



**HAL**  
open science

## Écoulements de convection forcée en régimes dynamique et thermique non établis dans un espace annulaire

Omar Terhmina, Abdelkader Mojtabi

### ► To cite this version:

Omar Terhmina, Abdelkader Mojtabi. Écoulements de convection forcée en régimes dynamique et thermique non établis dans un espace annulaire. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 1988, 31 (3), pp.583-590. 10.1016/0017-9310(88)90040-3. hal-01958629

**HAL Id: hal-01958629**

**<https://hal.science/hal-01958629>**

Submitted on 18 Dec 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## Open Archive Toulouse Archive Ouverte

OATAO is an open access repository that collects the work of Toulouse researchers and makes it freely available over the web where possible

This is an author's version published in: <http://oatao.univ-toulouse.fr/20680>

**Official URL:**

[https://doi.org/10.1016/0017-9310\(88\)90040-3](https://doi.org/10.1016/0017-9310(88)90040-3)

**To cite this version:**

Terhmina, Omar and Mojtabi, Abdelkader Ecoulements de convection forcée en régimes dynamique et thermique non établis dans un espace annulaire. (1988) International Journal of Heat and Mass Transfer, 31 (3). 583-590. ISSN 0017-9310

Any correspondence concerning this service should be sent to the repository administrator: [tech-oatao@listes-diff.inp-toulouse.fr](mailto:tech-oatao@listes-diff.inp-toulouse.fr)

# Ecoulements de convection forcée en régimes dynamique et thermique non établis dans un espace annulaire

O. TERHMINA et A. MOJTABI

Ecole Mohammadia d'Ingenieurs, Avenue Ibn Sina, Agdal, Rabat, Maroc

**Résumé**—Ce travail a pour objet l'étude de l'écoulement laminaire de convection forcée en régimes dynamique et thermique non établis dans la région d'entrée d'un espace annulaire compris entre deux cylindres coaxiaux et isothermes. La résolution du problème a été faite par la méthode des différences finies. Ainsi nous avons obtenu les champs de vitesse et de température pour plusieurs combinaisons du rapport des rayons, du nombre de Reynolds, du nombre de Peclet et de la température du fluide à l'entrée. Ce qui nous a permis d'établir des corrélations pour les longueurs d'établissement dynamique et thermique et d'analyser le transfert de chaleur au niveau des parois.

## 1. INTRODUCTION

DEPUIS les années 1910 de nombreux auteurs se sont intéressés aux problèmes d'écoulements de convection forcée en régimes dynamique et thermique non établis en raison de leur utilité pratique considérable. Ce type d'écoulement est obtenu à l'entrée de tout conduit (échangeurs de chaleur, réacteurs nucléaires, chimiques ; etc.).

Le problème de l'écoulement thermique non établi une fois le régime dynamique établi, fut le cas le plus étudié. Parmi les travaux relatifs à ce sujet, on citera les travaux effectués par Graetz [1], Nusselt [2], Abramowitz [3], Singh [4], Jones [5] et Hornbeck [6] dans le cas de la géométrie cylindrique et ceux dus à Hatton et Quarmby [7], Landberg *et al.* [8] et Mojtabi et Caltagirone [9] dans le cas de la géométrie annulaire.

Dans le cas où les régimes dynamique et thermique se développent simultanément, nous ne pouvons citer que l'étude entreprise par Murakawa [10] et celle menée par Heaton *et al.* [11] dans le cas d'un espace annulaire soumis à des flux pariétaux constants et une étude plus récente due à Feldmann *et al.* [12] dans le cas d'un espace annulaire excentrique et pour différentes conditions aux limites thermiques.

La délimitation des zones d'entrée et l'évaluation du coefficient de transfert de chaleur au niveau de ces zones sont d'une grande utilité pour le dimensionnement de nombreuses installations thermiques. Dans la présente étude nous avons établi des corrélations pour les longueurs d'établissement dynamique et thermique et déterminé les nombres de Nusselt intérieur et extérieur. Nous avons étudié notamment l'influence du rapport des rayons et de la température d'entrée sur ces grandeurs, ce qui n'a pas été développée dans les études antérieures relatives à cette géométrie.

## 2. FORMULATION

Nous considérons l'écoulement laminaire d'un fluide Newtonien incompressible et dilatable dans la région d'entrée d'un espace annulaire délimité radialement par deux cylindres coaxiaux et isothermes. Le cylindre interne de rayon  $r_i$  est maintenu à la température  $T_i$  tandis que le cylindre externe de rayon  $r_e$  est à la température  $T_e$  inférieure à  $T_i$ . Le fluide pénètre dans l'espace annulaire avec une vitesse uniforme  $W_0$  et à la température  $T_0$  comprise entre  $T_i$  et  $T_e$  (Fig. 1). Les propriétés physiques du fluide à savoir : la viscosité cinématique  $\alpha$ , la conductivité thermique  $\lambda$ , la chaleur massique  $C_p$  et le coefficient de dilatation thermique  $\beta$  sont supposées constantes et prises à la température de référence  $(T_i + T_e)/2$ .

Dans cette étude nous nous restreignons au cas de faibles gradients de température pour lequel le phénomène de convection naturelle est négligeable et l'écoulement peut être considéré comme étant bidimensionnel et axisymétrique.

Pour la simplification du formalisme régissant cet écoulement, nous adoptons les hypothèses de Prandtl [13] et nous négligeons les termes de dissipation visqueuse et de conduction axiale dans l'équation de l'énergie. Notons que ces simplifications sont valables dans le cas où les nombres de Reynolds et de Peclet basés sur le diamètre hydraulique sont supérieurs à 100 (Singh [4]).

Compte tenu de toutes ces considérations les équations simplifiées régissant l'écoulement stationnaire ainsi considéré s'écrivent :

$$\frac{\partial U'}{\partial r'} + \frac{U'}{r'} + \frac{\partial W'}{\partial Z'} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial P'_m}{\partial r'} = 0 \quad (2)$$

## NOMENCLATURE

<p><math>a</math> diffusivité thermique du fluide</p> <p><math>D_H</math> diamètre hydraulique, <math>2(r_e - r_i)</math></p> <p><math>L'_D</math> longueur d'établissement dynamique</p> <p><math>L_D</math> longueur d'établissement dynamique adimensionnelle, <math>L'_D/r_i</math></p> <p><math>L'_T</math> longueur d'établissement thermique</p> <p><math>L_T</math> longueur d'établissement thermique adimensionnelle, <math>L'_T/r_i</math></p> <p><math>P'_m</math> pression motrice, <math>p + \rho g Z</math></p> <p><math>P_m</math> pression motrice adimensionnelle, <math>p'_m/\rho W_0^2</math></p> <p><math>r'</math> coordonnée radiale</p> <p><math>r</math> coordonnée radiale adimensionnelle, <math>r'/r_i</math></p> <p><math>r_i</math> rayon du cylindre intérieur</p> <p><math>r_e</math> rayon du cylindre extérieur</p> <p><math>R</math> rapport des rayons, <math>r_e/r_i</math></p> <p><math>T'</math> température du fluide</p> <p><math>T</math> température adimensionnelle, <math>(T' - T_0)/(T_i - T_e)</math></p> <p><math>T_e</math> température du cylindre extérieur</p> <p><math>T_i</math> température du cylindre intérieur</p> <p><math>T_0</math> température du fluide à l'entrée de l'espace annulaire</p> <p><math>U', W'</math> composantes, radiale et axiale, de la vitesse</p> <p><math>U, W</math> composantes, radiale et axiale, adimensionnelles de la vitesse, <math>U'/W_0, W'/W_0</math></p> <p><math>W_0</math> vitesse du fluide à l'entrée de l'espace annulaire</p> <p><math>X</math> abscisse axiale réduite, <math>Z/L_T</math></p>	<p><math>Z'</math> coordonnée axiale</p> <p><math>Z</math> coordonnée axiale adimensionnelle, <math>Z'/r_i</math>.</p> <p><b>Nombres adimensionnels</b></p> <p><math>Nu_e</math> nombre de Nusselt local extérieur, <math>-R \ln R(\partial T/\partial r) _{r=R}</math></p> <p><math>Nu_i</math> nombre de Nusselt local intérieur, <math>-\ln R(\partial T/\partial r) _{r=1}</math></p> <p><math>\overline{Nu}_i, \overline{Nu}_e</math> nombre de Nusselt moyens, intérieur et extérieur</p> <p><math>Pe</math> nombre de Peclet, <math>W_0 r_i/a</math></p> <p><math>Pe_{D_H}</math> nombre de Peclet basé sur le diamètre hydraulique, <math>2W_0(r_e - r_i)/a</math></p> <p><math>Pr</math> nombre de Prandtl, <math>\alpha/a</math></p> <p><math>Re</math> nombre de Reynolds, <math>W_0 r_i/\alpha</math></p> <p><math>Re_{D_H}</math> nombre de Reynolds basé sur le diamètre hydraulique, <math>2W_0(r_e - r_i)/\alpha</math>.</p> <p><b>Symboles grecs</b></p> <p><math>\alpha</math> viscosité cinématique</p> <p><math>\beta</math> coefficient de dilatation thermique</p> <p><math>\delta D_i</math> épaisseur de la couche limite dynamique interne</p> <p><math>\delta T_i</math> épaisseur de la couche limite thermique interne</p> <p><math>\theta_0</math> température adimensionnelle à l'entrée de l'espace annulaire, <math>(T_0 - T_e)/(T_i - T_e)</math></p> <p><math>\lambda</math> conductivité thermique</p> <p><math>\rho</math> masse volumique.</p>
--	---

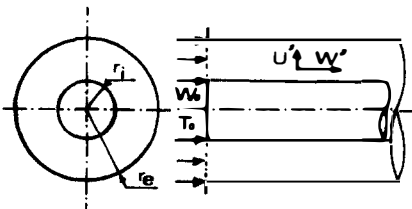


Fig. 1. Schéma de définition.

$$U' \frac{\partial T'}{\partial r'} + W' \frac{\partial W'}{\partial Z'} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P'_m}{\partial Z'} + \alpha \left\{ \frac{\partial^2 W'}{\partial r'^2} + \frac{1}{r'} \frac{\partial W'}{\partial r'} \right\} \quad (3)$$

$$U' \frac{\partial T'}{\partial r'} + W' \frac{\partial T'}{\partial Z'} = a \left\{ \frac{\partial^2 T'}{\partial r'^2} + \frac{1}{r'} \frac{\partial T'}{\partial r'} \right\} \quad (4)$$

Pour la résolution du problème dynamique, nous avons introduit comme équation complémentaire, l'équation de normalisation traduisant la conservation du débit à travers les sections transversales de l'espace annulaire qui s'écrit :

$$\int_{r_i}^{r_e} W'(r', Z') r' dr' = \frac{1}{2}(r_e^2 - r_i^2). \quad (5)$$

Les conditions aux limites du problème sont :

$$\begin{aligned} r' = r_i : \quad U' = W' = 0, \quad T' = T_i \\ r' = r_e : \quad U' = W' = 0, \quad T' = T_e \\ Z' = 0 : \quad U' = 0, \quad W' = W_0, \quad T' = T_0. \end{aligned} \quad (6)$$

Les équations de (1) à (6) sont rendues adimensionnelles à l'aide des grandeurs réduites suivantes :

$$\begin{aligned} r = r'/r_i, \quad Z = Z'/r_i, \quad U = U'/W_0, \quad W = W'/W_0, \\ P_m = p'_m/\rho W_0^2, \quad \theta = (T' - T_e)/(T_i - T_e). \end{aligned}$$

Les équations adimensionnelles s'écrivent :

$$\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{U}{r} + \frac{\partial W}{\partial Z} = 0 \quad (7)$$

$$U \frac{\partial W}{\partial r} + W \frac{\partial W}{\partial Z} = -\frac{dP_m}{dZ} + \frac{1}{Re} \left\{ \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} \right\} \quad (8)$$

$$\int_1^R rW(r, Z) dr = \frac{1}{2}(R^2 - 1) \quad (9)$$

$$U \frac{\partial T}{\partial r} + W \frac{\partial T}{\partial Z} = \frac{1}{Pe} \left\{ \frac{\partial T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right\} \quad (10)$$

Les conditions aux limites qui leur sont associées sont :

$$\begin{aligned} r = 1: & \quad U = W = 0, \quad T = 1 \\ r = R: & \quad U = W = 0, \quad T = 0 \\ z = 0: & \quad U = 0, \quad W = 1, \quad T = \theta_0 \end{aligned} \quad (11)$$

où :  $R = r_c/r_i$  représente le rapport des rayons,  $Re = W_0 r_i / \alpha$  le nombre de Reynolds,  $Pe = W_0 r_i / a$  le nombre de Peclet et  $\theta_0 = (T_0 - T_c) / (T_i - T_c)$ , la température du fluide à l'entrée de l'espace annulaire.

### 3. METHODE DE RESOLUTION

Pour la résolution du problème, nous avons opté pour une méthode aux différences finies du fait que le problème dynamique est découplé du problème thermique et que les équations (8) et (10) sont du type parabolique.

Un maillage rectangulaire à pas constants est superposé au domaine physique.

Le schéma de discrétisation ainsi utilisé, est une extension de celui adoptée par El-Shaarawi et Sarhan [14]. La stabilité de ce schéma a été étudiée par les mêmes auteurs.

Les équations de (7) à (10) sont transformées en équations aux différences suivantes :

$$\frac{U(i+1, j+1) - U(i, j+1)}{\Delta r} + \frac{U(i+1, j+1) + U(i, j+1)}{2r_{i+1/2}} + \frac{W(i+1, j+1) + W(i, j+1) - W(i+1, j) - W(i, j)}{2\Delta Z} = 0 \quad (12)$$

$$\begin{aligned} U(i, j) & \frac{W(i+1, j+1) + W(i+1, j) - W(i-1, j+1) - W(i-1, j)}{4\Delta r} + W(i, j) \frac{W(i, j+1) - W(i, j)}{\Delta Z} \\ & = - \frac{P_{j+1} - P_j}{\Delta Z} + \frac{1}{Re} \left\{ \frac{W(i+1, j+1) + W(i+1, j) - 2W(i, j+1) - 2W(i, j) + W(i-1, j+1) + W(i-1, j)}{2\Delta r^2} \right. \\ & \quad \left. + \frac{W(i+1, j+1) + W(i+1, j) - W(i, j+1) - W(i, j)}{4r_i \Delta r} \right\} \quad (13) \end{aligned}$$

$$\sum_{i=2}^{i=IM-1} r_i W(i, j+1) = \frac{1}{2\Delta r} (R^2 - 1) \quad (14)$$

$$\begin{aligned} U(i, j) & \frac{T(i+1, j+1) - T(i-1, j+1)}{2\Delta r} + W(i, j) \frac{T(i, j+1) - T(i, j)}{\Delta Z} \\ & = \frac{1}{Pe} \left\{ \frac{T(i+1, j+1) - 2T(i, j+1) + T(i-1, j+1)}{\Delta r^2} + \frac{T(i+1, j+1) - T(i-1, j+1)}{2r_i \Delta r} \right\} \quad (15) \end{aligned}$$

des champs de vitesse et de température à la section  $(j+1)$  connaissant la valeur de ces champs à la section  $(j)$ . Le calcul est entamé à l'aide des conditions aux limites à la section d'entrée  $(j=1)$ , arrêté quand la solution du régime établi est atteinte. Celle-ci s'écrit :

$$U(r, \infty) = 0,$$

$$W(r, \infty) = -2 \left( r^2 - 1 - \frac{R^2 - 1}{\ln R} \ln r \right) / \left( R^2 + 1 - \frac{R^2 - 1}{\ln R} \right), \quad \text{pour la vitesse}$$

et

$$T(r, \infty) = 1 - \ln r / \ln R, \quad \text{pour la température.}$$

Pour la résolution du problème dynamique on combine les équations (13) et (14) pour déterminer la vitesse axiale et à l'aide de l'équation (12), on en déduit la vitesse radiale.

Le champ de vitesse ainsi obtenu est reporté dans l'équation (15) pour déterminer le champ de température.

Lors des essais numériques nous avons constaté que le schéma numérique ainsi adopté est stable pour un pas d'espace radial inférieur à 0.04 et axial inférieur à 0.1. La dimension du maillage devient plus importante quand l'un des paramètres  $(R, Re, Pe)$  croît ou  $\theta_0$  décroît. Pour les combinaisons qui ont été explorées, la dimension du maillage varie de  $11 \times 31$  à  $41 \times 1001$  et le temps de calcul est 5 à 30 mn sur un IBM 4361.

Pour tester la convergence du schéma, nous avons

Pour une combinaison donnée  $(R, Re, Pe, \theta_0)$ , les équations de (12) à (15) permettent la détermination

comparé, pour certaines combinaisons, les résultats obtenus pour deux maillages de dimensions diff-

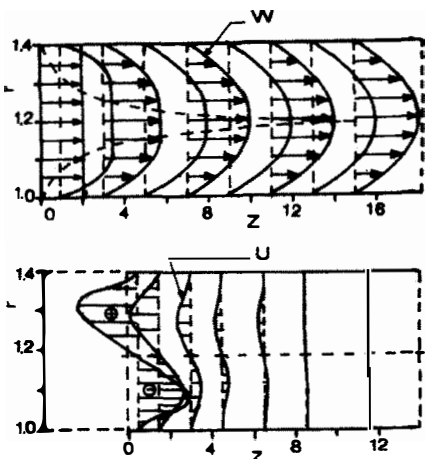


FIG. 2. Evolution du profil des vitesses axiale ( $W$ ) et radiale ( $U$ ) pour  $R = 1.4$  et  $Re = 1250$ .

érentes. Aucune différence notable entre les deux résultats n'a été observée.

#### 4. RESULTATS ET DISCUSSIONS

##### 4.1. Champ dynamique

Nous avons obtenu le champ de vitesse pour plusieurs combinaisons du rapport des rayons  $R$  et du nombre de Reynolds  $Re$ . Les valeurs qui ont été explorées sont (1.2, 1.4,  $\sqrt{3}$ , 2) pour  $R$  et plusieurs valeurs de  $Re$  correspondant au régime laminaire.

Sur la Fig. 2, nous avons représenté l'évolution axiale du profil de la vitesse axiale et celui de la vitesse radiale pour  $R = 1.4$  et  $Re = 1250$ . Les résultats ainsi obtenus pour le champ de vitesse nous ont permis de faire les constatations suivantes :

(1) Le profil de la vitesse axiale qui est uniforme à la section d'entrée, se déforme continuellement d'une section à l'autre et tend asymptotiquement vers le profil de Poiseuille correspondant au régime dynamique établi.

(2) La vitesse radiale est positive (centrifuge) sur la moitié interne de l'espace annulaire, négative (centripète) sur la moitié externe et nulle au niveau de la génératrice de rayon  $R_m = \sqrt{[(R^2 - 1)/(2 \ln R)]}$ , sur laquelle le profil de Poiseuille admet un maximum.

(3) Sur une section droite le profil de la vitesse radiale présente deux extrêmes de signes différents. Au fur et à mesure qu'on s'éloigne de la section d'entrée, les lieux de ces extrêmes s'approchent de la génératrice de rayon  $R_m$  et leurs intensités diminuent jusqu'à s'annuler au bout d'une certaine longueur.

##### 4.2. Longueur d'établissement dynamique

Numériquement nous avons défini la longueur d'établissement dynamique,  $L_D$ , comme étant l'abscisse axiale à partir de laquelle la valeur maximale de la vitesse axiale devient égale à 99% de sa valeur en écoulement dynamique établi. Ce qui correspond pour

Tableau 1

$R = 1.2$	$Re$	250	1000	3000	5000
	$Re_{D_H}$	100	400	1200	2000
	$L_D$	1.2	3.5	8.5	12.5
$R = 1.4$	$Re$	350	600	1250	2500
	$Re_{D_H}$	280	480	1000	2000
	$L_D$	5	8	15	25.5
$R = \sqrt{3}$	$Re$	200	600	1000	1500
	$Re_{D_H}$	293	878	1464	2196
	$L_D$	9	23	33	44
$R = 2$	$Re$	200	600	1000	2000
	$Re_{D_H}$	400	1200	2000	4000
	$L_D$	18	43	65	113

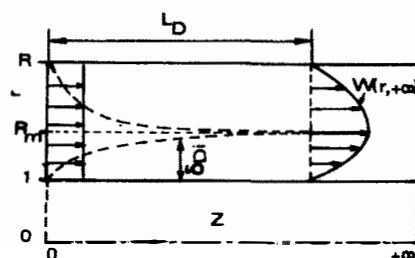


FIG. 3. Développement des couches limites dynamiques.

les pas d'espace ainsi adoptés, à une vitesse radiale de l'ordre de  $10^{-4}$ .

Les valeurs numériques obtenues pour  $L_D$  sont reportées sur le Tableau 1. On remarque que  $L_D$  croît quand  $R$  ou  $Re$  croît.

Dans le but d'établir une corrélation analytique entre  $L_D$  et les paramètres  $R$  et  $Re$ , nous avons supposé, par analogie au cas de la plaque plane, que l'épaisseur de la couche limite interne (ou externe) peut se mettre sous la forme :  $\delta_{Di}(Z) = KZ^m Re^{-n}$ , où  $K$ ,  $m$  et  $n$  sont des constantes strictement positives.

D'après la Fig. 3,  $L_D$  doit vérifier :  $\delta_{Di}(L_D) = R_m - 1$ , où  $R_m = \sqrt{[(R^2 - 1)/(2 \ln R)]}$  est le rayon pour lequel le profil de Poiseuille admet un maximum. Compte tenu de l'expression de  $\delta_{Di}$ ,  $L_D$  doit être de la forme :

$$L_D = K_i (R_m - 1)^{m_i} Re^{n_i}$$

où  $K_i$ ,  $m_i$  et  $n_i$  sont des constantes strictement positives.

Pour les cas ainsi étudiés, cette théorie se trouve bien vérifiée. En effet la Fig. 4 montre que  $L_D$  est de la forme :  $L_D = A(R)Re^{0.8}$ . D'après la Fig. 5,  $A(R)$  a pour expression :  $A(R) = (R_m - 1)^{1.85}$ . D'où l'expression finale de la longueur d'établissement dynamique  $L_D$  :

$$L_D = (R_m - 1)^{1.85} Re^{0.8} r_i \quad (16)$$

##### 4.3. Champ thermique

Nous avons déterminé le champ de température pour plusieurs combinaisons de  $R$ ,  $Re$ ,  $Pe$  et  $\theta_0$ . Pour une combinaison ( $R$ ,  $Re$ ) pour laquelle le champ de vitesse a été obtenu, plusieurs combinaisons ( $\theta_0$ ,  $Pe$ )

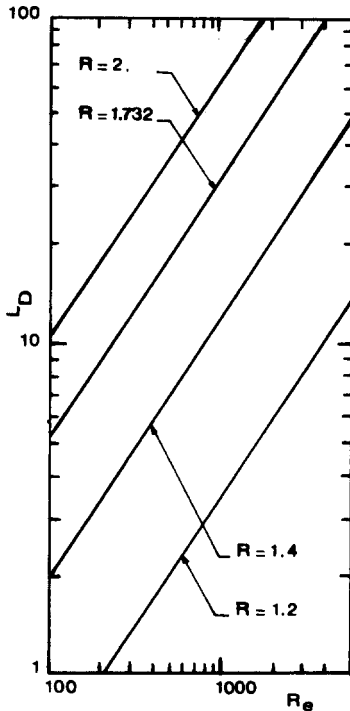


FIG. 4. Evolution de longueur d'établissement dynamique ( $L_D$ ) en fonction de  $Re$  pour différentes valeurs de  $R$ .

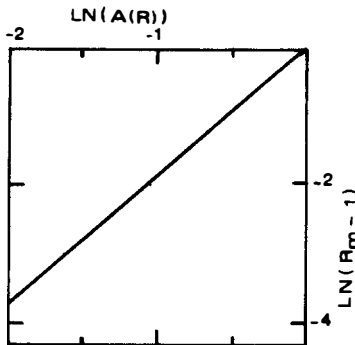


FIG. 5. Variation du coefficient  $A(R)$  en fonction de  $(R_m - 1)$ .

ont été envisagées. Les valeurs ainsi explorées sont  $\{0, 0.25, 0.4\}$  pour  $\theta_0$  et plusieurs valeurs de  $Pe$  comprises entre 100 et 6000.

D'après les résultats numériques obtenus pour le champ de température et représentés sur la Fig. 6, on constate que :

(1) Le profil de température qui est constant à la section d'entrée se déforme continuellement d'une section à l'autre et tend asymptotiquement vers le profil de la conduction pure correspondant au régime thermique établi.

(2) On peut distinguer trois zones fluides à savoir : une zone de chauffage située à proximité de la paroi interne, une zone de refroidissement située à proximité de la paroi externe et une zone centrale comprise entre

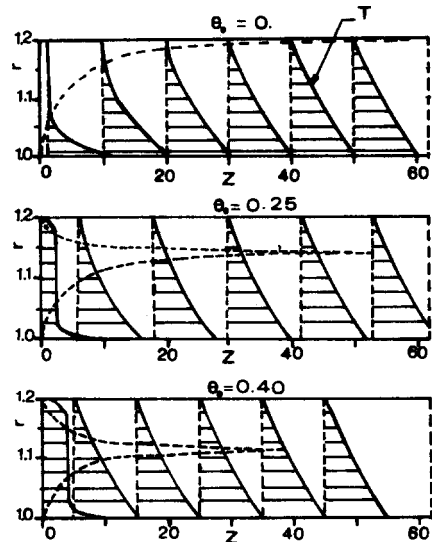


FIG. 6. Evolution du profil de température pour  $R = 1.2$ ,  $Pe = 2160$  et différentes valeur de  $\theta_0$ .

Tableau 2.  $L_T = f(\theta_0, Pe)$

$R = 1.2$	$Re (Pr = 0.72)$	600	1300	3000	6000
	$Pe$	432	936	2160	3600
	$\theta_0 = 0$	12.5	26	59	103
	$\theta_0 = 0.25$	10.4	21	51	84
	$\theta_0 = 0.40$	8	17	39	65
$R = 1.4$	$Re (Pr = 0.72)$	200	500	1000	2500
	$Pe$	144	360	720	1800
	$\theta_0 = 0$	17	42	83	210
	$\theta_0 = 0.25$	14	34	67	168
	$\theta_0 = 0.40$	10	25	49	123
$R = \sqrt{3}$	$Re (Pr = 0.72)$	200	600	1000	1500
	$Pe$	144	432	720	1080
	$\theta_0 = 0$	54	160	266	400
	$\theta_0 = 0.25$	44	133	220	335
	$\theta_0 = 0.4$	30	88	148	223

les deux où le transfert de chaleur est faible.

(3) Au fur et à mesure qu'on s'éloigne de la section d'entrée, les zones de chauffage et de refroidissement s'épaississent au dépend de la zone centrale qui finit par disparaître au bout d'une certaine longueur.

#### 4.4. Longueur d'établissement thermique

Numériquement nous avons défini la longueur d'établissement thermique  $L_T$ , comme étant l'abscisse axiale à partir de laquelle le nombre de Nusselt local au niveau des deux parois tend vers l'unité à 1% près. Notons que le nombre de Nusselt ainsi considéré, représente le rapport entre le flux convectif et le flux transmis par conduction pure et qu'il est égale à l'unité en zone d'écoulement thermique établi.

Les résultats numériques obtenus pour  $L_T$  (Tableau 2) montrent que  $L_T$  croît avec  $R$  et  $Pe$  et décroît avec  $\theta_0$ .

Par analogie au cas de la plaque plane isotherme, nous avons supposé que l'épaisseur de la zone de

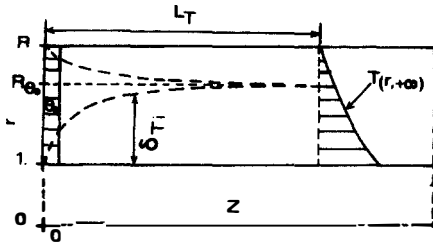


FIG. 7. Développement des couches limites thermiques.

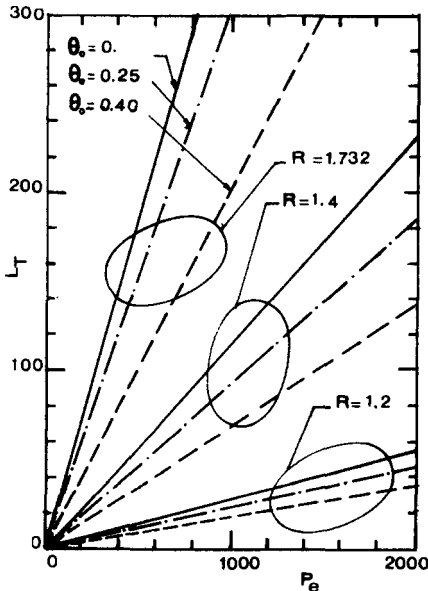


FIG. 8. Evolution de la longueur d'établissement thermique ( $L_T$ ) en fonction de  $Pe$  pour différentes valeurs de  $R$  et de  $\theta_0$ .

chauffage (ou de refroidissement) peut se mettre sous la forme:  $\delta_{T_i}(Z) = CZ^p Pe^{-q}$ , où  $C$ ,  $p$  et  $q$  sont des constantes strictement positives.

D'après la Fig. 8,  $L_T$  doit vérifier la relation:  $\delta_{T_i}(L_T) = R\theta_0 - 1$ , où:  $R\theta_0 = R^{1-\theta_0}$ , désigne le rayon pour lequel le profil de la conduction pure admet la valeur  $\theta_0$ . Compte tenu de l'expression de  $\delta_{T_i}$ , l'expression de la longueur d'établissement thermique doit être de la forme:

$$L_T = C_i(R\theta_0 - 1)^{p_i} Pe^{q_i}$$

où  $C$ ,  $p_i$  et  $q_i$  sont des constantes strictement positives.

Conformément à cette relation, la Fig. 8 montre que  $L_T$  est de la forme:  $L_T = B(R, \theta_0)Pe$ . D'après la Fig. 9 le coefficient  $B(R, \theta_0)$  a pour expression:  $B(R, \theta_0) = C_i(R\theta_0 - 1)^2$ . D'où l'expression finale de la longueur d'établissement thermique:

$$L_T = C_i(R\theta_0 - 1)^2 Pe r_i \quad (17)$$

où  $C_i = \{0.7, 1.12, 1.35\}$ , respectivement pour  $\theta_0 = \{0, 0.25, 0.4\}$ .

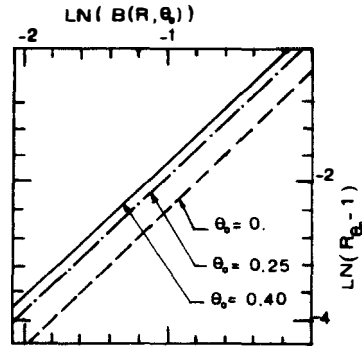


FIG. 9. Variation du coefficient  $B(R, \theta_0)$  en fonction de  $(R\theta_0 - 1)$  pour différentes valeur de  $\theta_0$ .

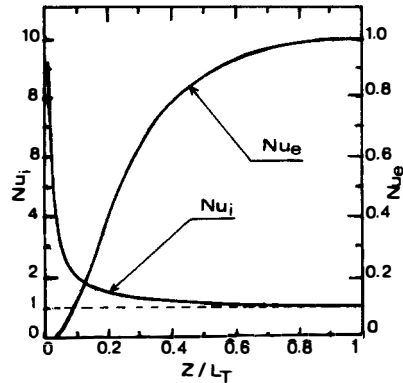


FIG. 10. Evolution des nombres de Nusselt locaux interne ( $Nu_i$ ) et externe ( $Nu_e$ ).

#### 4.5. Transfert de chaleur

Les nombres de Nusselt caractérisant le transfert de chaleur local au niveau des parois interne et externe s'écrivent, respectivement:

$$Nu_i(Z) = -\ln R \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=1};$$

$$Nu_e(Z) = -R \ln R \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=R}.$$

On constate (Fig. 10) que pour une valeur donnée de  $\theta_0$ , le transfert de chaleur local est fonction uniquement de l'abscisse axiale réduite  $X = Z/L_T$ . Les nombres de Nusselt moyens sur une longueur réduite  $X$  s'écrivent alors:

$$\overline{Nu}_i(X) = \frac{1}{X} \int_0^X Nu_i(x) dx \quad \text{pour la paroi interne}$$

$$\overline{Nu}_e(X) = \frac{1}{X} \int_0^X Nu_e(x) dx \quad \text{pour la paroi externe.}$$

On en déduit l'expression de la température de mélange  $T_m(X)$ :

$$T_m(X) = C[\overline{Nu}_i(X) - \overline{Nu}_e(X)]X$$



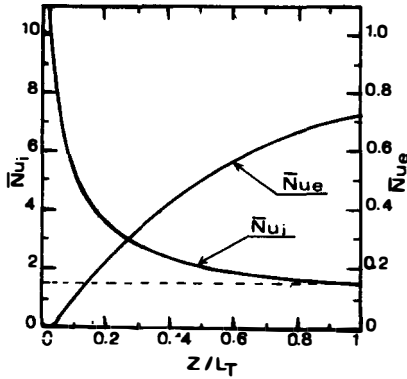


FIG. 11. Evolution des nombres de Nusselt moyens interne ( $\overline{Nu}_i$ ) et externe ( $\overline{Nu}_e$ ).

Tableau 3

	$Re$					
	1000	1500	2000	2500	3000	3500
$L_D = 0.04Re^\dagger$	40	60	80	100	120	140
$L_D = 0.196Re^{0.85\dagger}$	49	68	85	102	118	134

† Schlichting [15].

‡ Corrélation [16], cas  $(R-1) \neq 10^{-3}$ .

où

$$C = \frac{1.4(R-1)}{(R+1)\ln R} \quad \text{pour } \theta_0 = 0.$$

On remarque (Fig. 12) que le nombre de Nusselt moyen intérieur est de 3.20 sur le quart de la longueur d'établissement thermique, de 2.2 sur la moitié, de 1.80 sur les trois quarts et de 1.60 sur toute la longueur. Quant au nombre de Nusselt moyen extérieur, il est de 0.49 sur la moitié de la longueur d'établissement thermique et de 0.72 sur toute la longueur.

#### 4.6. Discussion

Les résultats obtenus pour la longueur d'établissement dynamique en appliquant la corrélation [16] au cas d'un espace annulaire de très faible épaisseur [ $(r_e - r_i)/r_i \ll 1$ ], sont comparés à ceux obtenus par Schlichting [15] dans le cas d'un canal plan. On remarque (Tableau 3) que les deux résultats sont du même ordre de grandeur. Notons que dans la formulation utilisée par ref. [15], on considère qu'au niveau de la partie centrale l'écoulement est potentiel et régit par la loi de Bernouilli alors que dans la présente étude cette hypothèse n'a pas été adoptée.

Feldmann *et al.* [12] ont traité le problème de l'écoulement de convection forcée dans la région d'entrée d'un espace annulaire excentrique. D'après cette étude et dans le cas d'une faible excentricité, et pour une température  $\theta_0 = 0$ , la longueur d'établissement thermique a pour expression:  $L'_T = 0.175Pe_{D_H} D_H$ , ou encore:  $L'_T = 0.70(R-1)^2 Pe r_i$ , compte tenu des expressions de  $Pe_{D_H}$  et  $D_H$ . L'application de la corrélation (17) au cas de  $\theta_0 = 0$  donne exactement la

Tableau 4

$\theta_0 = 0$	$Pr$	0.01	0.1	0.71 (air)	6 (eau)	100
$L_T/L_D$	$R = 2$ $Re = 100$	0.07	0.7	5	42	708
$L_T/L_D$	$R = 2$ $Re = 1000$	0.1	1.1	8	67	1122

même expression ( $L'_T = 0.70(R-1)^2 Pe r_i$ ). Ce qui confirme la validité des résultats ainsi obtenus.

Dans le cas où le régime dynamique est considéré comme établi à partir de la section d'entrée, l'expression de la longueur d'établissement thermique est, d'après [9];  $L'_T = 0.75Pe r_i$  (cas  $\theta_0 = 0$  et  $R = 2$ ).

Dans le cas où le régime dynamique est non établi, la corrélation (17) donne:  $L'_T = 0.70Pe r_i$  (cas  $\theta_0 = 0$  et  $R = 2$ ).

On constate alors qu'il y a une réduction (7%) de la longueur d'établissement thermique dans le cas où le régime dynamique est non établi. En effet, dans ce cas, la présence d'une composante radiale de la vitesse se traduit par une amélioration du transfert de chaleur par convection et par conséquent d'une réduction de la longueur d'établissement thermique.

#### 4.7. Conclusions

A l'aide de la méthode des différences finies nous avons résolu le problème de l'écoulement laminaire bidimensionnel et axisymétrique de convection forcée en régimes dynamique et thermique non établis dans un espace annulaire. Ce qui nous a permis d'établir les corrélations suivantes:

$$L'_D = (R_m - 1)^{1.85} Re^{0.8} r_i$$

pour la longueur d'établissement dynamique, et

$$L'_T = 0.70(R\theta_0 - 1)^2 Pe r_i, \quad \text{pour } \theta_0 = 0.00$$

$$L'_T = 1.12(R\theta_0 - 1)^2 Pe r_i, \quad \text{pour } \theta_0 = 0.25$$

$$L'_T = 1.35(R\theta_0 - 1)^2 Pe r_i, \quad \text{pour } \theta_0 = 0.40$$

pour la longueur d'établissement thermique.

Cette étude nous a permis aussi de dégager les conclusions suivantes:

(a) Dans le cas de grands nombres de Prandtl, la longueur d'établissement dynamique devient négligeable devant la longueur d'établissement thermique (Tableau 4). Par conséquent, dans ce cas, le problème thermique peut être résolu en considérant que le régime dynamique est établi à partir de la section d'entrée.

(b) L'établissement du régime dynamique s'accompagne d'une légère réduction de la longueur d'établissement thermique.

(c) Le transfert de chaleur, local ou global, ne dépend que de l'abscisse axiale réduite  $X = Z/L_T$  et de la température du fluide à l'entrée de l'espace annulaire ( $\theta_0$ ).

*Remerciements*—Ce travail a été effectué avec la collaboration du laboratoire d’Énergétique et Phénomènes de Transfert de Bordeaux. Que Monsieur le Professeur J. P. Caltagirone trouve ici l’expression de nos sincères remerciements.

## REFERENCES

1. L. Graetz, On heat capacity of fluids, *Annln Phys.* **25**, 336–357 (1885).
2. W. Nusselt, The dependence of the heat transfer coefficient on tube length, *Z. Ver. Dt. Ing.* **54**, 1154–1158 (1910).
3. M. Abramowitz, On the solution of the differential equation occurring on the problem of the heat convection in laminar flow through a tube, *J. Math. Phys.* **32**, 184–187 (1953).
4. S. N. Singh, Heat transfer by laminar flow in cylindrical tube, *Appl. Scient. Res.* **A7**, 325–340 (1958).
5. A. S. Jones, Extension to the solution of the Graetz problem, *Int. J. Heat Mass Transfer* **14**, 619–623 (1971).
6. R. W. Hornbeck, All numerical method for heat transfer in inlet of a tube, *ASME 65-WA/HT-36* (1965).
7. A. P. Hatton and A. Quarmby, Heat transfer in the thermal entry length with laminar flow in an annulus, *Int. J. Heat Mass Transfer* **5**, 973–980 (1962).
8. R. E. Landberg, P. A. McCuen and W. C. Reynolds, Heat transfer in annular passages. Hydrodynamically developed laminar flow with arbitrarily prescribed temperature or heat fluxes, *Int. J. Heat Mass Transfer* **6**, 495–529 (1963).
9. A. Mojtabi et J. P. Caltagirone, Convection entre deux cylindres coaxiaux en régime laminaire permanent, *Int. J. Heat Mass Transfer* **21**, 261–268 (1978).
10. K. Murakawa, Heat transfer in entry length of double pipes, *Int. J. Heat Mass Transfer* **2**, 240–251 (1961).
11. H. S. Heaton, W. C. Reynolds and W. M. Kays, Heat transfer in annular passages. Simultaneous development of velocity and temperature fields in laminar flow, *Int. J. Heat Mass Transfer* **7**, 763–781 (1964).
12. E. E. Feldmann, R. W. Hornbeck and J. F. Osterle, A numerical solution of a developing temperature for laminar developing flow in eccentric annular ducts, *Int. J. Heat Mass Transfer* **25**, 243–253 (1982).
13. R. W. Hornbeck, Laminar flow in the entrance region of a pipe, *Appl. Scient. Res.* **13(A)**, 224–232 (1964).
14. M. A. I. El-Shaarawi and A. Sarhan, Combined forced-free laminar convection in the entry region of a vertical annulus with a rotating inner cylinder, *Int. J. Heat Mass Transfer* **25**, 175–186 (1982).
15. H. Schlichting, *Boundary Layer Theory*, Vol. 6, pp. 176–178, McGraw-Hill Series in Mechanical Engineering, New York (1968).

## FORCED CONVECTION IN A HORIZONTAL ANNULAR SPACE FOR NON-ESTABLISHED VELOCITY AND TEMPERATURE REGIME

**Abstract**—The purpose of this work is to study the laminar forced convection flow in the entrance region of an annular space limited by two horizontal coaxial cylinders for non-established velocity and temperature regimes. The problem is solved using the finite difference method. We have obtained temperature and velocity fields for many values of Reynolds and Peclet numbers, radius ratios and entrance fluid temperature. From these results correlations can be obtained for dynamic and thermal establishment length and for the heat transfer near the walls.

## ERZWUNGENE KONVEKTION IN EINEM HORIZONTALEN RINGRAUM BEI NICHT AUSGEBILDETEM GESCHWINDIGKEITS- UND TEMPERATURPROFIL

**Zusammenfassung**—In dieser Arbeit wird die laminare erzwungene Konvektionsströmung im Einlaufbereich eines aus zwei horizontalen koaxialen Zylindern gebildeten Ringraumes bei nicht ausgebildetem Geschwindigkeits- und Temperaturprofil untersucht. Mit Hilfe eines Finite-Differenzen-Verfahrens wird das Problem gelöst. Für verschiedene Reynolds- und Peclet-Zahlen sowie Radienverhältnisse und Fluid-eintrittstemperaturen werden Temperatur- und Geschwindigkeitsfelder berechnet. Aus diesen Ergebnissen lassen sich Korrelationen für die hydrodynamische und thermische Einlaufänge und den Wärmeübergang ermitteln.

## ВЫНУЖДЕННАЯ КОНВЕКЦИЯ И ТЕПЛООБМЕН НА ВХОДНОМ УЧАСТКЕ ГОРИЗОНТАЛЬНОГО КОЛЬЦЕВОГО ЗАЗОРА

**Аннотация**—Цель работы—исследование ламинарного вынужденного течения и теплообмена во входу области кольцевого зазора, ограниченного двумя горизонтальными коаксиальными цилиндрами. Задача решается методом конечных разностей. Получены поля температуры и скорости для многих значений чисел Рейнольдса и Пекле, отношения радиусов и температуры жидкости на входе. Из полученных результатов выведены соотношения для длин динамического и теплового входных участков, а также для теплопереноса вблизи стенок.