d'une manière géométrique et intuitive, il vaut mieux envisager la surface $S \subset \mathbb{R}^3$ comme *extrinsèque*, i.e. plongée dans l'espace euclidien tridimensionnel \mathbb{R}^3 . Donnons-nous un champ de vecteurs unitaires $s \mapsto X(s)$ sur une courbe $\gamma: [0, L] \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ paramétrée par longueur d'arc. Comme tous les $X(s)$ pour $s \in [0, L]$ sont de norme 1, les vecteurs dérivés $\frac{dX}{ds}(s)$ sont orthogonaux aux vecteurs $X(s)$. Si donc $N(s)$ désigne un champ de vecteurs unitaires *orthogonaux* à la surface S aux points $X(s)$ pour une certaine orientation de S , alors les propriétés standard du produit vectoriel $(\bullet) \wedge (\bullet)$

dans l'espace \mathbb{R}^3 assurent qu'il existe des réels $\lambda(s)$ tels que la projection orthogonale sur l'espace tangent $T_{\gamma(s)}S$ de la dérivée dans \mathbb{R}^3 de $X(s)$ s'exprime comme :

$$\frac{DX}{ds}(s) := \text{proj}_{T_{\gamma(s)}S}^{\perp} \left(\frac{dX}{ds}(s) \right) = \lambda(s) N(s) \wedge X(s) \quad (\forall s \in [0, L]).$$

Pour s fixé, le nombre réel $\lambda(s)$ est alors appelé *valeur algébrique de la dérivée covariante de X en s* .

Maintenant, si $X(s) := \frac{d\gamma}{ds}(s)$ est le champ de vecteurs tangents à une courbe $\gamma: [0, L] \rightarrow S$ paramétrée par longueur d'arc comme ci-dessus, alors la valeur algébrique $\lambda(s)$ de la dérivée covariante de $\gamma'(s)$ en $\gamma(s)$ est appelée *courbure géodésique* de la courbe γ en son point $\gamma(s)$. Pour la connexion ∇ naturellement associée à $S \subset \mathbb{R}^3$, on démontre que ces nombres *extrinsèques* :

$$\lambda(s) = \pm k_g(s)$$

sont *égaux* — éventuellement au signe près — aux nombres intrinsèques $k_g(s)$ introduits ci-dessus. D'un point de vue externe à la surface, la valeur de la courbure géodésique $k_g(s)$ est la valeur de la composante tangentielle du vecteur accélération $\gamma''(s)$.

C'est donc ici tout une force de cohérence de la théorie mathématique qui s'exprime dans les coïncidences conceptuelles modulées par des perspectives ontologiques complémentaires.

En procédant comme l'exige le travail mathématique, nous avons ainsi introduit pour une courbe sur une surface l'analogie de la courbure d'une courbe plane. L'ambiguïté sur le signe \pm s'explique simplement par le fait que le concept de courbure géodésique que nous considérons dépend des deux choix possibles pour une orientation de S .

Dans sa généralité, le théorème de Gauss-Bonnet doit faire intervenir la courbure géodésique, comme nous l'avons énoncé au début de ce travail, puisqu'il considère des courbes sur une surface qui ne sont pas des géodésiques.

Maintenant, en revenant à la théorie intrinsèque plus générale et plus puissante, si le domaine $D \subset U$ est de plus contenu dans un ouvert de carte $U \subset S$, dans lequel est donné un champ de repères orthonormés des espaces tangents :

$$T_p S = \mathbb{R}X_p \oplus \mathbb{R}Y_p,$$

de telle sorte qu'il existe une fonction angulaire $s \mapsto \theta(s)$ satisfaisant :

$$\begin{aligned} \tau(s) &= \cos \theta(s) X_{\gamma(s)} + \sin \theta(s) Y_{\gamma(s)}, \\ \nu(s) &= -\sin \theta(s) X_{\gamma(s)} + \cos \theta(s) Y_{\gamma(s)}, \end{aligned}$$

on démontre une

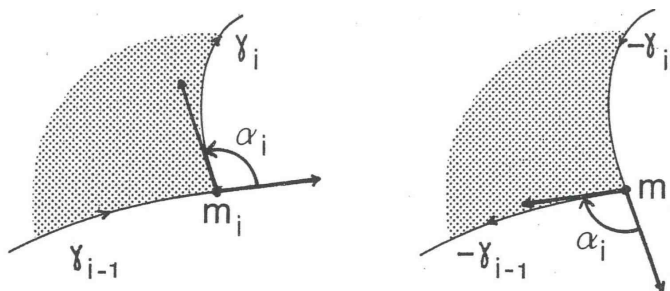
Proposition 10.1. [Cruciale] *Pour tout paramètre $s \in [0, L]$, la courbure géodésique vaut :*

$$k_g(s) = \frac{d\theta}{ds}(s) - \omega \left(\frac{d\gamma}{ds}(s) \right),$$

où $\omega = \omega_{X,Y}$ est la 1-forme différentielle associée à la différentiation covariante ∇ , dans le champ de repères orthonormés $\{X_p, Y_p\}_{p \in U \subset S}$.

Démonstration. Avec toutes les données qui précèdent, un bref calcul suffit à éclairer cette formule :

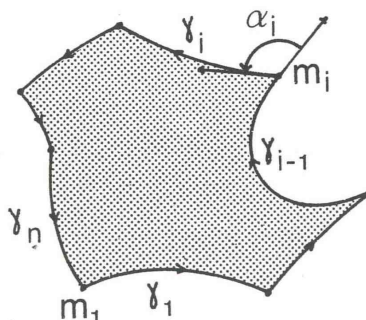
$$\begin{aligned} \nabla_{\tau(s)}(\tau)(s) &= \nabla_{\tau(s)}\left(\cos\theta(s)X_{\gamma(s)} + \sin\theta(s)Y_{\gamma(s)}\right) \\ &= \left(-\sin\theta X_{\gamma} + \cos\theta Y_{\gamma}\right)\frac{d\theta}{ds} + \cos\theta\nabla_{\tau}(X) + \sin\theta\nabla_{\tau}(Y) \\ &= \left[\frac{d\theta}{ds}(s) - \omega(\tau(s))\right]\nu(s). \end{aligned} \quad \square$$



Nous pouvons enfin énoncer, sans entrer dans les détails de la démonstration, le

Théorème 10.2. [de Gauss-Bonnet local] Soit une courbe fermée simple $C = \partial D$ bord orienté lisse par morceaux d'un domaine $D \subset U$ contenu dans un ouvert de carte $U \subset S$ d'une surface riemannienne abstraite S . Alors :

$$2\pi - \iint_D \Omega = \int_{\partial D} k_g(s) ds + \sum_{1 \leq m \leq M} \alpha_m.$$



On doit remarquer que la complication de la définition qui va de pair avec son insertion dans des champs différents du corpus de la géométrie différentielle et de la topologie algébrique, arrache certains éléments de l'appréhension initiale (intuition) de la notion de courbure pour les réinvestir dans de nouveaux éléments de définition. De ce fait notre connaissance de la géométrie et de la topologie de la surface ou de la variété s'accroît. Il reste remarquable que nous parlions encore de « courbure », tout comme nous parlons de l'« espace ».

Si nous considérons ce résultat, plus puissant et synthétique de plusieurs domaines des mathématiques mettant en relation (nous avons insisté sur ces relations définitionnelles), des concepts qui se conçoivent dans chacune des disciplines dont ils sont issus, essentiellement, géométrie, topologie, topologie algébrique, nous pouvons essayer de voir s'il s'agit bien de la même notion de courbure qui est en jeu.

Il faut noter, et c'est non négligeable, que dans le cas de notions du même type issues de la géométrie élémentaire plus intuitive, l'objet initial qu'elles rappellent comme en écho continue d'insister sous cette première forme que d'aucuns pourraient nommer *allusive*. Non pas seulement parce que nous pouvons y revenir en particulierisant la notion généralisée. Mais parce que la forme initiale a acquis une puissance abstraite qu'elle alimente ou qu'elle peut alimenter. C'est là une des manières dont agit l'imaginaire mathématique. Il s'agit de ce que nous avons appelé du *symbolico-intuitif*. Nous pouvons, par exemple, user de représentations perceptives, voir intuitives, pour travailler à un niveau plus élevé d'abstraction, en ne conservant de cette perception que ce qui avec bonheur continue de s'adapter à ce niveau.

Et c'est précisément à travers ces formes de synthèses ainsi fortement diversifiées que nous acquérons une force de propulsion.

Le théorème de Gauss Bonnet présente une géométrie assez simple, et la difficulté de la preuve tient à certains faits topologiques qui lui sont intégrés. C'est donc par cette synthèse même qu'il est relativement difficile et profond. Comme l'exprime Sivak cité en exergue au début de cet article, le théorème de Gauss Bonnet est probablement le théorème le plus profond de la géométrie différentielle. On se souvient de sa première version chez Gauss. L'excès sur π de la somme des angles intérieurs $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ d'un triangle géodésique T est égal à l'intégrale de la courbure gaussienne K_G sur T :

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \pi = \iint_T K_G dA.$$

On peut voir directement sur cette formule simple une extension du théorème de Thalès et d'Euclide dans le cas où $K_G \cong 0$. On obtient le cas de la sphère unité, la somme des angles intérieurs d'un triangle géodésique est supérieur à π , et l'excès sur π est exactement l'aire de T .

Il existe des présentations classiques du théorème de Gauss-Bonnet local qui n'utilisent pas le formalisme de la forme de courbure. Ces présentations insistent sur la topologie de la surface considérée, en usant du théorème des tangentes tournantes : la variation totale de l'angle d'un vecteur tangent à une courbe $\gamma: [0, L] \rightarrow S$ donnée par une fonction continue allant d'un intervalle fermé $[0, L]$ sur une surface différentiable S . Et le théorème de Gauss-Bonnet est énoncé pour une région de S bornée.

Le théorème énoncé ci-dessus est plus abstrait et use du formalisme des formes différentielles. L'intégrale de la mesure de courbure selon Gauss est l'intégrale de la forme de courbure.

La courbure que nous pouvons percevoir dans sa phénoménologie, comme les modalités d'un contour d'une courbe sur une surface a d'abord été conceptualisée comme un excès sur $\pi =$ somme des angles intérieurs d'un triangle euclidien (géodésique). Cette conceptualisation est déjà un saut important, la courbure a été métriquement traduite. Notre appréhension de l'espace a trouvé une modalité de quantification. Notre attention perceptive s'est focalisée sur une première courbe fermée (un triangle) dont nous essayions de capter les formes de parcours en tenant compte des angles, jusqu'à sa fermeture. On peut dire que sous cette analyse la courbure a étendu et réalisé un domaine d'application. Mais du même coup elle a ouvert ou réouvert la réflexion topologique dont elle est porteuse. Dans un mouvement théorique qui semble aller à rebours de l'appréhension kantienne, la courbure s'est intégrée à notre appréhension de l'espace, dont elle se fait une condition.

Avec le concept de forme de courbure, nous sommes passés à un stade supérieur d'abstraction. On dispose d'une 2-forme qui détermine entièrement la courbure K_G . Elle est construite à partir d'une 1-forme associée à deux champs de vecteurs. La différentielle extérieure $d(\bullet)$ de cette 1-forme nous donne la forme de courbure

La 2-forme de courbure a été présentée dans la Section 8. Elle nous fait bénéficier des propriétés des 2-formes différentielles renvoyant à la théorie des formes différentielles. Et elle est directement reliée à l'holonomie restreinte que nous avons présentée. Dans chacune de ces déterminations, c'est une façon de concevoir un aspect de la courbure qui trouve une explication. Et c'est aussi une nouvelle appréhension des anciennes formes d'appréhension du concept de courbure : extrême continuité, extrême nouveauté, dans ces synthèses expansives.

La construction conceptuelle fondée sur une 2-forme permet de conserver l'organisation des champs de vecteurs à laquelle renvoie la 1-forme toujours mobilisable dans notre compréhension. Et cette référence aux champs nous permet de suivre une forme conceptuelle qui compose la courbure. Une nouvelle phénoménologie transcendantale peut être développée. En ce sens la compréhension primitive (intuitive) de la courbure a été absorbée et continue d'agir.

Nous avons également montré que la question des fondements de la géométrie (euclidienne) était entièrement transformée dans ces nouveaux cadres théoriques. La géométrie est fondée par le moyen de ses extensions synthétiques, qui en sont autant d'accroissements de connaissances.²⁷

RÉFÉRENCES

1. BERGER, M.; GOSTIAUX, B. : *Géométrie différentielle : variétés, courbes et surfaces*. Deuxième édition. Mathématiques. Presses Universitaires de France, Paris, 1992, vi+513 pp.
2. CARTAN, H. : *Formes différentielles. Applications élémentaires au calcul des variations et à la théorie des courbes et des surfaces*. Hermann, Paris 1967, 186 pp.
3. CAVAILLÈS, J. : *Méthode axiomatique et formalisme. Sur la logique et la théorie de la science*. In : *Œuvres complètes de philosophie des sciences*, Paris, Hermann, 1994, vii+686 pp.
4. CAVEING, M. : *Le problème des objets dans la pensée mathématique*. Problèmes et Controverses. Librairie Philosophique J. Vrin, Paris, 2004.
5. CHERN, M. : *Curves and surfaces in Euclidean space*. 1967 Studies in Global Geometry and Analysis, pp. 16–56. Math. Assoc. Amer. (distributed by Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.).
6. DO CARMO, M.P. : *Differential geometry of curves & surfaces*. Revised & updated second edition. Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2016, xvi+510 pp.
7. DOMBROWSKI, P. : *150 years after Gauss' "Disquisitiones generales circa superficies curvas". With the original text of Gauss*. Astérisque, 62. Société Mathématique de France, Paris, 1979, iv+153 pp.
8. EUCLIDE D'ALEXANDRIE : *Les éléments*. Vols. I, II, III, IV. Traduits du texte de I.L. Heibert par B. Vitrac, Bibliothèque d'Histoire des Sciences. Presses Universitaires de France, Paris, 1998, viii+433 pp.
9. GREENBERG, M.J. : *Euclidean and non-Euclidean geometries. Development and history*. Third edition. W. H. Freeman and Company, New York, 1993, xviii+483 pp.
10. HILBERT, D.; COHN-VOSSEN, S. : *Geometry and the imagination*. Translated by P. Neményi. Chelsea Publishing Company, New York, N. Y., 1952, ix+357 pp.

27. Une seconde partie de ce texte, consacrée aux aspects topologiques et réellement globaux du théorème de Gauss-Bonnet, paraîtra ultérieurement.

11. KANT, E. : *Critique de la raison pure*. Trad. A. Tremeseygues & B. Pacaut B. Presses Universitaires de France, Paris, 1944. Trad. J. Barni, revue par P. Archambault, Flammarion, Paris, 1987.
12. KANT, E. : *Critique de la faculté de juger*. Trad. A. Philonko, Vrin, Paris, 1968. Trad. A. Renault, Aubier, Paris, 1995.
13. LEHMANN, D.; SACRÉ, C. : *Géométrie et topologie des surfaces*, Presses Universitaires de France, Paris, 1982, 349 pp.
14. SPIVAK, M. : *A comprehensive introduction to differential geometry*, Vol. I. Second edition. Publish or Perish, Inc., Wilmington, Del., 1979, xiv+668 pp.
15. SPIVAK, M. : *A comprehensive introduction to differential geometry*, Vol. II. Second edition. Publish or Perish, Inc., Wilmington, Del., 1979, xv+423 pp.
16. SPIVAK, M. : *A comprehensive introduction to differential geometry*, Vol. III. Second edition. Publish or Perish, Inc., Wilmington, Del., 1979, xii+466 pp.
17. SPIVAK, M. : *A Comprehensive introduction to differential geometry*, vol. V. Second edition. Publish or Perish, Inc., Wilmington, Del., 1979, viii+661 pp.