



HAL
open science

Des trois actions de la mécanique classique à la fonction d'onde en mécanique quantique

Michel Gondran, Alexandre Gondran, Abdel Kenoufi

► To cite this version:

Michel Gondran, Alexandre Gondran, Abdel Kenoufi. Des trois actions de la mécanique classique à la fonction d'onde en mécanique quantique. 21ème Rencontre du non-linéaire 2018, Mar 2018, Paris, France. hal-01961809

HAL Id: hal-01961809

<https://hal.science/hal-01961809>

Submitted on 20 Dec 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Des trois actions de la mécanique classique à la fonction d'onde en mécanique quantique

Michel Gondran¹, Alexandre Gondran² & Abdel Kenoufi³

¹ Académie Européenne Interdisciplinaire des Sciences, 75 005 Paris, France

² École Nationale de l'Aviation Civile, 31000 Toulouse, France

³ Scientific COnsulting for Research & Engineering (SCORE), Strasbourg, France

michel.gondran@polytechnique.org

Résumé. Nous montrons d'abord qu'il existe en mécanique classique trois actions différentes pour déterminer le chemin suivi par une particule. Ces trois actions correspondent à des conditions initiales différentes : deux actions bien connues, l'action classique d'Euler-Lagrange $S_{cl}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0)$, l'action d'Hamilton-Jacobi $S(\mathbf{x}, t)$ ayant comme action initiale $S_0(\mathbf{x})$, et une nouvelle action, l'action singulière $S(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0)$. Ces trois actions vérifient l'équation d'Hamilton-Jacobi, mais avec des conditions initiales différentes.

L'interprétation de ces actions permet de donner une réponse à deux grands problèmes de mécanique classique, la compréhension du principe de moindre action et le paradoxe de Gibbs, et de proposer une piste pour l'interprétation de la mécanique quantique.

Abstract. We first show that in classical mechanics there are three different actions to determine the path followed by a particle. These three actions correspond to different initial conditions : two well-known actions, the classic action of Euler-Lagrange $S_{cl}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0)$, action of Hamilton-Jacobi $S(\mathbf{x}, t)$ having as initial action $S_0(\mathbf{x})$, and a new action, the singular action $S(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0)$. These three actions verify the Hamilton-Jacobi equation, but with different initial conditions.

The interpretation of these actions makes it possible to give an answer to two major problems of classical mechanics, the understanding of the principle of least action and the Gibbs paradox, and to propose a track for the interpretation of quantum mechanics.

1 Introduction

Le débat si intense qui a lieu depuis plus de 80 ans sur l'interprétation de la fonction d'onde de la mécanique quantique a laissé dans l'ombre le débat sur l'interprétation de l'action et du principe de moindre action en mécanique classique. Ce *principe de moindre action* qui permet de déterminer les équations du mouvement des particules si on minimise sur les trajectoires embarrasse un grand nombre de scientifiques comme le rappelle Henri Poincaré, pourtant l'un de ses grands utilisateurs [1] : " *Il est clair qu'il vaudrait mieux le remplacer par un énoncé moins choquant, et où, comme diraient les philosophes, les causes finales ne sembleraient pas se substituer aux causes efficientes.*"

Nous allons voir que les difficultés d'interprétation de l'action proviennent du fait qu'il existe en réalité trois actions correspondant à des conditions aux limites différentes : l'action classique (ou d'Euler-Lagrange) $S_{cl}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0)$, l'action d'Hamilton-Jacobi $S(\mathbf{x}, t)$ avec son action initiale $S_0(\mathbf{x})$, et une nouvelle action que nous avons introduit, l'action singulière $S(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0)$. Ces trois actions vérifient l'équation d'Hamilton-Jacobi avec des conditions initiales différentes et auront donc des interprétations différentes. Elles vont nous permettre de répondre à l'embarras de Poincaré sur le principe de moindre action et d'expliquer le paradoxe de Gibbs sur la discernabilité des particules identiques.

Au paragraphe 2, nous étudions la différence entre l'action d'H-J et l'action d'E-L. Mathématiquement, elles sont reliées par l'intégrale de chemins Minplus (équation (8)) qui correspond à une intégrale dans l'analyse Minplus, analyse qui permet d'étudier l'équation d'Hamilton-Jacobi par des approches linéaires, cf. Maslov [2] et Gondran [3]. Le principe est de remplacer le produit scalaire habituel $\int_X f(x)g(x)dx$ par le produit scalaire Minplus : $(f, g) = \inf_{x \in X} \{f(x) + g(x)\}$. Dans cette analyse Minplus l'analogue de la distribution de Dirac $\delta(\mathbf{x})$ est la distribution non linéaire $\delta_{\min+}(\mathbf{x}) = \{0 \text{ si } \mathbf{x} = \mathbf{0}, +\infty \text{ sinon}\}$.

Physiquement, on montre que l'on peut considérer l'action d'Euler-Lagrange comme une action épistémique et l'action d'Hamilton-Jacobi comme une action ontologique.

Au paragraphe 3, nous verrons comment la différence entre l'action d'H-J et l'action singulière permet de résoudre le paradoxe de Gibbs en remettant en cause le postulat habituel sur la discernabilité des particules classiques comme de très nombreux auteurs l'ont demandé : les particules indiscernées vérifient les équations d'Hamilton-Jacobi statistiques et les particules discernées vérifient les équations singulières d'Hamilton-Jacobi.

Enfin au paragraphe 4, nous montrons qu'il existe deux types de limite de l'équation de Schrödinger, quand on fait tendre la constante de Planck vers 0.

2 Les actions d'Euler-Lagrange et d'Hamilton-Jacobi

Considérons l'évolution d'un système évoluant de la position $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$ à l'instant initial vers la position $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ à l'instant t et soit $\mathbf{u}(s)$ sa vitesse pour $s \in [0, t]$. Si $L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)$ est le lagrangien du système, l'action d'Euler-Lagrange $S_{cl}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0)$ est la fonction définie par :

$$S_{cl}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0) = \min_{\mathbf{u}(s), 0 \leq s \leq t} \left\{ \int_0^t L(\mathbf{x}(s), \mathbf{u}(s), s) ds \right\} \quad (1)$$

où le minimum est pris sur les vitesses $\mathbf{u}(s)$, $s \in [0, t]$. La solution $(\tilde{\mathbf{u}}(s), \tilde{\mathbf{x}}(s))$ de (1) vérifie l'équation d'Euler-Lagrange :

$$\frac{d}{ds} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}}(\mathbf{x}(s), \dot{\mathbf{x}}(s), s) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}(s), \dot{\mathbf{x}}(s), s) = 0 \quad \text{pour } s \in [0, t] \quad (2)$$

avec les conditions aux limites :

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \text{ et } \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}. \quad (3)$$

Pour une particule non relativiste avec le lagrangien $L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}^2 + \mathbf{K} \cdot \mathbf{x}$, l'équation (2) donne $\frac{d}{ds}(m\dot{\mathbf{x}}(s)) - \mathbf{K} = 0$. Nous obtenons successivement $\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(s) = \mathbf{v}_0 + \frac{\mathbf{K}}{m}s$, $\tilde{\mathbf{x}}(s) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{v}_0 s + \frac{\mathbf{K}}{2m}s^2$. La vitesse initiale \mathbf{v}_0 est obtenue en faisant $\tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}$ dans la dernière équation, soit $\tilde{\mathbf{v}}_0 = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{t} - \frac{\mathbf{K}t}{2m}$. La définition de l'équation (1) semble montrer que, parmi les trajectoires qui arrivent à (\mathbf{x}, t) à partir de la position initiale \mathbf{x}_0 , le principe de moindre action permet de choisir la vitesse à chaque instant. En réalité, le principe de moindre action utilisé dans l'équation (1) ne choisit pas la vitesse à chaque instant s entre 0 et t , mais seulement quand la particule arrive en \mathbf{x} à l'instant t . La connaissance de la vitesse requiert la résolution des équations d'Euler-Lagrange (2) and (3) sur la trajectoire entière. Ainsi dans l'exemple précédent, la connaissance de la vitesse initiale $\tilde{\mathbf{v}}_0 = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{t} - \frac{\mathbf{K}t}{2m}$ dépend de la position finale \mathbf{x} et de l'instant final t . Cette dépendance des "causes finales" est générale. C'est la critique de Poincaré sur le principe de moindre action. Nous devons donc conclure que, sans connaissance de la vitesse initiale, l'action d'Euler-Lagrange répond à un problème posé par un observateur : " *Quel doit être la vitesse de la particule à l'instant initial pour atteindre \mathbf{x} au temps t ?*" La résolution de ce problème implique que l'observateur résolve l'équation d'Euler-Lagrange (2) après l'observation de \mathbf{x} au temps t . C'est un point de vue *a posteriori*. L'action d'Hamilton-Jacobi résout ce manque de connaissance sur la vitesse initiale ; En effet, à l'instant initial, l'action d'Hamilton-Jacobi $S_0(\mathbf{x})$ est connue. Elle entraîne la connaissance du champ de vitesses à l'instant initial $\mathbf{v}_0(\mathbf{x}) = \frac{\nabla S_0(\mathbf{x})}{m}$. L'action d'Hamilton-Jacobi $S(\mathbf{x}, t)$ est la fonction définie par :

$$S(\mathbf{x}, t) = \min_{\mathbf{x}_0; \mathbf{u}(s), 0 \leq s \leq t} \left\{ S_0(\mathbf{x}_0) + \int_0^t L(\mathbf{x}(s), \mathbf{u}(s), s) ds \right\} \quad (4)$$

où le minimum est pris sur toutes les positions initiales \mathbf{x}_0 et sur les vitesses $\mathbf{u}(s)$, $s \in [0, t]$. Pour une particule non relativiste dans un champ de potentiel $V(\mathbf{x})$, on a le théorème classique [5] :

THEOREM 1 - l'action d'Hamilton-Jacobi $S(\mathbf{x}, t)$ est solution des équations d'Hamilton-Jacobi :

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}(\nabla S)^2 + V(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \quad (5)$$

$$S(\mathbf{x}, 0) = S_0(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \quad (6)$$

et la vitesse d'une particule classique non relativiste est donnée en chaque point (\mathbf{x}, t) par :

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \frac{\nabla S(\mathbf{x}, t)}{m} \quad (7)$$

Comme le terme $S_0(\mathbf{x}_0)$ n'intervient pas dans (4) pour la minimisation sur $\mathbf{u}(s)$, on en déduit que l'action d'Hamilton-Jacobi peut s'écrire à partir de l'action d'Euler-Lagrange par l'intégrale de chemins Minplus :

$$S(\mathbf{x}, t) = \min_{x_0} (S_0(\mathbf{x}_0) + S_{cl}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0)). \quad (8)$$

Cette équation est une généralisation de la formule de Hopf-Lax[5], $S(\mathbf{x}, t) = \min_{x_0} (S_0(\mathbf{x}_0) + m \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^2}{2t})$ qui correspond à une particule libre. C'est aussi l'analogie de l'intégrale des chemins de Feynman en mécanique quantique.

L'équation (7) montre que la solution $S(\mathbf{x}, t)$ des équations d'Hamilton-Jacobi permet de définir le champ de vitesse en tout point (\mathbf{x}, t) à partir du champ de vitesse $\frac{\nabla S_0(\mathbf{x})}{m}$ à l'instant initial. L'action d'Hamilton-Jacobi $S(\mathbf{x}, t)$ est donc un champ qui "pilote" le mouvement de la particule. C'est une dualité action-particule. L'action d'Hamilton-Jacobi répond à la question : "Si on connaît l'action (ou le champ de vitesse) à l'instant initial, peut-on déterminer l'action (ou le champ de vitesse) à chaque instant ultérieur?". C'est un point de vue *a priori*. Il peut être considéré comme le problème résolu par la Nature avec le principe de moindre action.

Mathématiquement, on notera que l'action d'Euler-Lagrange, $S_{cl}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0)$, est la solution élémentaire de l'équation d'Hamilton-Jacobi (5)(6) avec comme action initiale la distribution MINPLUS $S_0(\mathbf{x}) = \delta_{\min+}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \{0 \text{ si } \mathbf{x} = \mathbf{x}_0, +\infty \text{ sinon}\}$.

3 Equations statistiques et singulières d'Hamilton-Jacobi

Considérons un faisceau de particules classiques identiques. Pour une particule de ce faisceau, on ne connaît à l'instant initial ni sa position exacte, ni sa vitesse exacte, mais seulement les caractéristiques décrivant le faisceau, c'est-à-dire une densité de probabilité initiale $\rho_0(\mathbf{x})$ et un champ de vitesse initial $\mathbf{v}_0(\mathbf{x})$. On est alors conduit à la définition suivante : *Nous appelons **particules indiscernées** une famille de particules classiques préparées de la même manière dont on ne connaît à l'instant initial que la densité de probabilité initiale $\rho_0(\mathbf{x})$ et l'action initiale $S_0(\mathbf{x})$, c'est-à-dire le champ de vitesse initial $\frac{\nabla S_0(\mathbf{x})}{m}$.* La densité de probabilité $\rho(\mathbf{x}, t)$ et l'action $S(\mathbf{x}, t)$ à l'instant t d'une particule indiscernée est alors donnée par le théorème suivant :

THEOREM 2 - La densité $\rho(\mathbf{x}, t)$ et l'action $S(\mathbf{x}, t)$ de particules classiques indiscernées, soumises à un potentiel $V(\mathbf{x})$, vérifient **les équations statistiques d'Hamilton-Jacobi** :

$$\frac{\partial S(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \frac{1}{2m}(\nabla S(\mathbf{x}, t))^2 + V(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+ \quad (9)$$

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \text{div} \left(\rho(\mathbf{x}, t) \frac{\nabla S(\mathbf{x}, t)}{m} \right) = 0 \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+ \quad (10)$$

$$S(\mathbf{x}, 0) = S_0(\mathbf{x}) \quad \text{et} \quad \rho(\mathbf{x}, 0) = \rho_0(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3. \quad (11)$$

Nous avons appelé ces particules indiscernées, et non indiscernables, car si on connaissait leurs positions initiales, on connaîtrait aussi leurs trajectoires. Cependant elles auront dans les dénombrements les mêmes propriétés que l'on accorde habituellement aux particules indiscernables. Le paradoxe de Gibbs n'en est plus un car il s'applique à N particules classiques indiscernées dont les différentes permutations correspondent à une seule configuration, ce qui donne la bonne valeur de l'entropie.

Nous dirons qu'une particule classique est discernée à l'instant initial, si on connaît, à cet instant, sa position \mathbf{x}_0 et sa vitesse \mathbf{v}_0 .

THEOREM 3 - *Si $\xi(t)$ est la trajectoire classique dans le champ $V(\mathbf{x})$ d'une particule de position initiale \mathbf{x}_0 et de vitesse initiale \mathbf{v}_0 , alors il existe une fonction*

$$S(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0) = m \frac{d\xi(t)}{dt} \cdot \mathbf{x} + g(t) \quad (12)$$

où $g(t) = - \int_0^t \frac{1}{2} m \left(\frac{d\xi(s)}{ds} \right)^2 + V(\xi(s)) + m \frac{d^2\xi(s)}{ds^2} \cdot \xi(s) ds$, que nous appellerons l'action singulière, et qui est solution des équations singulières d'Hamilton-Jacobi :

$$\frac{\partial S(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0)}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}=\xi(t)} + \frac{1}{2m} (\nabla S(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0))^2 \Big|_{\mathbf{x}=\xi(t)} + V(\mathbf{x}) \Big|_{\mathbf{x}=\xi(t)} = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \quad (13)$$

$$\frac{d\xi(t)}{dt} = \frac{\nabla S(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0)}{m} \Big|_{\mathbf{x}=\xi(t)} \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \quad (14)$$

$$S(\mathbf{x}, 0; \mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0) = m \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{x} \quad \text{et} \quad \xi(0) = \mathbf{x}_0. \quad (15)$$

L'action singulière vérifie les équations singulières d'Hamilton-Jacobi seulement le long de la trajectoire $\xi(t)$. On peut considérer ces équations singulières d'Hamilton-Jacobi comme la recherche du couple (action d'Hamilton-Jacobi $S(\mathbf{x}, t)$, densité $\rho(\mathbf{x}, t)$) vérifiant les équations statistiques d'Hamilton-Jacobi avec les conditions initiales $S_0(\mathbf{x}) = m \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{x}$ et $\rho_0(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ où $\delta(\mathbf{x})$ est la distribution de Dirac.

4 Les deux convergences de l'équation de Schrödinger

Considérons la fonction d'onde $\Psi(\mathbf{x}, t)$ vérifiant l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = - \frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + V(\mathbf{x}, t) \Psi \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+ \quad (16)$$

avec comme conditions initiales $\Psi(\mathbf{x}, 0) = \Psi_0(\mathbf{x})$.

Dans le changement de variable $\Psi(\mathbf{x}, t) = \sqrt{\rho^{\hbar}(\mathbf{x}, t)} \exp(i \frac{S^{\hbar}(\mathbf{x}, t)}{\hbar})$, la densité $\rho^{\hbar}(\mathbf{x}, t)$ et l'action $S^{\hbar}(\mathbf{x}, t)$ sont des fonctions qui dépendent à priori de \hbar . L'équation de Schrödinger se décompose en donnant les équations de Madelung (1926) qui correspondent aux deux équations couplées :

$$\frac{\partial S^{\hbar}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \frac{1}{2m} (\nabla S^{\hbar}(\mathbf{x}, t))^2 + V(\mathbf{x}, t) - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Delta \sqrt{\rho^{\hbar}(\mathbf{x}, t)}}{\sqrt{\rho^{\hbar}(\mathbf{x}, t)}} = 0 \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+ \quad (17)$$

$$\frac{\partial \rho^{\hbar}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \text{div}(\rho^{\hbar}(\mathbf{x}, t) \frac{\nabla S^{\hbar}(\mathbf{x}, t)}{m}) = 0 \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+ \quad (18)$$

avec comme conditions initiales :

$$\rho^{\hbar}(\mathbf{x}, 0) = \rho_0^{\hbar}(\mathbf{x}) \quad \text{et} \quad S^{\hbar}(\mathbf{x}, 0) = S_0^{\hbar}(\mathbf{x}). \quad (19)$$

Une particule quantique est dite **statistiquement préparée** si sa densité de probabilité initiale $\rho_0^{\hbar}(\mathbf{x})$ et son action initiale $S_0^{\hbar}(\mathbf{x})$ convergent, quand $\hbar \rightarrow 0$, vers des fonctions régulières $\rho_0(\mathbf{x})$ et $S_0(\mathbf{x})$. Le cas des particules statistiquement préparées correspond par exemple à un ensemble de particules sans interaction entre elles et préparées de la même façon : jets de particules dans une expérience de fentes de Young ou de Stern et Gerlach.

THEOREM 4 [4] *Pour des particules quantiques statistiquement préparées, la densité de probabilité $\rho^{\hbar}(\mathbf{x}, t)$ et l'action $S^{\hbar}(\mathbf{x}, t)$, solutions des équations de Madelung (17)(18)(19), convergent, quand $\hbar \rightarrow 0$, vers la densité classique $\rho(\mathbf{x}, t)$ et l'action classique $S(\mathbf{x}, t)$, solutions des équations statistiques d'Hamilton-Jacobi.*

Notre particule quantique statistiquement préparée, qui vérifiait l'équation de Schrödinger, va, lorsque l'on fait tendre \hbar vers 0, vérifier les équations statistiques d'Hamilton-Jacobi d'un ensemble de particules classiques indiscernées.

Nous dirons qu'une particule quantique est **préparée de manière singulière** si sa densité de probabilité initiale $\rho_0^{\hbar}(\mathbf{x})$ et son action initiale $S_0^{\hbar}(\mathbf{x})$ convergent, quand $\hbar \rightarrow 0$, respectivement vers une distribution de Dirac $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ et une fonction régulière $S_0(\mathbf{x})$. Cette situation correspond en particulier aux états cohérents, introduits en 1926 par Schrödinger [6]. L'étude de la convergence des équations de Madelung pour des particules quantiques préparées de manière singulière est mathématiquement très difficile. Nous étudierons seulement l'exemple d'un état cohérent où un calcul explicite est possible. Pour l'oscillateur harmonique à deux dimensions, $V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}m\omega^2\mathbf{x}^2$, les états cohérents sont construits à partir de la fonction d'onde initiale $\Psi_0(\mathbf{x})$, qui correspond à la densité et à l'action initiale

$$\rho_0^{\hbar}(\mathbf{x}) = (2\pi\sigma_{\hbar}^2)^{-1} e^{-\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)^2}{2\sigma_{\hbar}^2}} \quad \text{et} \quad S_0^{\hbar}(\mathbf{x}) = m\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{x} \quad (20)$$

avec $\sigma_{\hbar} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}$. Nous vérifions que, quand $\hbar \rightarrow 0$, $\rho_0^{\hbar}(\mathbf{x})$ converge vers la distribution de Dirac $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ et que $S_0(\mathbf{x}) = S_0^{\hbar}(\mathbf{x})$ est une fonction régulière. Avec ces conditions initiales, la densité $\rho^{\hbar}(\mathbf{x}, t)$ et l'action $S^{\hbar}(\mathbf{x}, t)$, solutions des équations de Madelung (17)(18)(19), sont égales à $\rho^{\hbar}(\mathbf{x}, t) = (2\pi\sigma_{\hbar}^2)^{-1} e^{-\frac{(\mathbf{x}-\xi(t))^2}{2\sigma_{\hbar}^2}}$ et $S^{\hbar}(\mathbf{x}, t) = +m\frac{d\xi(t)}{dt} \cdot \mathbf{x} + g(t) - \hbar\omega t$ où $\xi(t)$ est la trajectoire d'une particule classique soumise dans le potentiel $V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}m\omega^2\mathbf{x}^2$, avec \mathbf{x}_0 and \mathbf{v}_0 comme position et vitesse initiale et $g(t) = \int_0^t (-\frac{1}{2}m(\frac{d\xi(s)}{ds})^2 + \frac{1}{2}m\omega^2\xi(s)^2) ds$.

THEOREM 5 [4]- *Pour l'oscillateur harmonique avec les conditions initiales (20), quand $\hbar \rightarrow 0$, la densité $\rho^{\hbar}(\mathbf{x}, t)$ et l'action $S^{\hbar}(\mathbf{x}, t)$ convergent vers $\rho(\mathbf{x}, t) = \delta(\mathbf{x} - \xi(t))$ et $S(\mathbf{x}, t) = m\frac{d\xi(t)}{dt} \cdot \mathbf{x} + g(t)$ où $S(\mathbf{x}, t)$ et les trajectoires $\xi(t)$ sont solutions des équations singulières d'Hamilton-Jacobi.*

5 Conclusion

La distinction en mécanique classique des actions d'Hamilton-Jacobi et d'Euler-Lagrange, fondée sur l'intégrale de chemin Minplus, nous a permis de mieux comprendre le principe de moindre action : l'action d'Euler-Lagrange répond à un problème posé par un observateur et serait donc épistémique, l'action d'Hamilton-Jacobi correspond à un problème résolu par la Nature à partir du principe de moindre action et serait donc ontologique.

De plus, l'introduction en mécanique classique du concept de particules indiscernées vérifiant les équations statistiques d'Hamilton-Jacobi permet de donner une réponse simple au paradoxe de Gibbs de la mécanique statistique classique.

Enfin l'étude de la convergence des équations de Madelung quand \hbar tend vers 0 nous conduit à considérer deux préparations des particules quantiques :

1) Les particules quantiques statistiquement préparées convergent vers des particules classiques indiscernées et peuvent être considérées comme des particules quantiques indiscernées. Pour elles, l'interprétation de l'onde pilote de Broglie-Bohm s'impose et tout se passe comme si la phase de la fonction d'onde "pilotait" la particule.

2) Les particules quantiques préparées de manière singulière convergent vers des particules classiques discernées et peuvent être considérées comme des particules quantiques discernées. Pour elles, l'interprétation la plus naturelle est l'interprétation de Schrödinger où la fonction d'onde représente une particule étendue.

Références

1. Poincaré, H. : *La Science et l'Hypothèse*. Flammarion, (1902).
2. V.P. Maslov, *Analyse Idempotente*, édition Mir (1989).
3. M. Gondran, "Analyse MinPlus" C. R. Acad. Sci. Paris **323**, 371-375 (1996).
4. Gondran, M., Gondran, A. : A synthetic interpretation : the double-preparation theory. Phys. Scr. T163 014029 (2014).
5. Evans, L. C. : *Partial Differential Equations*, p.123-124. Graduate Studies in Mathematics 19, American Mathematical Society (1998).
6. Schrödinger, E. : Der stetige bergang von der Mikro-zur Makromechanik. Naturwissenschaften 14, 664-666 (1926).