



**HAL**  
open science

## Enseigner le choix social en L1. Quels enjeux ?

Nicolas Saby

► **To cite this version:**

| Nicolas Saby. Enseigner le choix social en L1. Quels enjeux ?. 2019. hal-01971396

**HAL Id: hal-01971396**

**<https://hal.science/hal-01971396>**

Preprint submitted on 7 Jan 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# ENSEIGNER LE CHOIX SOCIAL EN L1. QUELS ENJEUX ?

Nicolas **SABY**

IMAG, Université de Montpellier

nicolas.saby@umontpellier.fr

## Résumé

Cette communication propose, après un rappel historique sur la mathématique sociale, de présenter les questions posées par les problèmes de choix collectif, de décision et de vote. Une modélisation mathématique montre, dans une deuxième partie, quelles mathématiques peuvent être enseignées dans une première année de licence.

Ce sera l'occasion de questionner des éléments de savoirs mathématiques délaissés dans l'enseignement à la fois scolaire et universitaire.

Enfin, il s'agira de montrer l'importance du rôle social des mathématiques dans l'enseignement, son besoin d'élémentarisation ainsi que l'intérêt de repenser un enseignement de mathématiques « mixtes » afin de travailler la force de la pensée mathématisante dans l'étude du réel.

## Mots clés

Choix social, décision, vote, modélisation, relations binaires, relations d'ordre, pensée critique

## INTRODUCTION

La question du social ne fait pas communément partie des préoccupations premières des mathématiques ou des mathématiciens, bien que l'on retrouve régulièrement l'argument que l'apprentissage des mathématiques participe à la construction de l'esprit, notamment critique. Pourtant, dès 1793, le marquis de Condorcet dans son Tableau général de la science lance un programme ambitieux autour de ce qu'il nomme la « Mathématique sociale ». Au milieu du XX<sup>e</sup> siècle, ce projet a connu un regain d'intérêt, notamment dans les travaux des économistes ou de mathématiciens comme Georges Théodule Guilbaud, sous l'influence du développement des sciences sociales. Cependant, pour reprendre une expression chère à Condorcet, pour montrer que les mathématiques peuvent s'occuper du social, encore faut-il que son enseignement soit possible et qu'il soit rendu élémentaire.

Le point de vue adopté dans ce texte sur cette mathématique sociale est de la considérer comme une mathématique *mixte* au sens qu'on lui donnait au XVIII<sup>e</sup> siècle comme on le trouve dans le tome 2 de l'Encyclopédie méthodique (D'Alembert & Diderot, 1751) : « elle a pour objet les propriétés de la grandeur concrète, en tant qu'elle est mesurable ou calculable ; nous disons de la grandeur concrète, c'est-à-dire de la grandeur envisagée dans certains corps ou sujets particuliers ». Il ne s'agit pas de mathématiques pures, ni de mathématiques appliquées (Chevallard, 2001). Cette ancienne appellation de *mixte* est plus pertinente, notamment lorsqu'on s'attache à montrer l'importance de la modélisation dans cette activité où l'acte d'abstraire s'inscrit dans cette problématisation. La pensée mathématisante est ici un levier important de compréhension des problèmes et participe à cette entreprise de

construction d'un esprit scientifique, au-delà des questions répertoriées plus ou moins arbitrairement comme sciences (scientifiques).

## LA MATHÉMATIQUE SOCIALE, DE QUOI S'AGIT-IL ?

Le concept naît au cours du XVIII<sup>e</sup> siècle dans l'effervescence philosophique et politique du projet des Lumières. Son développement sera lent à se mettre en place, probablement par la difficulté de l'entreprise aussi bien dans son aspect social que mathématique. Nous préférons utiliser le terme de « mathématiques mixtes » pour ce concept plutôt que celui de « mathématiques appliquées » à des fins à la fois didactique et notamment pour faire la distinction avec les « mathématiques appliquées » qui concernent finalement un autre manière de faire des mathématiques. La mathématique mixte renvoie, comme le souligne Bkouche (2006), à la part d'empirisme liée à la connaissance en jeu, ici la question sociale. Cet empirisme sera présent dans les modèles développés et l'acte d'abstraire associé à l'activité mathématique prendra tout son sens. En 1793, Condorcet, dans son tableau qui a pour objet l'application du calcul aux sciences politiques et morales, propose un programme ambitieux qu'il nomme la « mathématique sociale » : « Les vérités des Sciences morales et politiques, sont susceptibles de la même certitude que celles qui forment le système des Sciences physiques, et même que les branches de ces Sciences qui, comme l'Astronomie, paraissent approcher de la certitude mathématique (...) J'ai cru que le nom de mathématique sociale était celui qui convenait le mieux à cette science. Je préfère le mot mathématique, quoiqu'actuellement hors d'usage au singulier (...) parce qu'il s'agit d'applications dans lesquelles toutes les méthodes peuvent être employées. (...) Je préfère le mot sociale à ceux morale ou politique, parce que le sens de ces derniers mots est moins étendu et moins précis » (Condorcet, 1793 et Feldman, 2005).

Ce programme de *mathématique sociale* ne peut donc pas être détaché de l'objet d'étude qui est « l'homme » dans la société. Ainsi, les attendus de cette mathématique mixte sont liés aux développements philosophiques autour des projets de société, de démocratie, de justice, d'état, de constitution, de liberté, ...

Nous revenons dans la suite, trop rapidement, sur cette *Révolution scientifique*.

### Au siècle des Lumières

Dans cette période féconde, on ne peut ignorer le travail fondateur de Rousseau (1762) dans le « Contrat social ». Deux grandes méthodes de choix, possibles pour les peuples et qui prendront plus tard le nom de choix social, sont développées dans ce texte qui sont d'une part l'unanimité et d'autre part la règle majoritaire. Dans ce texte où Rousseau développe la question de la « volonté générale » et de la « souveraineté » des peuples, l'unanimité reste un idéal à atteindre pour les *questions graves*. Elle semble s'imposer pour ce qui concerne les règles constitutionnelles comme l'adoption d'une règle de choix comme la règle majoritaire. La règle majoritaire fera elle-même l'objet de débats, que nous jugeons utiles à travailler dans le cadre scolaire, dont un point d'orgue sera atteint avec le *Théorème du jury* de Condorcet. Condorcet, par son approche de mathématicien, montre dans son théorème, application intelligente de la loi des grands nombres, que la règle majoritaire permet d'atteindre une « vérité » lorsque les électeurs sont suffisamment éclairés. Cependant, si la règle majoritaire est pertinente dans le cas de deux candidats, son extension à plus de trois candidats par la règle de la pluralité des voix — ou majorité relative — fera l'objet d'un texte fondateur de

Borda en 1781 à propos de l'élection des membres de l'académie royale des sciences. Dans ce texte, Borda commence « ...je vais faire voir que cette opinion, qui est vraie dans le cas où l'élection se fait entre deux sujets seulement, peut induire en erreur dans tous les autres cas » (Borda, 1781, p.657). Son approche de mathématicien, comme celle de Condorcet, lui permet de montrer la difficulté du choix dans le cas de plusieurs candidats et il propose de le résoudre par un système de vote pondéré sur les classements des électeurs. Ce texte lui vaudra une polémique avec Condorcet qui montrera dans sa publication majeure sur le sujet « *Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix* » l'apparition d'un problème sérieux lorsque le nombre de candidats dépasse trois et qui est désormais connu sous le nom de *Paradoxe de Condorcet* que nous définissons plus loin. Dans cette même période, émerge sous l'influence de Bentham (1789), les choix fondés sur des méthodes de calcul du « *bonheur* », qu'il nomme « *méthode utilitariste* ». Cette approche est fondée sur un calcul d'utilité collective et cherche à trouver un optimum social en réponse à la question de la volonté générale de Rousseau. Par ailleurs, Bentham théorise dans cette approche, une autre question essentielle pour cette période qui est celle de la « *Liberté individuelle* ».

Les questions sociales ont ainsi donné dans cette période de grands développements de nombreuses approches et le début d'une articulation dans ces questions, entre la philosophie et les mathématiques. Malgré quelques exemples fameux comme les travaux de Jules Dupuit ou d'Augustin Cournot (1838) qui préfigurent la renaissance de ces problèmes dans le cadre des théories économiques et bien que la voie ait été montrée par Condorcet, le développement de théories mathématiques adéquates ne se fera pratiquement pas dans le courant du XIX<sup>e</sup> siècle.

### **Une renaissance tardive**

Cette renaissance débute à la fin des années quarante et au début des années cinquante, dans l'immédiat après-guerre. Des outils mathématiques d'une grande diversité, comme les probabilités, la théorie des graphes ou la théorie des jeux naissante ont permis ce développement avec des résultats d'une très grande portée et généralité. Ces résultats permettront d'affirmer le rôle d'une approche mathématique de certains problèmes sociaux en réinterrogeant les approches philosophiques, économiques, sociales de la société. Dans le champ économique, les travaux fondateurs de May (1952), d'Arrow (1951), initiés dans un cadre économique libéral, auront une portée généralisatrice permettant de dépasser ce cadre. Dans le champ des sciences sociales, l'exemple des collaborations entre Lévi-Strauss (1956) et Guilbaud montrera la force de ces modélisations. Cependant, comme le souligne Guilbaud (2002) dans son entretien sur la mathématique et le social, sa pénétration dans le champ des mathématiques à enseigner ne se fera pas.

Depuis la fin du XX<sup>e</sup> siècle, la mathématique sociale de Condorcet s'est singulièrement développée, honorée par de nombreux prix de l'académie de Suède pour l'économie. Son développement s'est aussi rapproché de l'informatique par ses aspects algorithmiques, multi-agents et de décision dans l'incertain. Force est de constater que son application la plus importante dans le cadre des élections n'a pas encore atteint la sphère publique, puisque les paradoxes les plus anciens, identifiés d'un point de vue mathématique depuis le XVIII<sup>e</sup> siècle, restent encore ignorés. L'exemple le plus éclatant en France est la prédominance d'un scrutin à deux tours à la pluralité pour la plupart des élections politiques. Les problèmes rencontrés lors des scrutins présidentiels, notamment depuis avril 2002 n'ont pas eu pour conséquence de mettre en cause le mode de scrutin. En effet, on préfère chercher une réponse du côté politique à un problème structurel, comme le système de vote qui influence directement le jeu politique.

## Une expérience de vote

Afin d'illustrer combien un mode de scrutin peut influencer l'issue d'une élection, nous empruntons à Michel Balinski (2004) un tableau de *vote* qui sert de base à une activité pratiquée en amphithéâtre au début du semestre. L'objectif de cette activité est de faire prendre conscience de la diversité des modes de scrutins pratiqués usuellement et de montrer leur influence sur l'issue du scrutin. La question posée est : « Lors d'une élection, les électeurs font les classements suivants des candidats A, B, C, D, E. Lequel choisirez vous et pourquoi ? » Un temps de réflexion de 5 minutes leur est laissé, pour faire ce choix avant le recueil des réponses. La stabilité des retours sur plusieurs années est assez remarquable et montre que pratiquement aucun étudiant ne choisit le candidat D, peu choisissent le candidat E, environ 10 % choisissent le candidat A, environ un tiers des étudiants choisissent le candidat B et presque la moitié le candidat C.

Nombre des électeurs	33	16	3	8	18	22
Ordre des préférences	A	B	C	C	D	E
	B	D	D	E	E	C
	C	C	B	B	C	B
	D	E	A	D	B	D
	E	A	E	A	A	A

Lorsqu'il s'agit de donner les raisons de ces choix, il est assez difficile d'obtenir des justifications argumentées permettant d'aboutir sur une méthode de choix explicite ou algorithmique pour certains de ces choix.

- Le plus simple est bien évidemment le candidat A qui est le vainqueur d'un scrutin à la pluralité — c'est le candidat qui obtient le plus de premiers choix.
- Le candidat D est très peu choisi. La procédure qui le désigne est le vote préférentiel — ou vote simple transférable — qui élimine à chaque tour le candidat qui obtient le moins de premier choix. Cette méthode est utilisée depuis un siècle en Australie, ainsi qu'en Irlande. Il serait intéressant d'avoir une étude comparative dans les différents pays pour indiquer si les biais culturels sur la pratique du vote ont une influence sur les résultats de cette expérience.
- Le candidat E est peu choisi, bien que le gagnant du scrutin à deux tours — largement pratiqué dans les élections françaises.
- Le candidat B est vainqueur d'un scrutin pondéré — où l'on attribue des points suivant la place obtenue : 4 pour une première, 3 pour une deuxième, ... Ce scrutin est dénommé vote de Borda en référence à Borda qui l'avait proposé pour l'élection à l'académie royale des sciences.
- Le candidat C est le « *vainqueur de Condorcet* », c'est-à-dire un candidat qui gagne tous ses duels. Il est assez rare que les participants à cette activité remarquent qu'il a cette propriété.

Cette expérience permet de montrer que chacun des candidats peut être désigné suivant un mode de scrutin raisonnable et utilisé pour certaines décisions. Elle permet de motiver la perspective d'une analyse rationnelle des modes de scrutins. Bien sûr, cette expérience ne prend pas en compte que les électeurs révèlent différemment leurs préférences suivant le mode de scrutin qui leur est proposé. Cette prise en compte dépasse le cadre possible de cet enseignement et relève d'un enseignement de théorie des jeux mettant en œuvre des mathématiques avancées.

## Le paradoxe de Condorcet

Il a été identifié très tôt que la règle de la pluralité présentait de nombreux défauts dont celui présenté par Borda, puisqu'elle permet de désigner un candidat qui perd en duel contre tous les autres. On appelle ici « *duel* », une confrontation entre deux candidats à la règle de la pluralité. Condorcet (1785) propose une nouvelle situation paradoxale, le choix de la règle de la pluralité pour les duels ne permet pas toujours de classer ! Elle peut conduire à ce qu'il nomme un système contradictoire.

En reprenant dans un tableau l'exemple de Condorcet (Condorcet, 1785, p.61) :

60 votants	23	17	2	10	8
Ordre des préférences	A	B	B	C	C
	B	C	A	A	B
	C	A	C	B	A

Dans cet exemple, Condorcet montre que l'on a les trois propositions suivantes :

- A vaut mieux que B, pour 33 voix contre 27
- B vaut mieux que C, pour 42 voix contre 18
- C vaut mieux que A, pour 35 voix contre 25

que l'on peut résumer dans la relation suivante :  $A > B > C > A$  qui montre l'intransitivité de la relation obtenue ! Les comparaisons deux à deux ne suffisent pas à classer malgré la sémantique portée par l'expression « vaut mieux ». On reviendra plus loin sur ce problème d'intransitivité.

## UNE HISTOIRE DE MODÈLES

L'exemple introductif de Condorcet deviendra progressivement le cœur du problème du choix collectif et contribue à montrer la difficulté à trouver un cadre raisonnable pour poser cette question du choix collectif. Le choix d'enseignement que nous faisons dans cette expérimentation consiste alors à pouvoir proposer un modèle permettant de penser cette question du choix, nommée dans cette littérature « problème de l'agrégation des préférences ». Dans un langage mathématique, porté par le langage ensembliste, il s'agit de trouver une fonctionnelle ayant pour source l'espace des données demandées aux électeurs et pour but l'espace des classements des candidats. L'acte de modélisation permettant de savoir si notre problème a ou non des solutions se concrétise par les propriétés que l'on va imposer à cette fonctionnelle en rapport avec les contraintes démocratique du choix collectif.

La définition des espaces de données et de résultats (source et but) est déjà un objectif intéressant pour les étudiants de L1 et présente une vraie difficulté pour eux. En effet, pour ce qui concerne le résultat, puisqu'il s'agit de classer les candidats, la notion de **classement** doit être éclaircie. Notamment se pose le problème des ex-aequo potentiels, de l'ordre strict, de la relation totale, ... Pour ce qui concerne les données, cela va dépendre de l'information demandée aux électeurs.

Le premier modèle proposé aux étudiants, qui est aussi le cadre historique de ce champ disciplinaire, on va demander aux électeurs le même type d'information que celui attendu

pour le collectif, à savoir un classement individuel des candidats par les électeurs. La donnée est ainsi un  $n$ -uplet de classements. La fonctionnelle modélisant le choix collectif est une fonction qui prend en données des  $n$ -uplets de classements et donne comme résultat, un classement des candidats.

Les contraintes que l'on va imposer sur le modèle vont devoir être traduites comme des propriétés demandées à cette fonction de choix.

Le deuxième modèle proposé aux étudiants, demande une information plus riche aux électeurs. Les électeurs ne doivent plus classer, mais noter les candidats. Les notes peuvent être cardinales (une échelle numérique de -5 à 5 ou de 0 à 20) ou bien ordinales (des valeurs ordonnées : médiocre, passable, assez-bien, bien, très bien, par exemple). Le résultat restera un classement des candidats. La donnée est maintenant un  $n$ -uplet de notes, éventuellement numériques ou cardinales et le résultat est toujours un classement.

De la même manière, les contraintes imposées au modèle seront traduites comme des propriétés attendues de cette fonction de choix.

Cette approche de modélisation permet de travailler ce rôle mixte de cette mathématique, d'une part par l'intuition portée par le réel et d'autre part par cette abstraction que l'on devra faire sur les fonctions que l'on va produire. Cela permet d'exploiter la portée généralisatrice des mathématiques, les théorèmes qui seront prouvés dépasseront largement le cadre initial du modèle et montreront la difficulté à trouver une solution au problème posé : trouver une fonction vérifiant certaines propriétés. On peut retrouver dans cette approche, une des difficultés de l'algèbre linéaire ou de la résolution des équations différentielles, par ses aspects formalisateur, généralisateur, unificateur et simplificateur. La faiblesse des concepts de calculs en jeu, permet de concentrer la difficulté sur les raisonnements en jeu. La formalisation du problème aide à faire entrer les différents modes de scrutin ou de choix dans un cadre théorique unique qui exemplifie la puissance généralisatrice du concept en permettant de définir pour une fonction quelconque de choix collectif les propriétés que l'on souhaite qu'elle vérifie.

## DES CONNAISSANCES PEU OU PLUS ENSEIGNÉES EN L1

Cette modélisation du choix collectif introduit explicitement la question des classements et pose le problème des comparaisons deux à deux d'objets (ici des candidats) que l'on travaille par le biais des relations binaires. Ces relations binaires, peu travaillées pour elles-mêmes dans les cursus de mathématiques, sauf dans des enseignements d'informatique, peu en lien avec les enseignements de mathématiques, sont pourtant un cadre conceptuel important de beaucoup de situations des mathématiques, pour lesquelles le langage ensembliste est d'un grand secours.

Ainsi, les relations binaires sont travaillées sous différentes formes, comme graphe dans le produit cartésien, comme diagramme sagittal, comme matrice.

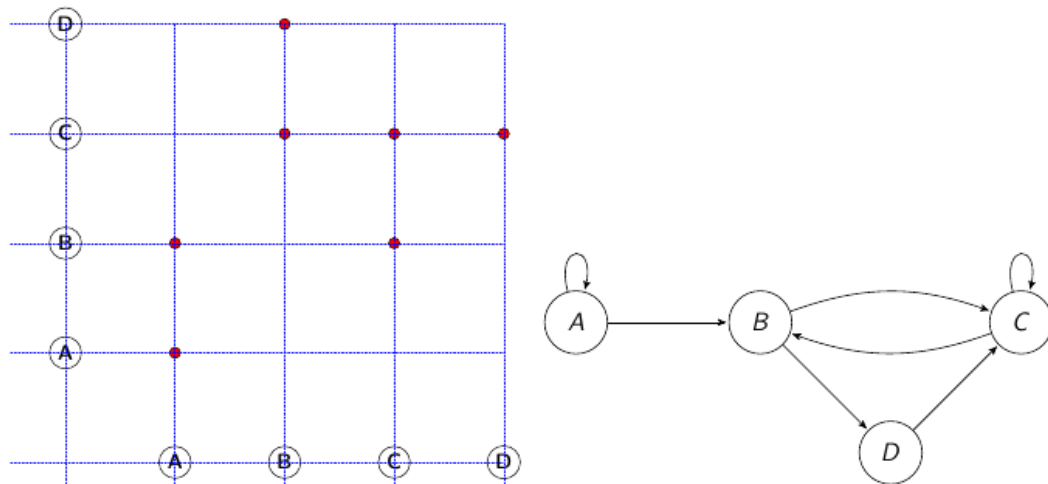
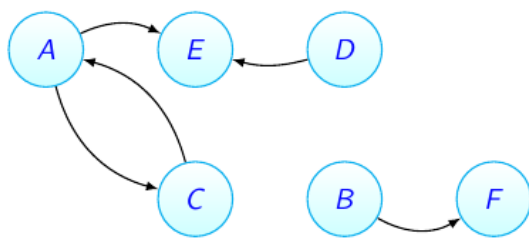


Illustration 1: Représentation sous forme de graphe dans un produit cartésien et sous forme de diagramme sagittal



$\mathcal{R}$	A	B	C	D	E	F
A	0	0	1	0	1	0
B	0	0	0	0	0	1
C	1	0	0	0	0	0
D	0	0	0	0	1	0
E	0	0	0	0	0	0
F	0	0	0	0	0	0

Illustration 2: Représentation sous forme de diagramme sagittal et matricielle

Les relations fonctionnelles gagnent aussi à être présentées dans le cadre des relations binaires, comme cas particulier important.

Enfin, les relations binaires en jeu dans cet enseignement sont essentiellement les pré-ordres (réflexifs et transitifs) et un travail spécifique peut être mené sur les propriétés des relations binaires qui sont nécessaires pour parler des classements. Nous avons déjà évoqué précédemment que les relations binaires sont le cadre utile pour parler des comparaisons deux à deux.

Le paradoxe de Condorcet met en évidence que la propriété de transitivité est indispensable pour *classer*. Il en résulte que l'accent est porté sur cette propriété de transitivité et dans un degré moindre sur celle d'antisymétrie qui va distinguer les ordres des pré-ordres.

D'autant plus que la propriété la plus naturelle pour le classement strict qui émerge est celle de l'asymétrie — si  $x$  est en relation avec  $y$ , alors  $y$  n'est pas en relation avec  $x$  — propriété en général absente des définitions données dans l'enseignement et essentiellement plus simple que la propriété d'antisymétrie — si  $x$  est en relation avec  $y$  et  $y$  en relation avec  $x$ , alors  $x$  est égal à  $y$ . La propriété d'asymétrie trouve une autre justification dans cette approche des classements par les pré-ordres — c'est-à-dire des classements qui permettent la présence d'ex-æquo — car on va distinguer dans ces relations binaires, la composante symétrique — celle qui permet de d'identifier les ex-æquo — de la composante asymétrique qui permet de classer strictement après identification des ex-æquo. Dans le cadre numérique, l'usage de la propriété



d'antisymétrie est essentiel pour montrer des égalités. On sait que cette propriété est d'une appropriation difficile pour les élèves et les étudiants, ce qui peut expliquer notamment les difficultés rencontrées par les élèves du secondaire concernant la notion d'égalité. Dans ce cadre, elle est d'une utilité moindre.

Bien entendu, la quantification universelle de ces propriétés doit aussi être explicitée. Comme pour beaucoup des propositions en jeu dans ces modèles, les quantifications sont majoritairement universelles et mélangent rarement une universelle avec une existentielle. Cette remarque mériterait une étude plus approfondie pour en vérifier la validité et l'effet sur le travail des étudiants. En guise d'exemple, pour illustrer cela, une distinction est faite entre les propriétés suivantes :

- la dictature : il existe un électeur qui impose son choix aux autres électeurs quelles que soient leurs préférences ;
- l'imposition du choix pour des raisons morales ou religieuses : le résultat de la fonction de choix ne dépend pas des préférences des électeurs. La fonction est constante ;
- il existe un électeur qui a fait le même choix que le collectif.

Chacune de ces propositions a une formulation assez ressemblante, mais une quantification différente.

Cette modélisation du choix collectif permet aussi de définir et de travailler sur des fonctions qui ne sont pas définies par des formules. Une grande difficulté du modèle vient du fait que ces fonctions dépendent de plusieurs variables, puisque l'espace de définition est un produit cartésien. Cette difficulté est amoindrie par le fait que les données sont discrètes et permet dans la progression d'apprentissage de proposer des preuves par exhaustion lorsque ces données sont petites. Lorsque la taille des données augmentent, il faut alors trouver d'autres stratégies de preuves.

## QUELQUES EXEMPLES DE RÉSULTATS

Dans les deux cadres de modélisation décrits dans la section précédente, quelques grandes familles de résultats sont présentés. Dans le premier modèle, ce sont surtout des résultats d'impossibilité ou d'existence et d'unicité qui dominent et qui font l'objet d'un travail soit en cours soit en TD.

Chacun de ces modèles demande une explicitation des notions de liberté, anonymat, neutralité, indépendance, ... Il est intéressant de noter que ces notions sont héritées des théories philosophiques des Lumières. C'est aussi l'intérêt de cette mathématique mixte qui permet de discuter de la pertinence d'un modèle porté par cette part d'empirisme liée au réel. Ici, on peut montrer que les résultats démontrés dans le modèle vont permettre de dépasser cette part d'empirisme et de montrer toute la pertinence d'une approche mathématique de ces problèmes. Ainsi, la question de la « Liberté » du modèle née essentiellement de la pensée libérale de Bentham sur la « Liberté individuelle » qui dans ces modèles du choix collectif va se traduire par la condition que les électeurs peuvent avoir les préférences qu'ils veulent sur les candidats. On peut penser à cette définition comme le domaine de définition de la fonction de choix. Une restriction sur cette condition demandera à expliciter ce que cela signifie en termes de *Liberté*.

Les notions d'*anonymat* et de *neutralité* travaillent, elles, l'invariance par permutation de la fonction de choix collectif. En effet, l'*anonymat*, propriété qui impose que l'identité d'un

électeur n'a pas d'impact sur la prise en compte de son vote, se traduit dans le modèle par : l'application d'une permutation sur les électeurs, c'est-à-dire sur le  $n$ -uplet de données de la fonction de choix, ne change pas le résultat de la fonction. Celle de *neutralité* exprime que la fonction de choix doit traiter de manière équivalente chacun des candidats, ce qui se traduit aussi par une invariance par permutation des candidats : si on permute les candidats dans les données des électeurs, le choix collectif sera permuté de la même manière.

Le premier résultat significatif de cet enseignement est le *Théorème de May (1952)* qui est un théorème d'existence et d'unicité. Il énonce que lorsqu'il n'y a que deux candidats, il n'existe qu'une seule fonction de choix collectif qui prend en données des  $n$ -uplets de classements individuels, vérifiant les conditions de *Liberté individuelle*, *anonymat*, *neutralité* et *réponse positive*. Cette dernière condition — réponse positive — signifie que si un candidat est désigné vainqueur par la fonction de choix et que pour un autre jeu de données, un plus grand nombre d'électeurs l'ont placé en tête, alors il sera encore désigné vainqueur. La seule solution à ce problème est la **règle majoritaire**. Cela permet de justifier ce que personne n'ose contester, à savoir que si un candidat A préféré à un candidat B par 11 électeurs sur 20 est désigné vainqueur, alors si 12 électeurs sur ces mêmes 20 électeurs se mettent à le préférer à B, on continuera à choisir collectivement A. Ce résultat est un élément théorique justifiant la grande importance de la règle majoritaire dans un certain nombre de procédures de vote et il est aussi un oiseau de mauvais augure : si dans le cas de seulement deux candidats, il n'y a qu'une seule fonction solution du problème avec des conditions raisonnables, on conçoit que cela va être difficile lorsqu'il y aura plus de trois candidats !

La condition d'*indépendance des états non pertinents* est une condition utile permettant de montrer les difficultés liées aux modes de scrutin. Cette condition, héritée des paradoxes de Condorcet et de Borda demande à ce que le classement relatif entre deux candidats ne doit dépendre que du duel entre ces deux candidats.

Un autre résultat important de ce modèle est le théorème de Hansson qui, sous les mêmes hypothèses que celui de May, pour plus de trois candidats et avec la condition d'*indépendance des états non pertinents*, affirme qu'il n'existe qu'une seule fonction de choix collectif, c'est l'indifférence collective : tous les candidats sont classés *ex-æquo* par la fonction de choix !

Ce résultat préfigure le théorème le plus connu de ce champ : le théorème d'Arrow qui énonce que lorsqu'il y a plus de trois candidats, il n'existe aucune fonction de choix collectif vérifiant les conditions de *Liberté individuelle*, *anonymat*, *unanimité* et *indépendance des états non pertinents*. En d'autres termes, ce théorème annonce que l'on ne pourra pas réparer les paradoxes de Condorcet et de Borda.

## LE RÔLE SOCIAL DES MATHÉMATIQUES

La perspective de Condorcet sur l'éducation visait à ancrer l'idéal démocratique dans une augmentation des Lumières. Le théorème du jury (Condorcet, 1785) en était une forme de justification. Mais comme l'énonce Condorcet dans ses cinq mémoires sur l'instruction, cette augmentation des Lumières nécessite une élémentarisation du savoir. Il ne s'agit pas que l'ensemble de la population devienne aussi éclairée que les savants, mais que la distance la séparant du savant se réduise. Cette question d'*élémentarisation*, n'étant pas univoque, est prise ici dans son sens de *simplicité*, en ce qu'elle permet de désigner ce qui est essentiel, irréductible dans la compréhension d'une totalité complexe et difficile. Cela a ainsi justifié l'apprentissage de la lecture, de l'écriture et des mathématiques pour tous. Les mathématiques étant par nature une façon de communiquer sur le monde, ce rôle social demeure. Si son usage

dans les sciences a été d'une redoutable efficacité, il ne faudrait pas négliger son importance pour éclairer le citoyen. Ce que nous défendons dans cet article est que son rôle dépasse le champ strict des sciences physiques. Il s'applique aussi dans le champ social donnant une autre dimension à cette perspective sociale de l'enseignement des mathématiques pour tous. L'exemple de la compréhension des modes de scrutin en est un pour lequel Charles Ludwig Dodgson, alias Lewis Carroll avait déjà formulé à la fin du XIX<sup>e</sup> siècle : « *Les élections devant refléter de préférence le vœu de la majorité et non celui des plus habiles au jeu électoral, il me paraît souhaitable que tous maîtrisent les règles de ce jeu* » (Dodgson, 1876, pp.232-233). Cette citation peut être mise en regard de la formule de Dominique Reynié : « *La question de savoir comment extraire un résultat conforme « au véritable vœu de la pluralité » fera l'objet de débats abondants, atteignant un niveau de formalisation finalement accessible aux seuls mathématiciens* » (Reynié, 2001). On perçoit dans ces deux citations la différence d'objectifs sur les Lumières et sur le rôle des mathématiques. Si la formalisation devient finalement accessible aux seuls mathématiciens, cela devient un aveu d'échec de l'élémentarisation du savoir ou une absence d'élémentarisation.

Les mathématiques sont un outil du discours pour décrire le monde réel. Si elles doivent participer à la construction de l'esprit critique et à la pensée autonome, cet enseignement montre le potentiel de son application explicite dans le champ social.

## CONCLUSION

La philosophie a depuis longtemps interrogé la question de la démocratie et de la république. Il faut entendre que ces rapports sont liés à la question de la rationalité. L'usage des mathématiques dans ce qu'elles permettent d'explicitation de cette rationalité est un levier important des apprentissages et de questionnement de la citoyenneté. Elles participent ainsi aux capacités de débat, d'argumentation et de jugement qui sont les fondements des questions de liberté, d'égalité et de justice dans une démocratie. Ces capacités sont au cœur de la philosophie de Condorcet dans son projet d'instruction rendant possible la démocratie en libérant l'individu d'un esclavagisme potentiel.

Cet enseignement défend l'idée que la décision collective est d'une importance telle dans la vie démocratique d'un pays qu'on ne doit pas ignorer qu'elle nécessite un véritable travail de modélisation. L'enseignement des mathématiques utiles pour cette modélisation permet d'ouvrir des perspectives de compréhension de l'usage des votes. L'élémentarisation de ce savoir est possible et permet de travailler ou retravailler des mathématiques peu ou plus enseignées.

## RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- ARROW K.J. (1951) Social choice and individual values, volume 12. USA : Yale university press, 2012.
- BALINSKI M. (2004) Le suffrage universel inachevé. Paris : Belin.
- BENTHAM J. (1789) Introduction aux principes de la morale et de la législation. Paris : Vrin, 2011.
- BKOCHE R. (2006) La géométrie entre mathématiques et sciences physiques. In M. Kourkoulos, G. Troulis, et C. Tzanakis, éditeurs, *Proceedings of 4th International Colloquium on the Didactics of Mathematics*, volume 2.
- CHEVALLARD Y. (2001) Les mathématiques et le monde : dépasser «l'horreur instrumentale». *Quadrature* 41, 25–40.
- CONDORCET J. A. (1793). Tableau général de la science qui a pour objet l'application du calcul aux sciences politiques et morales. *Journal d'instruction sociale*, 22.
- CONDORCET, J.A. (1785) Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix. Rééd. (2014) UK : Cambridge University Press, 2014.
- COURNOT A.A. (1838) Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses. Paris : Hachette. Rééd. (2015) Paris : BnF collection ebooks.

- D'ALEMBERT, J. L. R., & DIDEROT, D. (1751). *ENCYCLOPÉDIE. Bd. I.*
- DE BORDA J. C. (1781). Mémoire sur les élections au scrutin, *Histoire de l'Académie Royale des Sciences. Paris, France.*
- DODGSON C. (1876). A method of taking votes on more than two issues. In Black, D., Newing, R. A., McLean, I., McMillan, A., & Monroe, B. L. (1958) *The theory of committees and elections.*
- FELDMAN J. (2005) Condorcet et la mathématique sociale. enthousiasmes et bémols. *Mathématiques et sciences humaines. Mathematics and social sciences*, (172).
- GUILBAUD G. T. (2012). Les théories de l'intérêt général et le problème logique de l'agrégation. *Revue économique*, 63(4), 659-720.
- GUILBAUD, G. T. (2002). La mathématique et le social. Entretien avec Georges Th. Guilbaud In *Gérer et comprendre*, n°67, mars 2002.
- LÉVI-STRAUSS C. (1956 ) Les mathématiques de l'homme. *Esprit (1940-)*, (243 (10)),525–538.
- MAY, K. O. (1952). A set of independent necessary and sufficient conditions for simple majority decision. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 680-684.
- REYNIÉ P. (2001) Le principe de « majorité ». Emergence, triomphe et remise en cause. IN PERRINEAU, P., REYNIÉ, D. (2001). *Dictionnaire du vote.* Paris : PUF
- ROUSSEAU, J. J. (1766). *Contrat social: ou principes du droit politique.*