



**HAL**  
open science

## Estimation de la dimension intrinsèque des images hyperspectrales à l'aide d'un modèle à variances isolées

Abderrahim Halimi, Paul Honeine, Malika Kharouf, Cédric Richard,  
Jean-Yves Tournet

### ► To cite this version:

Abderrahim Halimi, Paul Honeine, Malika Kharouf, Cédric Richard, Jean-Yves Tournet. Estimation de la dimension intrinsèque des images hyperspectrales à l'aide d'un modèle à variances isolées. Actes du 25-ème Colloque GRETSI sur le Traitement du Signal et des Images, 2015, Lyon, France. hal-01965986

**HAL Id: hal-01965986**

**<https://hal.science/hal-01965986v1>**

Submitted on 27 Dec 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Estimation de la Dimension Intrinsèque des Images Hyperspectrales à l'Aide d'un Modèle à Variances Isolées

Abderrahim HALIMI<sup>1</sup>, Paul HONEINE<sup>1</sup>, Malika KHAROUF<sup>1</sup>, Cédric RICHARD<sup>2</sup>, Jean-Yves TOURNERET<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Institut Charles Delaunay (CNRS), Université de technologie de Troyes, France

<sup>2</sup>Université de Nice Sophia-Antipolis, CNRS, Observatoire de la Côte d'Azur, France

<sup>3</sup>Université de Toulouse, IRIT-ENSEEIH-TéSA, Toulouse, France

{abderrahim.halimi,paul.honeine,malika.kharouf}@utt.fr, cedric.richard@unice.fr,  
jean-yves.tourneret@enseeiht.fr

**Résumé** – Cet article propose une approche automatique pour estimer le nombre de spectres de composés purs dans les images hyperspectrales. L'estimation est basée sur de récents résultats de la théorie des matrices aléatoires sur les “modèles à variances isolées”. Plus précisément, nous étudions l'écart entre les valeurs propres successives de la matrice de covariance des observations. L'algorithme d'estimation proposé est automatique et robuste à la présence de bruit corrélé. Cette stratégie est validée sur des images synthétiques et réelles. Les résultats expérimentaux sont prometteurs et montrent la pertinence de cette approche par rapport à l'état de l'art.

**Abstract** – This paper proposes a fully automatic approach for estimating the number of endmembers in hyperspectral images. The estimation is based on recent results of random matrix theory related to the so-called spiked population model. More precisely, we study the gap between successive eigenvalues of the sample covariance matrix constructed from high dimensional noisy samples. The resulting estimation strategy is unsupervised and robust to correlated noise. This strategy is validated on both synthetic and real images. The experimental results are very promising and show the accuracy of this algorithm with respect to state-of-the-art algorithms.

## 1 Introduction

Les pixel-vecteurs des images hyperspectrales sont constitués d'un mélange de spectres de composés dits purs pondérés par des proportions appelées abondances. Le démixage des images hyperspectrales consiste généralement en trois étapes (i) estimation du nombre de spectres purs [1, 2], (ii) extraction de ces spectres et (iii) estimation des abondances. Cet article considère le problème d'estimation du nombre de spectres purs qui reste un problème majeur en imagerie hyperspectrale. Plusieurs travaux se sont intéressés à ce problème et peuvent être regroupés en trois classes d'approches : les tests d'hypothèses tels que l'algorithme Harsanyi-Farrand-Chang (HFC) [2, 3], les approches basées sur l'optimisation d'une fonction de coût comme l'algorithme Hysime [1] et enfin une méthode récente qui s'appuie sur la théorie des matrices aléatoires via l'algorithme de Cawse-Damelin-Robin-Sears (CDRS) [4]. On s'intéresse dans cet article à la troisième classe d'algorithmes. L'algorithme CDRS est lui-même divisé en deux étapes : (i) estimation de la matrice de covariance du bruit et élimination de ses effets, (ii) mise en oeuvre d'un seuil théorique sur les valeurs propres de la matrice de covariance après blanchiment. Cependant, cet algorithme est sensible au bruit [4] et à la présence de corrélation dans ce dernier [5].

L'objectif de cet article est d'introduire un algorithme automatique traitant le problème d'estimation du nombre des spectres purs en présence d'un bruit non identiquement distribué. L'algorithme proposé vise à améliorer les performances de l'algorithme CDRS en étant plus robuste à la corrélation du bruit. De la même manière que CDRS et Hysime, notre

méthode commence par estimer la matrice de covariance de bruit. La deuxième étape utilise des résultats récents sur les “modèles à variances isolées”. En effet, Passemier et Yao ont proposé dans [6] une méthode basée sur l'écart entre les valeurs propres successives de la matrice de covariance dans le cas d'un bruit blanc. L'idée principale de cette méthode se base sur le fait que les écarts entre deux valeurs propres successives de la matrice de covariance blanchie sont considérables en présence d'un mélange de matériaux purs. Dans le cas où les observations se réduisent à un bruit blanc (ou faiblement coloré suite à l'imprécision de la procédure de blanchiment), ces écarts sont plutôt faibles. S'appuyant sur cette idée, dans le cas d'un signal composé d'un mélange de matériaux bruités, nous proposons un seuil séparant la partie signal (mélange de matériaux purs) de la partie bruit.

L'article est organisé comme suit. La section 2 introduit le modèle de mélange linéaire classiquement utilisé en imagerie hyperspectrale. L'algorithme proposé est décrit dans la section 3. Des résultats sur des images synthétiques et réelles sont présentés dans les sections 4 et 5. La section 6 donne quelques conclusions et perspectives.

## 2 Formulation du problème

### 2.1 Modèle de mélange linéaire

En imagerie hyperspectrale, le modèle de mélange linéaire suppose que le  $n$ ème pixel de l'image noté  $\mathbf{y}_n$ , de taille  $L \times 1$ , est une combinaison linéaire de  $R$  spectres dits purs  $\mathbf{m}_r$ ,  $r \in$

$\{1, \dots, R\}$ , perturbée par un bruit  $e_n$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_n &= \sum_{r=1}^R a_{rn} \mathbf{m}_r + e_n \\ &= \mathbf{M} \mathbf{a}_n + e_n \end{aligned} \quad (1)$$

où  $e_n \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}_L, \Sigma)$  est un bruit Gaussien de matrice de covariance  $\Sigma$ ,  $\mathbf{0}_L$  est le vecteur nul de dimension  $L \times 1$ ,  $\mathbf{a}_n$  représente les abondances qui satisfont les contraintes de positivité et de somme à un, et  $\mathbf{M} = [\mathbf{m}_1, \dots, \mathbf{m}_R]$  est une matrice de taille  $L \times R$  regroupant les spectres purs de l'image. En considérant les  $N$  pixels de l'image  $\mathbf{Y} = [\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n]$  (de taille  $L \times N$ ), on peut écrire

$$\mathbf{Y} = \mathbf{M} \mathbf{A} + \mathbf{E} \quad (2)$$

où  $\mathbf{A}$  est la matrice  $R \times N$  des abondances et  $\mathbf{E} = [e_1, \dots, e_n]$  est une matrice de taille  $L \times N$  contenant les vecteurs de bruit.

L'estimation du nombre de spectres purs contenus dans  $\mathbf{Y}$  peut reposer sur une analyse des valeurs propres de la matrice de covariance de  $\mathbf{Y}$ . En supposant l'indépendance entre le signal  $\mathbf{S} = \mathbf{M} \mathbf{A}$  et le bruit  $\mathbf{E}$ , on obtient

$$\mathbf{R}_Y = \mathbf{R}_S + \Sigma \quad (3)$$

où  $\mathbf{R}_Y$  et  $\mathbf{R}_S$  représentent les matrices de covariance de  $\mathbf{Y}$  et  $\mathbf{S}$ , respectivement. On s'intéresse dans cet article à l'estimation du nombre des spectres purs  $R = K + 1$ , où  $K = \text{rank}(\mathbf{R}_S)$ . En effet, le signal  $\mathbf{M} \mathbf{a}_n$  appartient à un sous-espace de taille  $R - 1$  du fait de la contrainte de somme à un sur les abondances.

## 2.2 Modèle à variances isolées

Le modèle à variances isolées considère la matrice de covariance  $\Lambda$  suivante [6]

$$\mathbf{R}_Y = \sigma^2 \mathbf{\Gamma} \begin{bmatrix} \gamma_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \gamma_K & & & \\ \hline & & & \mathbf{0}_{K, L-K} & & \\ \hline & & & & \mathbf{I}_{L-K} & \\ \hline \end{bmatrix} \mathbf{\Gamma}^\top \quad (4)$$

où  $\mathbf{\Gamma}$  est une matrice orthogonale de taille  $L \times L$  et  $\mathbf{I}_L$  est la matrice identité de taille  $L \times L$ . La détermination du nombre des spectres purs est équivalente à la détermination du nombre des variances isolées  $\gamma_k$ . En effet, en notant les  $K$  valeurs propres de  $\mathbf{R}_S$  par  $\{\rho_1, \dots, \rho_K\}$  et celles de  $\mathbf{R}_Y$  par  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_K\}$ , et en supposant  $\Sigma = \sigma^2 \mathbf{I}_L$ , on obtient de (4)

$$\rho_k + \sigma^2 = \gamma_k \sigma^2, \text{ pour } k \leq K \quad (5)$$

et de (3)

$$\lambda_k = \begin{cases} \rho_k + \sigma^2, & \text{si } k \leq K \\ \sigma^2, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (6)$$

Dans le régime asymptotique où  $N$  et  $L$  convergent vers l'infini au même rythme ( $N \rightarrow \infty$ ,  $\frac{L}{N} \rightarrow c > 0$ ), Baik et Silvesterstein démontrent dans [7], sous certaines conditions supplémentaires, les convergences presque sûres suivantes :

$$\begin{aligned} \lambda_k &\xrightarrow[N \rightarrow \infty]{p.s.} \sigma^2 \phi(\gamma_k), & \text{pour } k \in \{1, \dots, K\} \\ \lambda_k &\xrightarrow[N \rightarrow \infty]{p.s.} \sigma^2 (1 + \sqrt{c})^2, & \text{pour } k > K \end{aligned} \quad (7)$$

où  $\phi(x) = (x + 1) \left(1 + \frac{c}{x}\right)$ . Passerier et al. considèrent dans [6] ce résultat pour développer un nouvel estimateur de  $K$  dans le cas d'un bruit blanc. Soient  $\delta_k = \lambda_k - \lambda_{k+1}$ , pour  $k = 1, \dots, L - 1$ , les différences successives entre les valeurs propres triées par ordre décroissant  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_L$ . L'estimateur est alors donné par

$$\hat{K} = \min \{k \in \{1, \dots, M\}; \delta_{k+1} < d_N\} \quad (8)$$

où  $M \geq K$  est une constante suffisamment grande, et  $d_N$  est un seuil qui doit satisfaire pour  $N \rightarrow +\infty$  les conditions  $d_N \rightarrow 0$  et  $N^{2/3} d_N \rightarrow +\infty$ . Les auteurs de [6] ont proposé l'utilisation du seuil  $d_N = \frac{\psi_N}{N^{2/3}} \beta_c$  avec  $\psi_N = 4\sqrt{2 \log(\log N)}$  et

$$\beta_c = (1 + \sqrt{c}) \left(1 + \sqrt{c^{-1}}\right)^{1/3}$$

puisqu'il satisfait les conditions précédentes.

## 3 Algorithme proposé

La technique d'estimation exposée précédemment suppose que le bruit est blanc. En imagerie hyperspectrale, cette condition n'est pas souvent réaliste [1, 8]. Nous proposons alors de procéder en deux étapes : d'abord le blanchiment du bruit, et ensuite l'estimation du nombre des spectres purs.

### 3.1 Estimation du bruit

De nombreuses méthodes ont été proposées pour l'estimation du bruit affectant les images hyperspectrales. On y distingue les méthodes utilisant l'homogénéité spatiale [9], les méthodes géométriques [10] et celles exploitant la corrélation spectrale comme l'algorithme par régressions multiples [1, 2]. Comme expliqué dans [1], l'homogénéité spatiale utilisée dans [9] n'est pas toujours présente en imagerie hyperspectrale. Par ailleurs, [10] estime le bruit d'une bande à une autre sans tenir compte de la corrélation entre celles-ci. De ce fait, on utilisera dans cet article l'algorithme par régressions multiples tel qu'implémenté dans [1] pour l'estimation de la matrice de covariance  $\hat{\Sigma}$  du bruit<sup>1</sup>. (voir aussi [11] pour plus de détails).

### 3.2 Estimation du rang

L'estimation du rang de la matrice de covariance  $\mathbf{R}_Y$  suppose que le bruit additif est blanc. Dans les applications pratiques où le bruit est coloré, on peut donc penser à appliquer une procédure de blanchiment du bruit. Cependant, il a été montré dans [4, 12] que cette procédure, combinée avec l'approche CDRS, conduit à une surestimation de la dimension  $K$ . Par conséquent, nous éliminerons l'effet du bruit en adoptant la stratégie utilisée dans [4]. En considérant que  $\mathbf{v}_i^\top \mathbf{w}_i \neq 0, \forall i = 1, \dots, L$ , il a été montré dans [4] que

$$\hat{\lambda}_k = \begin{cases} \rho_k + \frac{\mathbf{v}_k^\top \hat{\Sigma} \mathbf{w}_k}{\mathbf{v}_k^\top \mathbf{w}_k}, & \text{si } k \leq K \\ \frac{\mathbf{v}_k^\top \hat{\Sigma} \mathbf{w}_k}{\mathbf{v}_k^\top \mathbf{w}_k}, & \text{sinon} \end{cases} \quad (9)$$

1. Le code Matlab est disponible sous le lien : <http://www.lx.it.tu/~bioucas/code.htm>

où  $\mathbf{v}_k$  and  $\mathbf{w}_k$  représentent les vecteurs propres de  $\mathbf{R}_Y$  et  $\mathbf{R}_S$ . A noter que (9) est similaire à (6) à la différence que la variance du bruit a été changée par son estimée donnée par

$$\hat{\sigma}_k^2 = \frac{\mathbf{v}_k^\top \hat{\Sigma} \mathbf{w}_k}{\mathbf{v}_k^\top \mathbf{w}_k}. \quad (10)$$

Les équations (9) et (10) nécessitent le calcul des vecteurs propres de la matrice inconnue  $\mathbf{R}_S$ . Cependant, cette dernière peut être estimée à partir de (3) comme suit

$$\hat{\mathbf{R}}_S = \hat{\mathbf{R}}_Y - \hat{\Sigma}. \quad (11)$$

L'estimateur du rang est finalement obtenu en revisitant (7) avec l'estimé (10). Ceci est fait en divisant les valeurs propres par  $\hat{\sigma}_k^2$ , comme proposé dans [6]. L'estimateur du rang est alors donné par

$$\hat{K} = \min \{k \in \{1, \dots, M\}; \Delta_{k+1} < d_N\} \quad (12)$$

où

$$\Delta_{k+1} = \frac{\hat{\lambda}_k}{\hat{\sigma}_k^2} - \frac{\hat{\lambda}_{k+1}}{\hat{\sigma}_{k+1}^2} \text{ et } d_N = \frac{\psi_N}{N^{2/3}} \beta_c. \quad (13)$$

L'ensemble des étapes de l'algorithme est résumé dans l'algorithme 1 ci-dessous.

---

**Algorithme 1** Estimation du nombre de spectres purs d'une image hyperspectrale

---

- 1: Calculer la matrice de covariance des observations  $\hat{\mathbf{R}}_Y$
  - 2: Estimer la matrice de covariance du bruit  $\hat{\Sigma}$
  - 3: Calculer la matrice  $\mathbf{V}$  des valeurs propres de  $\hat{\mathbf{R}}_Y$
  - 4: Calculer la matrice  $\mathbf{W}$  des valeurs propres de  $\hat{\mathbf{R}}_S = \hat{\mathbf{R}}_Y - \hat{\Sigma}$
  - 5: Calculer  $\hat{\lambda}_k, k \in \{1, \dots, L\}$  les valeurs propres de  $\hat{\mathbf{R}}_Y$
  - 6: Calculer  $\hat{\sigma}_k^2$  suivant (10)
  - 7: Calculer  $\Delta_{k+1}$  et  $d_N$  suivant (13)
  - 8: Estimer le nombre des spectres purs  $\hat{R} = \hat{K} + 1$  en utilisant (12)
- 

## 4 Résultats sur données synthétiques

Cette section analyse la performance de l'estimateur proposé pour des données synthétiques. Les performances de l'algorithme proposé (noté par EGA pour eigen-gap algorithm) sont comparées avec celles de Hysime [1], NWHFC [2] et CDRS [4]. Trois valeurs de la probabilité de fausse alarme  $P_f$  ont été considérées pour NWHFC à savoir  $P_f \in \{10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}\}$ . Les résultats associés sont notés par NWHFC<sub>1</sub>, NWHFC<sub>2</sub> et NWHFC<sub>3</sub>, respectivement. Nous utilisons pour la suite  $N = 10^4$  pixels,  $L = 224$  bandes, SNR = 25 dB, 50 simulations de Monte-Carlo et  $R = 4$  spectres purs extraits de la librairie USGS [1]. La première expérience montre l'effet d'une mauvaise estimation de la covariance du bruit. Pour cela, on génère les données avec un bruit blanc gaussien de variance  $\sigma^2$  et on applique les algorithmes en considérant une variance

estimée égale à  $\sigma^2(1 + \epsilon)$ . Les résultats obtenus sont représentés dans la figure 1 qui montre la bonne performance de EGA par rapport à Hysime et CDRS. A noter que NWHFC permet d'obtenir une meilleure estimation pour  $R = 4$ , mais offre de mauvaises performances en augmentant  $R$  et  $\sigma^2$  comme le montre les résultats de [11]. La deuxième expérience considère un bruit spectralement corrélé avec un coefficient de corrélation  $C$  (voir [11] pour plus de détails sur la matrice de covariance  $\mathbf{C}$ ). La figure 2 (haut) montre la robustesse de EGA par rapport à la variation du nombre des bandes corrélées pour  $C = 0.5$  (les bandes ont été choisies de façon aléatoire entre 0 et  $L - 1$ ). La figure 2 (bas) confirme ce résultat lorsque le coefficient de corrélation  $C$  varie de 0 à 0.9. A noter enfin que les performances de NWHFC se dégradent considérablement en augmentant  $R$  et/ou  $\sigma^2$  (voir [11]).

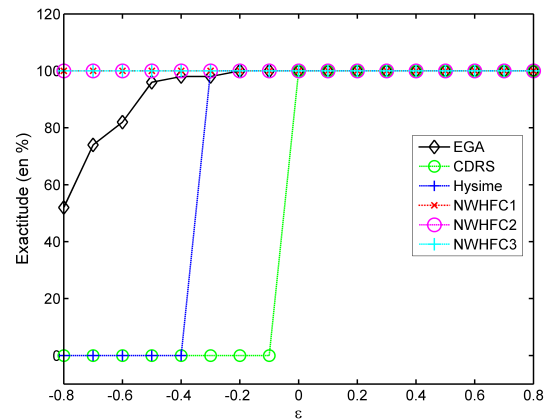


FIGURE 1 – Robustesse des algorithmes par rapport à la mauvaise estimation de la variance du bruit.

## 5 Résultats sur données réelles

Cette section analyse les performances de EGA en considérant 3 images réelles. La première image est celle de Indian Pines qui a été obtenue par l'imageur AVIRIS en 1992. L'image considérée contient  $L = 185$  bandes,  $145 \times 145$  pixels et plus de 16 spectres purs selon [1]. A part Hysime qui sous-estime le nombre d'éléments, l'ensemble des algorithmes estime 18 spectres purs comme le montre la deuxième colonne de la table 1. La deuxième image est celle de Cuprite acquise par l'imageur AVIRIS en 1997. L'image considérée comporte  $L = 182$  bandes,  $351 \times 351$  pixels et plus de 18 minéraux selon [13]. La table 1 (troisième colonne) montre que l'ensemble des algorithmes estime un nombre de matériaux supérieur à 18. Cependant, EGA propose une meilleure valeur que CDRS qui surestime  $R$ . La troisième image est celle de Madonna acquise par le scanner Hypsypex en 2010. Elle contient  $L = 160$  bandes,  $702 \times 1401$  pixels et 12 éléments physiques selon [14]. La table 1 (quatrième colonne) montre que EGA estime un nombre de 12 éléments qui est en adéquation avec la vérité terrain. Ces

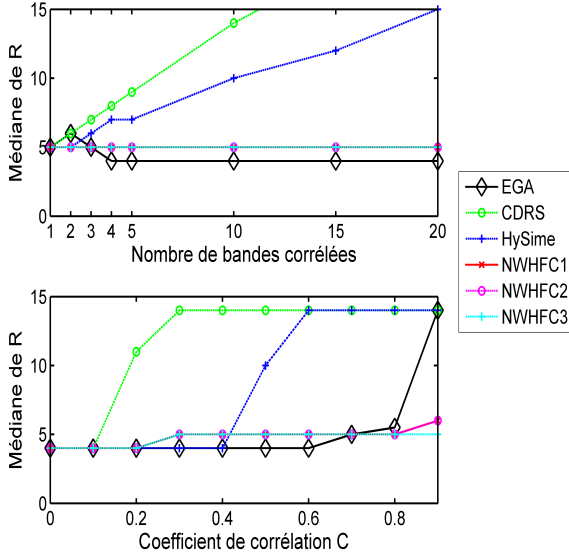


FIGURE 2 – Estimations de  $R$  en fonction (haut) du nombre des bandes corrélées, (bas) et du coefficient de corrélation  $C$  (la valeur de référence est  $R = 4$ ).

résultats montrent la précision de la méthode proposée lorsqu'elle est appliquée à des données réelles, acquises par différents capteurs (AVIRIS et Hypspx) et contenant différents éléments physiques (arbres, herbe et minéraux).

TABLE 1 – Les estimations de  $R$  pour des images réelles.

| Method             | Indian Pines | Cuprite | Madonna |
|--------------------|--------------|---------|---------|
| EGA                | 18           | 26      | 12      |
| CDRS               | 18           | 31      | 17      |
| HySime             | 14           | 20      | 9       |
| NWHFC <sub>1</sub> | 18           | 22      | 16      |
| NWHFC <sub>2</sub> | 18           | 21      | 14      |
| NWHFC <sub>3</sub> | 18           | 19      | 14      |

## 6 Conclusions

Cet article propose un nouvel algorithme automatique pour l'estimation du nombre des spectres purs dans les images hyperspectrales. Cet algorithme est composé de deux étapes qui sont l'estimation de la matrice de covariance du bruit et la détermination du nombre de spectres purs. La matrice de covariance du bruit a été estimée en utilisant une approche par régressions multiples. La deuxième étape a été effectuée par seuillage de la différence entre les valeurs propres successives de la matrice de covariance des observations blanchies. L'algorithme résultant est non-paramétrique (il ne nécessite aucun paramètre déterminé par l'utilisateur) et efficace en présence d'un bruit blanc ou coloré. Les résultats sur données synthétiques et réelles ont confirmé la pertinence de l'algorithme proposé après comparaison avec plusieurs méthodes de l'état de l'art.

Nos travaux futurs s'intéresseront à évaluer le gain potentiel de performance obtenu avec cette méthode lorsqu'on utilise des estimateurs robustes de la matrice de covariance des données.

## Références

- [1] J. M. Bioucas-Dias and J. M. P. Nascimento, "Hyperspectral subspace identification," *IEEE Trans. Geosci. Remote Sens.*, vol. 46, no. 8, pp. 2435–2445, Aug. 2008.
- [2] C. Chang and Q. Du, "Estimation of number of spectrally distinct signal sources in hyperspectral imagery," *IEEE Trans. Geosci. Remote Sens.*, vol. 42, no. 3, pp. 608–619, March 2004.
- [3] B. Luo, J. Chanussot, S. Doute, and L. Zhang, "Empirical automatic estimation of the number of endmembers in hyperspectral images," *IEEE Trans. Geosci. Remote Sens.*, vol. 10, no. 1, pp. 24–28, Jan 2013.
- [4] K. Cawse-Nicholson, A. B. Damelin, A. Robin, and M. Sears, "Determining the intrinsic dimension of a hyperspectral image using random matrix theory," *IEEE Trans. Image Process.*, vol. 22, pp. 1301–1310, 2013.
- [5] K. Cawse-Nicholson, A. Robin, and M. Sears, "The effect of spectrally correlated noise on noise estimation methods for hyperspectral images," in *Proc. IEEE GRSS WHISPERS*, Shanghai, China, June 2012, pp. 1–4.
- [6] D. Passemier and J. F. Yao, "On determining the number of spikes in a high-dimensional spiked population model," *Random Matrices : Theory and Applications*, vol. 1, p. 19, 2012.
- [7] J. Baik and J. W. Silverstein, "Eigenvalues of large sample covariance matrices of spiked population models," *J. Multivariate Anal.*, vol. 97, pp. 1382–1408, 2006.
- [8] A. Halimi, N. Doblegeon, and J.-Y. Tournet, "Unsupervised unmixing of hyperspectral images accounting for endmember variability," in *ArXiv e-prints*, Jun. 2014.
- [9] A. Green, M. Berman, P. Switzer, and M. Craig, "A transformation for ordering multispectral data in terms of image quality with implications for noise removal," *IEEE Trans. Geosci. Remote Sens.*, vol. 26, no. 1, pp. 65–74, Jan 1988.
- [10] P. Meer, J. Jolion, and A. Rosenfeld, "A fast parallel algorithm for blind estimation of noise variance," *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, vol. 12, no. 2, pp. 216–223, Feb 1990.
- [11] A. Halimi, P. Honeine, M. Kharouf, C. Richard, and J.-Y. Tournet, "Estimating the intrinsic dimension of hyperspectral images using an eigen-gap approach," in *ArXiv e-prints*, Jan. 2015.
- [12] K. Cawse, A. Robin, and M. Sears, "The effect of noise whitening on methods for determining the intrinsic dimension of a hyperspectral image," in *Proc. IEEE GRSS WHISPERS*, Lisbon, Portugal, June 2011, pp. 1–4.
- [13] G. Swayze, R. Clark, S. Sutley, and A. Gallagher, "Ground-truthing AVIRIS mineral mapping at Cuprite, Nevada," *Summaries 3 rd Annu. JPL Airborne Geosci. Workshop*, vol. 1, pp. 47–49, 1992.
- [14] D. Sheeren, M. Fauvel, S. Ladet, A. Jacquin, G. Bertoni, and A. Gibon, "Mapping ash tree colonization in an agricultural mountain landscape : Investigating the potential of hyperspectral imagery," in *Proc. IEEE Int. Conf. Geosci. Remote Sens. (IGARSS)*, July 2011, pp. 3672–3675.