

Des trois actions de la mécanique classique à la fonction d'onde en mécanique quantique

par Michel Gondran, Alexandre Gondran et Abdel Kenoufi

Action d'Euler-Lagrange: de $(\mathbf{x}_0, t_0 = 0)$ à (\mathbf{x}, t)

$$S_{cl}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0) = \min_{\mathbf{u}(s), 0 \leq s \leq t} \left\{ \int_0^t L(\mathbf{x}(s), \mathbf{u}(s), s) ds \right\} \quad (1)$$

Action dépendant de la position finale, donc de l'observateur (**épigistémique**). Manque \mathbf{v}_0 .

Intégrale de chemins MinPlus

$$S(\mathbf{x}, t) = \inf_{\mathbf{x}_0} \{S_0(\mathbf{x}_0) + S_{cl}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0)\} \quad (2)$$

construit avec le **produit scalaire non linéaire**

Minplus : $(f, g)_{\min+} = \inf_{x \in X} \{f(x) + g(x)\}$

analogue à l'**intégrale de chemins de Feynman**

L'action d'E-L est la solution élémentaire de l'équation d'H-J dans l'analyse Minplus, avec

$S_0(\mathbf{x}) = \delta_{\min+}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 0$ si $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$, $+\infty$ sinon.

Action d'Hamilton-Jacobi: $S_0(x)$ à $t_0 = 0$

$$S(\mathbf{x}, t) = \min_{\mathbf{x}_0; \mathbf{u}(s), 0 \leq s \leq t} \left\{ S_0(\mathbf{x}_0) + \int_0^t L(\mathbf{x}(s), \mathbf{u}(s), s) ds \right\}$$

Action dépend de la **condition initiale** $S_0(\mathbf{x})$ (**ontologique**). C'est un champ qui "**pilote**" la **particule classique** (dualité action-particule):

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \frac{\nabla S(\mathbf{x}, t)}{m}$$

Equations statistiques d'H-J: densité et action de particules indiscernées

$$\frac{\partial S(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \frac{1}{2m} (\nabla S(\mathbf{x}, t))^2 + V(\mathbf{x}) = 0$$

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \operatorname{div} \left(\rho(\mathbf{x}, t) \frac{\nabla S(\mathbf{x}, t)}{m} \right) = 0$$

$$S(\mathbf{x}, 0) = S_0(\mathbf{x}) \quad \text{et} \quad \rho(\mathbf{x}, 0) = \rho_0(\mathbf{x})$$

Action singulière d'une particule
discernée: \mathbf{x}_0 et \mathbf{v}_0 à $t_0 = 0$

$$S(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0) = m \frac{d\xi(t)}{dt} \cdot \mathbf{x} + g(t) \quad (3)$$

où $\xi(t)$ la trajectoire classique

Equations singulières d'H-J: densité et
action de particules discernées

$$\begin{aligned} \frac{\partial S(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0)}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}=\xi(t)} + \\ \frac{1}{2m} (\nabla S(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0))^2 \Big|_{\mathbf{x}=\xi(t)} + V(\mathbf{x}) \Big|_{\mathbf{x}=\xi(t)} = 0 \\ \frac{d\xi(t)}{dt} = \frac{\nabla S(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0)}{m} \Big|_{\mathbf{x}=\xi(t)} \\ S(\mathbf{x}, 0; \mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0) = m\mathbf{v}_0\mathbf{x} \quad \text{et} \quad \xi(0) = \mathbf{x}_0 \end{aligned}$$

Les deux convergences de l'équation de Schrödinger

$$(\Psi(\mathbf{x}, t) = \sqrt{\rho^{\hbar}(\mathbf{x}, t)} \exp(i \frac{S^{\hbar}(\mathbf{x}, t)}{\hbar}))$$

Equations Schrödinger/ Madelung

$$\frac{\partial S^{\hbar}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \frac{1}{2m} (\nabla S^{\hbar}(\mathbf{x}, t))^2 + V(\mathbf{x}, t) - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Delta \sqrt{\rho^{\hbar}(\mathbf{x}, t)}}{\sqrt{\rho^{\hbar}(\mathbf{x}, t)}} = 0$$
$$\frac{\partial \rho^{\hbar}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho^{\hbar}(\mathbf{x}, t) \frac{\nabla S^{\hbar}(\mathbf{x}, t)}{m}) = 0$$

avec comme conditions initiales $\rho^{\hbar}(\mathbf{x}, 0) = \rho_0^{\hbar}(\mathbf{x})$ et $S^{\hbar}(\mathbf{x}, 0) = S_0^{\hbar}(\mathbf{x})$.

Convergence vers les équations statistiques d'H-J

Theoreme - Pour des **particules quantiques statistiquement préparées**, $\rho^{\hbar}(\mathbf{x}, t)$ et $S^{\hbar}(\mathbf{x}, t)$, solutions des équations de Madelung, convergent, quand $\hbar \rightarrow 0$, vers la densité classique $\rho(\mathbf{x}, t)$ et l'action classique $S(\mathbf{x}, t)$, solutions des équations statistiques d'Hamilton-Jacobi d'**un ensemble de particules classiques indiscernées**.

Les deux conditions de convergence

Une particule quantique est **statistiquement préparée** si $\rho_0^{\hbar}(\mathbf{x})$ et $S_0^{\hbar}(\mathbf{x})$ convergent, quand $\hbar \rightarrow 0$, vers des fonctions régulières $\rho_0(\mathbf{x})$ et $S_0(\mathbf{x})$.

Une particule quantique est **préparée singulièrement** si $\rho_0^{\hbar}(\mathbf{x})$ et $S_0^{\hbar}(\mathbf{x})$ convergent, quand $\hbar \rightarrow 0$, respectivement vers une distribution de Dirac $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ et une fonction régulière $S_0(\mathbf{x})$. Exemple: états cohérents.

Convergence vers les équations singulières d'H-J

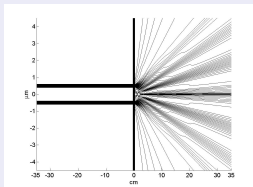
Theoreme- Pour l'état cohérent de l'oscillateur harmonique 2D, quand $\hbar \rightarrow 0$, la densité $\rho^{\hbar}(\mathbf{x}, t)$ et l'action $S^{\hbar}(\mathbf{x}, t)$ convergent vers $\rho(\mathbf{x}, t) = \delta(\mathbf{x} - \xi(t))$ et $S(\mathbf{x}, t) = m \frac{d\xi(t)}{dt} \cdot \mathbf{x} + g(t)$ où $S(\mathbf{x}, t)$ et les trajectoires $\xi(t)$ sont solutions des équations singulières d'Hamilton-Jacobi.

Particules quantiques non liées statistiquement préparées

Beables ponctuels pilotés par l'action quantique (mq incomplet:ajout position)

Interprétation "faible" de Broglie-Bohm
compatible avec la règle de Born

La particule est pilotée par l'action quantique (phase de l'onde)

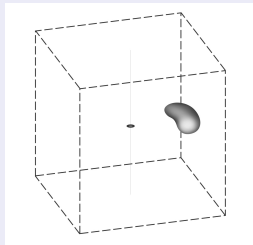


Particules quantiques liées singulièrement préparées

Beables solitons pilotés par l'action quantique (mq complet: pas d'ajout)

Interprétation "faible" de Schrödinger
compatible avec Copenhague

paquet d'ondes cohérent de l'atome d'hydrogène: atome Rydberg $4000r_0$



Buchleitner et Delande, 1995

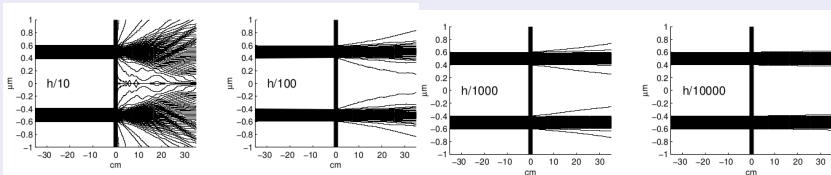
Mécanique quantique (intégrale de chemin de Feynman)

$$\Psi(\mathbf{x}, t) = \int F(t, \hbar) \exp\left(\frac{i}{\hbar} S_{cl}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0)\right) \Psi_0(\mathbf{x}_0) d\mathbf{x}_0 \quad (4)$$

Mécanique classique (intégrale de chemin MinPlus)

$$S(\mathbf{x}, t) = \inf_{\mathbf{x}_0} \{S_0(\mathbf{x}_0) + S_{cl}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0)\} \quad (5)$$

Convergence de l'action quantique vers l'action classique d'Hamilton-Jacobi





M. Gondran, "Analyse MinPlus" C. R. Acad. Sci. Paris **323**, 371-375 (1996).



M. Gondran et M. Minoux, *Graphes, dioïdes et semi-anneaux*, Lavoisier (2004); *Graphs, Dioïds and Semi-rings: New models and Algorithms*, Springer, Operations Research/Computer Science Interfaces (2008).



Buchleitner, A., Delande, D.: Non-dispersive electronic wave packets in multiphoton processus. Phys. Rev. Lett. **75**, 1487 (1995)



Gondran, M., Gondran, A.: Discerned and non-discerned particles in classical mechanics and convergence of quantum mechanics to classical mechanics. Annales de la Fondation Louis de Broglie, **36**, 117-135 (2011).



Gondran, M., Gondran, A.: The two limits of the Schrödinger equation in the semi-classical approximation : discerned and non-discerned particles in classical mechanics. Foundations of Probability and Physics-6, AIP Conf. Proc. **1424**, 111-115 (2012).



Gondran, M., Gondran, A.: "A synthetic interpretation: the double-preparation theory". Phys. Scr. **T163** (2014) 014029.