



HAL
open science

Filtrage adaptatif avec contrainte de non-négativité. Principes de l'algorithme NN-LMS et modèle de convergence

Cédric Richard, Jie Chen, José C. M. Bermudez, Paul Honeine

► **To cite this version:**

Cédric Richard, Jie Chen, José C. M. Bermudez, Paul Honeine. Filtrage adaptatif avec contrainte de non-négativité. Principes de l'algorithme NN-LMS et modèle de convergence. Actes du 23-ème Colloque GRETSI sur le Traitement du Signal et des Images, 2011, Bordeaux, France. hal-01966027

HAL Id: hal-01966027

<https://hal.science/hal-01966027>

Submitted on 27 Dec 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Filtrage adaptatif avec contrainte de non-négativité

Principes de l’algorithme NN-LMS et modèle de convergence

Cédric RICHARD⁽¹⁺⁾, Jie CHEN^(1,2), Jose BERMUDEZ⁽³⁾, Paul HONEINE⁽²⁾

⁽¹⁾Université de Nice Sophia-Antipolis, UMR Fizeau, CNRS, Observatoire de la Côte d’Azur
+ Institut Universitaire de France

⁽²⁾Institut Charles Delaunay - LM2S, Université de Technologie de Troyes (UTT), UMR STMR, CNRS

⁽³⁾Department of Electrical Engineering, Federal University of Santa Catarina, Florianópolis, SC, Brazil
cedric.richard@unice.fr, chenjie@sina.com, j.bermudez@ieee.org, paul.honeine@utt.fr

Résumé – Cet article présente une méthode d’identification de systèmes linéaires sous contraintes de non-négativité sur les coefficients estimés. En effet, en raison de caractéristiques physiques inhérentes à certains systèmes étudiés, la non-négativité est une information *a priori* parfois naturelle qu’il convient d’exploiter afin de se prémunir contre d’éventuels résultats non-interprétables. A la différence des techniques classiques de gradient projeté, l’algorithme « non-negative LMS » proposé opère à la façon d’une méthode de points intérieurs. Par ses performances et son coût calculatoire réduit, l’algorithme présente des caractéristiques comparables à l’algorithme LMS tout en garantissant la non-négativité des coefficients. Le modèle de convergence étudié reproduit très fidèlement les résultats de simulation.

Abstract – Dynamic system modeling plays a crucial role in the development of techniques for stationary and non-stationary signal processing. Due to the inherent physical characteristics of systems under investigation, non-negativity is a desired constraint that can usually be imposed on the parameters to estimate. In this paper, we propose a general method for system identification under non-negativity constraints. We derive the so-called “non-negative least-mean-square algorithm” based on stochastic gradient descent, and we analyze its convergence. Experiments are conducted to illustrate the performance of this approach and consistency with the analysis.

1 Introduction

En raison de caractéristiques physiques inhérentes à certains systèmes étudiés, la non-négativité des paramètres à estimer est une information *a priori* parfois naturelle qu’il convient d’exploiter afin de se prémunir contre d’éventuels résultats non-interprétables. Il en est par exemple ainsi dans l’analyse de rayonnements ou l’estimation de la concentration de composés chimiques. La contrainte de non-négativité a récemment connu un regain d’intérêt en traitement du signal et des images. Celle-ci s’est manifestée dans des contextes méthodologiques et applicatifs divers, de la restauration d’images astronomiques [1] à la déconvolution de spectres d’émissions en chimie [2], en passant par l’imagerie hyperspectrale [3].

Plusieurs stratégies ont été proposées afin de résoudre le problème de minimisation du coût quadratique sous contraintes de non-négativité. Les méthodes de contraintes actives reposent par ensemble sur le fait que, sous réserve de connaître les variables activant les contraintes, la solution du problème de moindres carrés peut être obtenue par résolution d’un problème non-contraint n’impliquant que les variables encore libres. L’algorithme dit de Lawson et Hanson [4] est une approche hors-ligne de référence exploitant ce principe. Une autre classe de méthodes, dite

de type gradient projeté [5], repose sur des projections successives des solutions intermédiaires sur l’espace admissible. Par leur simplicité algorithmique, sous réserve que l’opération de projection s’exprime aisément, ces approches s’avèrent particulièrement séduisantes. On déplore toutefois le fait que les solutions intermédiaires, avant projection, puissent ne pas respecter les contraintes et se trouver, le cas échéant, à l’extérieur du domaine de définition du critère. On compte enfin les méthodes multiplicatives, rendues populaires par le problème de factorisation en matrices non-négatives, mais largement utilisées auparavant en restauration d’images astronomiques [6]. Elles reposent sur une mise-à-jour de la solution à l’aide d’un facteur vectoriel ou matriciel à composantes positives, assurant la non-négativité de la solution. La vitesse de convergence des méthodes multiplicatives est toutefois réputée lente, en raison d’un pas non-modifiable puisqu’il garantit en l’état la forme multiplicative de la mise-à-jour, et à une direction de descente non-colinéaire au gradient.

Dans cette communication, on présente une méthode aux caractéristiques comparables à l’algorithme LMS qui garantit la non-négativité des coefficients du filtre. On en étudie alors analytiquement les propriétés de convergence, ce qui permet d’exhiber un critère de convergence portant sur l’initialisation de l’algorithme et le choix du pas.

2 Principe de la méthode

Considérons un système inconnu, uniquement caractérisé par un ensemble de réponses en temps discret à des sollicitations stationnaires connues. Le problème traité est celui de la conception d'un filtre transverse

$$y(n) = \boldsymbol{\alpha}^\top \mathbf{x}(n) + z_1(n), \quad (1)$$

avec $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N]^\top$ le vecteur de coefficients à estimer, et $\mathbf{x}(n) = [x(n), x(n-1), \dots, x(n-N+1)]^\top$ le vecteur d'observations. Le signal d'entrée $x(n)$ et le signal de sortie $y(n)$ désiré sont supposés stationnaires et de moyenne nulle. La séquence $z_1(n)$ traduit les bruits de mesure et autres erreurs de modélisation. On s'intéresse à la résolution du problème suivant

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha}^o &= \arg \min_{\boldsymbol{\alpha}} J(\boldsymbol{\alpha}) \\ &\text{sous contrainte } \alpha_i \geq 0, \quad \forall i, \end{aligned} \quad (2)$$

où $J(\boldsymbol{\alpha})$ est un coût convexe, et $\boldsymbol{\alpha}^o$ la solution du problème d'optimisation contraint. Afin de résoudre le problème (2), on considère le Lagrangien $Q(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\lambda})$ défini par

$$Q(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\lambda}) = J(\boldsymbol{\alpha}) - \boldsymbol{\lambda}^\top \boldsymbol{\alpha}, \quad (3)$$

avec $\boldsymbol{\lambda}$ le vecteur des multiplicateurs de Lagrange, tous non-négatifs. Les conditions dites de Karush-Kuhn-Tucker doivent être vérifiées à l'optimum, caractérisé par $\boldsymbol{\alpha}^o$ et $\boldsymbol{\lambda}^o$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \nabla_{\boldsymbol{\alpha}} Q(\boldsymbol{\alpha}^o, \boldsymbol{\lambda}^o) &= 0 \\ \alpha_i^o [\boldsymbol{\lambda}^o]_i &= 0, \quad \forall i \end{aligned}$$

où $\nabla_{\boldsymbol{\alpha}}$ désigne le gradient par rapport à $\boldsymbol{\alpha}$. En utilisant $\nabla_{\boldsymbol{\alpha}} Q(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\lambda}) = \nabla_{\boldsymbol{\alpha}} J(\boldsymbol{\alpha}) - \boldsymbol{\lambda}$, ces deux équations peuvent être combinées en une seule expression

$$\alpha_i^o [-\nabla_{\boldsymbol{\alpha}} J(\boldsymbol{\alpha}^o)]_i = 0. \quad (4)$$

En constatant que les équations de la forme $\varphi(u) = 0$ peuvent être résolues par la mise en œuvre d'une méthode de point fixe en considérant le problème $u = u + \varphi(u)$, on aboutit à la méthode de descente de gradient exprimée par composante

$$\alpha_i(n+1) = \alpha_i(n) + \eta \alpha_i(n) [-\nabla_{\boldsymbol{\alpha}} J(\boldsymbol{\alpha}(n))]_i \quad (5)$$

avec η un pas strictement positif. Il convient de noter que celui-ci doit être choisi afin d'assurer le caractère contractant du schéma de point fixe adopté, ce qui constitue l'objet de l'étude de convergence ci-après. En considérant le coût quadratique $J(\boldsymbol{\alpha}) = E\{[y(n) - \boldsymbol{\alpha}^\top \mathbf{x}(n)]^2\}$, et en approchant les moments du second ordre par des grandeurs instantanées, soit $\mathbf{R}_x \approx \mathbf{x}(n) \mathbf{x}^\top(n)$ et $\mathbf{r}_{xy} \approx y(n) \mathbf{x}(n)$, on aboutit à l'algorithme *non-negative LMS* (NN-LMS) proposé :

$$\boldsymbol{\alpha}(n+1) = \boldsymbol{\alpha}(n) + \eta e(n) \mathbf{D}_{\boldsymbol{\alpha}}(n) \mathbf{x}(n), \quad \eta > 0 \quad (6)$$

où $\mathbf{D}_{\boldsymbol{\alpha}}(n)$ est la matrice diagonale de termes diagonaux donnés par $\boldsymbol{\alpha}(n)$, et $e(n) = y(n) - \boldsymbol{\alpha}^\top(n) \mathbf{x}(n)$. Il est intéressant de remarquer le rôle de $\mathbf{D}_{\boldsymbol{\alpha}}(n)$ dans cette expression. Celui-ci inverse le sens de progression de l'algorithme pour les composantes $\alpha_i(n)$ qui seraient négatives, afin de les ramener dans le domaine admissible, et réduit le pas à l'approche de la borne 0.

3 Comportement de l'algorithme

On s'intéresse à présent au comportement de la méthode, que l'on souhaite décrire à l'aide d'un modèle analytique. Ce dernier est ici destiné à définir les conditions de convergence de l'algorithme, et pourra être exploité ultérieurement afin d'anticiper les performances dans un contexte applicatif donné. On note $\boldsymbol{\alpha}^*$ la solution du problème sans contrainte

$$\boldsymbol{\alpha}^* = \arg \min_{\boldsymbol{\alpha}} E\{[y(n) - \boldsymbol{\alpha}^\top \mathbf{x}(n)]^2\}. \quad (7)$$

En définissant le vecteur d'erreur comme suit

$$\mathbf{v}(n) = \boldsymbol{\alpha}(n) - \boldsymbol{\alpha}^* = [v_1(n), v_2(n), \dots, v_N(n)]^\top, \quad (8)$$

l'équation de mise-à-jour (6) peut s'écrire

$$\mathbf{v}(n+1) = \mathbf{v}(n) + \eta e(n) \mathbf{D}_x(n) (\mathbf{v}(n) + \boldsymbol{\alpha}^*). \quad (9)$$

En utilisant $e(n) = y(n) - \boldsymbol{\alpha}^\top(n) \mathbf{x}(n) = z(n) - \mathbf{v}^\top(n) \mathbf{x}(n)$, on aboutit à l'expression suivante

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(n+1) &= \mathbf{v}(n) + \eta z(n) \mathbf{D}_x(n) \mathbf{v}(n) \\ &\quad + \eta z(n) \mathbf{D}_x(n) \boldsymbol{\alpha}^* \\ &\quad - \eta \mathbf{D}_x(n) \mathbf{v}(n) \mathbf{v}^\top(n) \mathbf{x}(n) \\ &\quad - \eta \mathbf{D}_x(n) \boldsymbol{\alpha}^* \mathbf{x}^\top(n) \mathbf{v}(n). \end{aligned} \quad (10)$$

En considérant l'espérance de l'expression ci-dessus, en négligeant la dépendance statistique de $\mathbf{x}(n)$ et $\mathbf{v}(n)$,¹ et en utilisant $E\{z(n) \mathbf{D}_x(n)\} = 0$, on aboutit à

$$\begin{aligned} E\{\mathbf{v}(n+1)\} &\approx \\ &(\mathbf{I} - \eta E\{\mathbf{D}_x(n) \boldsymbol{\alpha}^* \mathbf{x}^\top(n)\}) E\{\mathbf{v}(n)\} \\ &\quad - \eta E\{\mathbf{D}_x(n) \mathbf{v}(n) \mathbf{v}^\top(n) \mathbf{x}(n)\}. \end{aligned} \quad (11)$$

La première espérance dans le terme de droite de l'équation (11) est donnée par

$$\begin{aligned} E\{\mathbf{D}_x(n) \boldsymbol{\alpha}^* \mathbf{x}^\top(n)\} \\ = E\{\mathbf{D}_{\boldsymbol{\alpha}^*} \mathbf{x}(n) \mathbf{x}^\top(n)\} = \mathbf{D}_{\boldsymbol{\alpha}^*} \mathbf{R}_x. \end{aligned} \quad (12)$$

Afin d'évaluer la seconde espérance, on calcule la i -ème composante du vecteur $\mathbf{D}_x(n) \mathbf{v}(n) \mathbf{v}^\top(n) \mathbf{x}(n)$ ainsi

$$\begin{aligned} [\mathbf{D}_x(n) \mathbf{v}(n) \mathbf{v}^\top(n) \mathbf{x}(n)]_i \\ = \sum_{j=1}^N x(n-i+1) v_i(n) v_j(n) x(n-j+1) \end{aligned} \quad (13)$$

En prenant l'espérance mathématique de cette expression, en définissant $\mathbf{K}(n) = E\{\mathbf{v}(n) \mathbf{v}^\top(n)\}$, en négligeant la dépendance statistique de $\mathbf{x}(n)$ et $\mathbf{v}(n)$, on obtient

$$\begin{aligned} [E\{\mathbf{D}_x(n) \mathbf{v}(n) \mathbf{v}^\top(n) \mathbf{x}(n)\}]_i \\ \approx \sum_{j=1}^N r_x(j-i) [\mathbf{K}(n)]_{ij} \\ = [\mathbf{R}_x \mathbf{K}(n)]_{ii} \end{aligned} \quad (14)$$

1. Cette hypothèse est moins restrictive que l'hypothèse d'indépendance couramment utilisée comme dans [7, p. 247], puisqu'elle ne nécessite pas que $x(n)$ soit Gaussien.

Ceci implique que

$$E\{\mathbf{D}_x(n) \mathbf{v}(n) \mathbf{v}^\top(n) \mathbf{x}(n)\} \approx \text{diag}\{\mathbf{R}_x \mathbf{K}(n)\},$$

où $\text{diag}\{\mathbf{A}\}$ représente le vecteur dont la i -ème composante est définie par $[\mathbf{A}]_{ii}$. En utilisant ces résultats dans l'expression (11), on aboutit à la récurrence suivante décrivant le comportement moyen de l'erreur sur les poids

$$\begin{aligned} E\{\mathbf{v}(n+1)\} \\ = (\mathbf{I} - \eta \mathbf{D}_{\alpha^*} \mathbf{R}_x) E\{\mathbf{v}(n)\} - \eta \text{diag}\{\mathbf{R}_x \mathbf{K}(n)\}. \end{aligned} \quad (15)$$

Cette équation nécessite le calcul de moments d'ordre 2 par le biais de $\mathbf{K}(n)$ afin d'évaluer $E\{\mathbf{v}(n)\}$. Un modèle récursif pourrait être défini pour $\mathbf{K}(n)$. Nous avons toutefois abouti à un modèle suffisamment précis et plus aisément exploitable peut être obtenu à partir de l'hypothèse de séparation suivante

$$\mathbf{K}(n) \approx E\{\mathbf{v}(n)\} E\{\mathbf{v}^\top(n)\}. \quad (16)$$

En utilisant (16) dans (15), on obtient le résultat suivant

$$\begin{aligned} E\{\mathbf{v}(n+1)\} \\ = (\mathbf{I} - \eta \mathbf{D}_{\alpha^*} \mathbf{R}_x) E\{\mathbf{v}(n)\} \\ - \eta \text{diag}\{\mathbf{R}_x E\{\mathbf{v}(n)\} E\{\mathbf{v}^\top(n)\}\}. \end{aligned} \quad (17)$$

L'approximation (16) suppose que

$$\text{Cov}\{v_i(n), v_j(n)\} \ll E\{v_i(n)\} E\{v_j(n)\} \quad (18)$$

En général, l'approximation (18) est d'autant plus raisonnable que les poids sont loin de leur valeur de convergence, dans la mesure où $E\{v_i(n)\}$ tend alors à être plus grand que les fluctuations quantifiées par $\text{std}\{v_i(n)\}$. De nombreuses simulations nous ont permis de confirmer que le modèle simplifié (17) offre une qualité de prédiction de l'évolution des poids suffisante pour anticiper les performances du filtre dans un contexte applicatif donné. Il permet en outre une analyse théorique des conditions de convergence de l'algorithme, abordée ci-après.

4 Cas d'un signal d'entrée blanc

En général, le comportement de (17) peut être complexe à étudier [8]. Afin d'obtenir des résultats analytiques qui favorisent une certaine interprétation du comportement moyen des poids du filtre, on s'intéresse ici au cas particulier d'un signal d'entrée blanc, soit $\mathbf{R}_x = \mathbf{I}$. Les conditions de Karush-Kuhn-Tucker impliquent que la solution α^o du problème (2) est donnée par $\alpha^o = \{\alpha^*\}_+$ où $\{u\}_+ = \max\{0, u\}$. Ceci n'est évidemment vrai que sous l'hypothèse de blancheur de $x(n)$. L'expression (15) se ramène alors à l'expression par composante suivante

$$E\{v_i(n+1)\} = (1 - \eta \alpha_i^*) E\{v_i(n)\} - \eta E\{v_i(n)\}^2. \quad (19)$$

La fonction $E\{v_i(n+1)\}$ dans (19) est une parabole en la variable $E\{v_i(n)\}$ avec pour racines $E\{v_i(n)\} = 0$ et $E\{v_i(n)\} = (1 - \eta \alpha_i^*)/\eta$. Les points fixes sont obtenus en

résolvant $E\{v_i(n+1)\} = E\{v_i(n)\}$, ce qui conduit aisément à $E\{v_i(n)\} = 0$ ou $E\{v_i(n)\} = -\alpha_i^*$. Ce résultat est consistant avec la solution $\alpha^o = \{\alpha^*\}_+$ puisque

$$v_i^o = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha_i^* \geq 0 \\ -\alpha_i^* & \text{sinon} \end{cases} \quad (20)$$

où v_i^o est la i -ème composante de $\mathbf{v}^o = \alpha^o - \alpha^*$.

On analyse les conditions de convergence de (19) vers 0 et $-\alpha_i^*$. En écrivant $u(n) = \eta E\{v_i(n)\}/(1 - \eta \alpha_i^*)$, où l'indice i a été oublié pour simplifier les notations, on obtient l'équation aux différences suivante connue sous le nom de *suite logistique* [8, 9]

$$u(n+1) = \rho u(n) (1 - u(n)) \quad (21)$$

avec $\rho = 1 - \eta \alpha_i^*$, supposé non-nul. Les points fixes définis dans (20) correspondent maintenant à $u = 0$ et $u = \frac{\rho-1}{\rho}$, respectivement. La convergence de la suite logistique vers ces valeurs dépend du paramètre ρ et de la condition initiale $u(0)$ comme suit. Voir [8, 9] pour plus de détails.

Cas 1 : $0 < \rho < 1$

Le point fixe $u = 0$ attire toutes les trajectoires initiées dans l'intervalle $](\rho - 1)/\rho; 1/\rho[$. La suite logistique $u(n)$ est identiquement égale à $(\rho - 1)/\rho$ pour $n \geq 1$ si $u(0) = (\rho - 1)/\rho$ ou $u(0) = 1/\rho$. A l'extérieur de cet intervalle, elle diverge vers $-\infty$.

Cas 2 : $\rho = 1$

Le point fixe $u = 0$ attire toutes les trajectoires initiées dans l'intervalle $[0; 1]$. La suite logistique $u(n)$ est identiquement égale à 0 pour $n \geq 1$ si $u(0) = 0$ or 1. Elle diverge vers $-\infty$ si $u(0) \notin [0; 1]$.

Cas 3 : $1 < \rho \leq 3$

Le point fixe $u = \frac{\rho-1}{\rho}$ attire toutes les trajectoires initiées dans l'intervalle $]0; 1[$. Avec les conditions initiales $u(0) = 0$ ou $u(0) = 1$, nous avons $u(n) = 0$ pour tout $n > 0$. On montre que la suite logistique diverge vers $-\infty$ si $u(0) \notin [0; 1]$.

Cas 4 : $\rho > 3$

Les points fixes deviennent instables. De nouveaux points fixes apparaissent entre lesquels le système alterne selon des cycles stables de période 2^k , où k tend vers l'infini à mesure que ρ croît. Ce cas peut conduire à un comportement chaotique, qui dépasse le cadre de cette étude.

Afin d'établir des conditions de convergence pour l'équation (19) vers 0 et $-\alpha_i^*$, on doit considérer séparément les composantes $E\{v_i(n)\}$ associées aux valeurs positives et négatives de l'optimum non-contraint α_i^* , respectivement. D'une part, à partir de l'analyse de la suite logistique (21), la convergence de (19) vers 0 correspond aux conditions sur ρ et $u(0)$ satisfaisant les Cas 1 et Cas 2 ci-dessus. Ceci conduit à

$$0 < \eta < \frac{1}{\alpha_i^*} \quad -\alpha_i^* < v_i(0) < \frac{1}{\eta} \quad (22)$$

dans le cas $\alpha_i^* > 0$. Si $\alpha_i^* = 0$, ces deux conditions deviennent $\eta > 0$ et $0 < v_i(0) < \frac{1}{\eta}$. D'autre part, ρ et $u(0)$

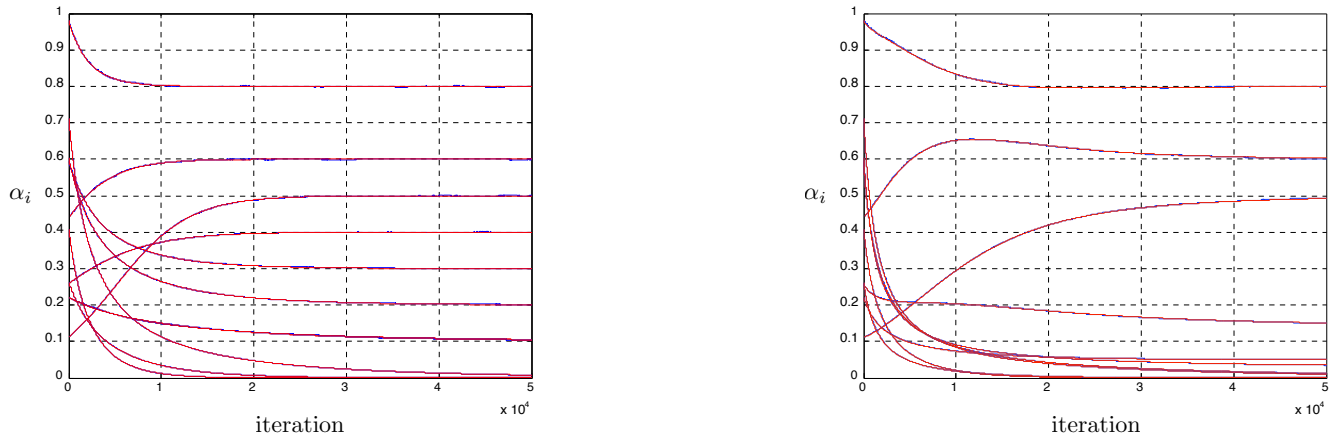


FIGURE 1 – Convergence des coefficients $\alpha_i(n)$ dans le cas d’une entrée blanche (gauche) ou corrélée (droite). Le pas choisi est de $\eta = 5 \cdot 10^{-4}$. Les courbes théoriques (rouge), obtenues à partir du modèle (15), sont parfaitement superposées aux courbes obtenues par moyennage de 100 simulations de Monte Carlo (bleu).

doivent obéir aux conditions présentées dans le Cas 3 pour une convergence de l’équation (19) vers $-\alpha_i^*$. Ceci donne

$$0 < \eta \leq -\frac{2}{\alpha_i^*} \quad 0 < v_i(0) < \frac{1}{\eta} - \alpha_i^* \quad (23)$$

dans le cas où $\alpha_i^* < 0$. Finalement, combiner ces inégalités conduit aux conditions de convergence de $E\{v(n)\}$:

$$0 < \eta \leq \min_i \frac{1}{|\alpha_i^*|} \quad \text{et} \quad 0 < v_i(0) < \frac{1}{\eta} \quad \forall i \quad (24)$$

ou, par (22) et (23), pour la convergence de $E\{\alpha(n)\}$:

$$0 < \eta \leq \min_i \frac{1}{|\alpha_i^*|} \quad \text{et} \quad 0 < \alpha_i(0) < \frac{1}{\eta} \quad \forall i. \quad (25)$$

En conclusion, les conditions (24) et (25) montre que la convergence de l’algorithme est conditionnée par le choix du pas et de la condition initiale. Elles montrent également qu’il y a d’avantage de liberté dans le choix de $\alpha_i(0)$ pour de faibles valeurs de η .

5 Simulations

Nous illustrons la qualité du modèle analytique (15) en considérant le système $y(n) = \mathbf{\alpha}^* \top \mathbf{x}(n) + z(n)$. Le bruit additif $z(n)$ est choisi i.i.d., distribué selon une loi Gaussienne centrée de variance $\sigma_z^2 = 10^{-2}$. L’entrée $x(n)$ est définie de même dans une première expérimentation, blanche gaussienne et de variance $\sigma_x^2 = 1$. Dans une seconde simulation, l’entrée $x(n)$ est corrélé à l’aide d’un filtre AR(1) de paramètre $\frac{1}{2}$, après en avoir ramené la variance à $\sigma_x^2 = \frac{1}{4}$ pour conserver le même rapport signal-sur-bruit dans les deux expérimentations. Dans les deux cas, la réponse impulsionnelle utilisée pour générer les sorties désirées est donnée par

$$\mathbf{\alpha}^* = [0.8 \ 0.6 \ 0.5 \ 0.4 \ 0.3 \ 0.2 \ 0.1 \ -0.1 \ -0.3 \ -0.6] \top$$

qui comporte ainsi des composantes négatives afin de solliciter les contraintes de non-négativité. La valeur $E\{\alpha_i(n)\}$ moyenne de chaque coefficient est présentée en Figure 1.

Les tracés bleus ont été générés par simulations de Monte Carlo moyennées sur 100 réalisations. Les tracés théoriques, en rouge, ont été obtenus grâce au modèle (17). Il est important de noter la parfaite superposition des courbes. Il est également intéressant de constater la convergence de l’algorithme, vers la valeur $\{\alpha_i^*\}_+$ pour chaque composante dans le cas d’une entrée blanche, vers une valeur différente pour laquelle on ne dispose pas de solution analytique dans le cas d’une entrée corrélée.

Références

- [1] F. Benvenuto, R. Zanella, L. Zanni, and M. Bertero, “Nonnegative least-squares image deblurring : improved gradient projection approaches,” *Inverse Problems*, vol. 26, no. 1, 2010.
- [2] M. H. Van Benthem and M. R. Keenan, “Fast algorithm for the solution of large-scale non-negativity-constrained least squares problems,” *Journal of Chemometrics*, vol. 18, pp. 441–450, 2004.
- [3] M. W. Berry, M. Browne, A. N. Langville, V. P. Pauca, and R. J. Plemmons, “Algorithms and applications for approximate nonnegative matrix factorization,” *Computational Statistics and Data Analysis*, vol. 52, no. 1, pp. 155–173, 2007.
- [4] C. L. Lawson and R. J. Hanson, *Solving Least Squares Problems*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1995.
- [5] P. H. Calamai and J. J. Moré, “Projected gradient methods for linearly constrained problems,” *Mathematical Programming*, vol. 39, no. 1, pp. 93–116, 1987.
- [6] H. Lantéri, M. Roche, O. Cuevas, and C. Aime, “A general method to devise maximum-likelihood signal restoration multiplicative algorithms with non-negativity constraints,” *Signal Processing*, vol. 81, no. 5, pp. 945–974, 2001.
- [7] A. Sayed, *Adaptive Filters*. New York : Wiley-Interscience, 2008.
- [8] M. May Robert, “Simple mathematical models with very complicated dynamics,” *Nature*, vol. 261, no. 10, pp. 459–467, 1976.
- [9] D. Perrin, “La suite logistique et le chaos,” Département de Mathématiques d’Orsay, Université de Paris-Sud, France, Tech. Rep., 2008.