

Des trois actions de la mécanique classique à la fonction d'onde en mécanique quantique

Michel Gondran¹, Abdel Kenoufi² and Alexandre Gondran³

¹ Académie Européenne Interdisciplinaire des Sciences, Paris, France

² Scientific Consulting for Research and Engineering (SCORE), Strasbourg, France

³ École Nationale de l'Aviation Civile, Toulouse, France



Action d'Euler-Lagrange: action fictive de $(x_0, t_0 = 0)$ à (x, t)

$$S_{cl}(x, t; x_0) = \min_{u(s), 0 \leq s \leq t} \left\{ \int_0^t L(x(s), u(s), s) ds \right\}$$

- Dépend de la position finale, donc de l'observateur
- ⇒ Action **épistémique**
- Vitesse initiale v_0 non définit

Action d'Hamilton-Jacobi: action ontologique $S_0(x)$ à $t_0 = 0$

$$S(x, t) = \min_{x_0; u(s), 0 \leq s \leq t} \left\{ S_0(x_0) + \int_0^t L(x(s), u(s), s) ds \right\}$$

- Dépend de la **condition initiale $S_0(x)$ (ontologique)**.
- Champ qui "pilote" la **particule classique**
- ⇒ Dualité action-particule: $v(x, t) = \frac{\nabla S(x, t)}{m}$

Action singulière d'une particule discernée: action nouvelle x_0 et v_0 à $t_0 = 0$

$$S(x, t; x_0, v_0) = m \frac{d\xi(t)}{dt} \cdot x + g(t)$$

où $\xi(t)$ est la trajectoire classique

Intégrale de chemins MinPlus

$$S(x, t) = \inf_{x_0} \{ S_0(x_0) + S_{cl}(x, t; x_0) \}$$

- Construit avec le **produit scalaire non linéaire Minplus**: $(f, g)_{min+} = \inf_{x \in X} \{ f(x) + g(x) \}$
- Analogue à l'**intégrale de chemins de Feynman**
- L'action d'E-L est la solution élémentaire de l'équation d'H-J dans l'analyse Minplus, avec $S_0(x) = \delta_{min+}(x - x_0) = 0$ si $x = x_0$, $+\infty$ sinon

Équations singulières d'H-J: densité et action de particules discernées

$$\frac{\partial S(x, t; x_0, v_0)}{\partial t} \Big|_{x=\xi(t)} + \frac{1}{2m} (\nabla S(x, t; x_0, v_0))^2 \Big|_{x=\xi(t)} + V(x) \Big|_{x=\xi(t)} = 0$$

$$\frac{d\xi(t)}{dt} = \frac{\nabla S(x, t; x_0, v_0)}{m} \Big|_{x=\xi(t)}$$

$$S(x, 0; x_0, v_0) = mv_0 x \quad \text{et} \quad \xi(0) = x_0$$

Équations statistiques d'H-J: densité et action de particules indiscernées

$$\frac{\partial S(x, t)}{\partial t} + \frac{1}{2m} (\nabla S(x, t))^2 + V(x) = 0$$

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} + \text{div} \left(\rho(x, t) \frac{\nabla S(x, t)}{m} \right) = 0$$

$$S(x, 0) = S_0(x) \quad \text{et} \quad \rho(x, 0) = \rho_0(x)$$

Réécriture des équations singulières d'H-J:

$$\frac{\partial S(x, t)}{\partial t} + \frac{1}{2m} (\nabla S(x, t))^2 + V(x) = 0$$

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} + \text{div} \left(\rho(x, t) \frac{\nabla S(x, t)}{m} \right) = 0$$

$$S(x, 0) = S_0(x) = mv_0 x \quad \text{et} \quad \rho(x, 0) = \rho_0(x) = \delta(x - x_0)$$

Deux convergences de l'équation de Schrödinger: $\Psi(x, t) = \sqrt{\rho^h(x, t)} \exp(i \frac{S^h(x, t)}{\hbar})$ Équations de Schrödinger / Madelung

$$\frac{\partial S^h(x, t)}{\partial t} + \frac{1}{2m} (\nabla S^h(x, t))^2 + V(x, t) - \frac{\hbar^2 \Delta \sqrt{\rho^h(x, t)}}{2m \sqrt{\rho^h(x, t)}} = 0$$

$$\frac{\partial \rho^h(x, t)}{\partial t} + \text{div}(\rho^h(x, t) \frac{\nabla S^h(x, t)}{m}) = 0$$

avec comme conditions initiales:

$$\rho^h(x, 0) = \rho_0^h(x) \quad \text{et} \quad S^h(x, 0) = S_0^h(x)$$

Les deux conditions de convergence selon la préparation à $t = 0$

Particule quantique **statistiquement préparée**

$$S_0^h(x, t) \xrightarrow{\hbar \rightarrow 0} S_0(x, t) \quad \text{une fonction régulière}$$

$$\rho_0^h(x, t) \xrightarrow{\hbar \rightarrow 0} \rho_0(x, t) \quad \text{une fonction régulière}$$

Particule quantique **préparée singulièrement**

$$S_0^h(x, t) \xrightarrow{\hbar \rightarrow 0} S_0(x) \quad \text{une fonction régulière}$$

$$\rho_0^h(x, t) \xrightarrow{\hbar \rightarrow 0} \delta(x - x_0) \quad \text{une distribution de Dirac}$$

Convergence vers les équations statistiques d'H-J

Theoreme - Pour des **particules quantiques statistiquement préparées**, $\rho^h(x, t)$ et $S^h(x, t)$, solutions des équations de Madelung,

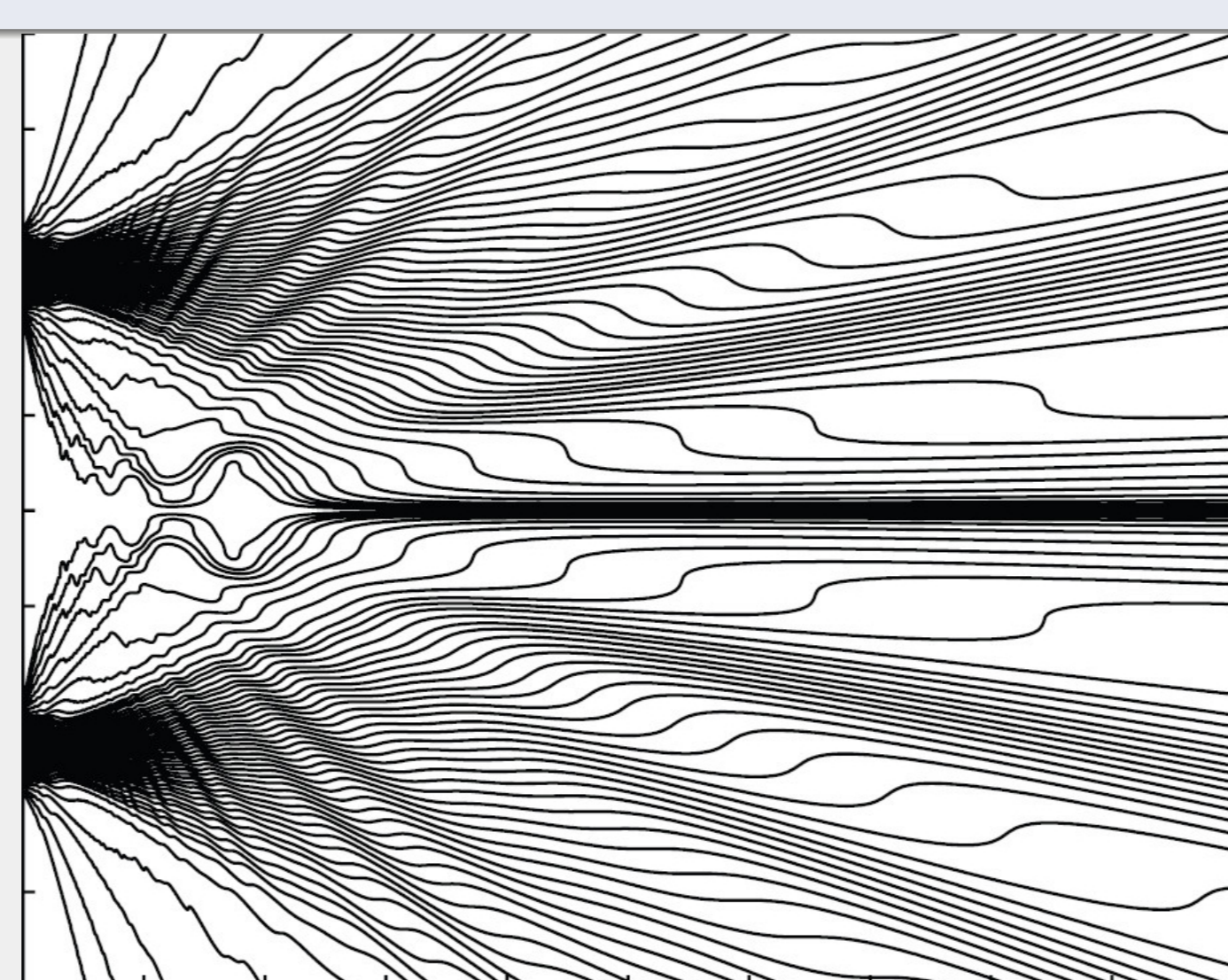
$$S^h(x, t) \xrightarrow{\hbar \rightarrow 0} S(x, t) \quad \text{action d'H-J}$$

$$\rho^h(x, t) \xrightarrow{\hbar \rightarrow 0} \rho(x, t) \quad \text{densité classique}$$

$S(x, t)$ et $\rho(x, t)$ solutions des équations statistiques d'H-J d'un **ensemble de particules classiques indiscernées**

Particules quantiques non liées et statistiquement préparées

- Beables ponctuels pilotés par l'action quantique (mq incomplet: ajout position)
- **Interprétation "faible" de Broglie-Bohm** compatible avec la règle de Born



La particule est pilotée par l'action quantique (phase de l'onde)
Exemple des interférences par fentes de Young

Convergence vers les équations singulières d'H-J

Theoreme - Pour l'état cohérent de l'oscillateur harmonique 2D

$$S^h(x, t) \xrightarrow{\hbar \rightarrow 0} S(x, t) = m \frac{d\xi(t)}{dt} \cdot x + g(t)$$

$$\rho^h(x, t) \xrightarrow{\hbar \rightarrow 0} \delta(x - \xi(t))$$

où $S(x, t)$ et les trajectoires $\xi(t)$ sont solutions des équations singulières d'H-J.

Particules quantiques liées et singulièrement préparées

- Beables solitons pilotés par l'action quantique (MQ complet: pas d'ajout)
- **Interprétation "faible" de Schrödinger** compatible avec Copenhague

Paquet d'ondes cohérent de l'atome d'hydrogène: atome Rydberg 4000 r_0
(Buchleitner et Delande, 1995)

