



HAL
open science

Ballade pour le fa noir Regard sur un clavier de piano

Bernard Guy

► **To cite this version:**

| Bernard Guy. Ballade pour le fa noir Regard sur un clavier de piano. 2018. hal-01956562

HAL Id: hal-01956562

<https://hal.science/hal-01956562>

Preprint submitted on 16 Dec 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

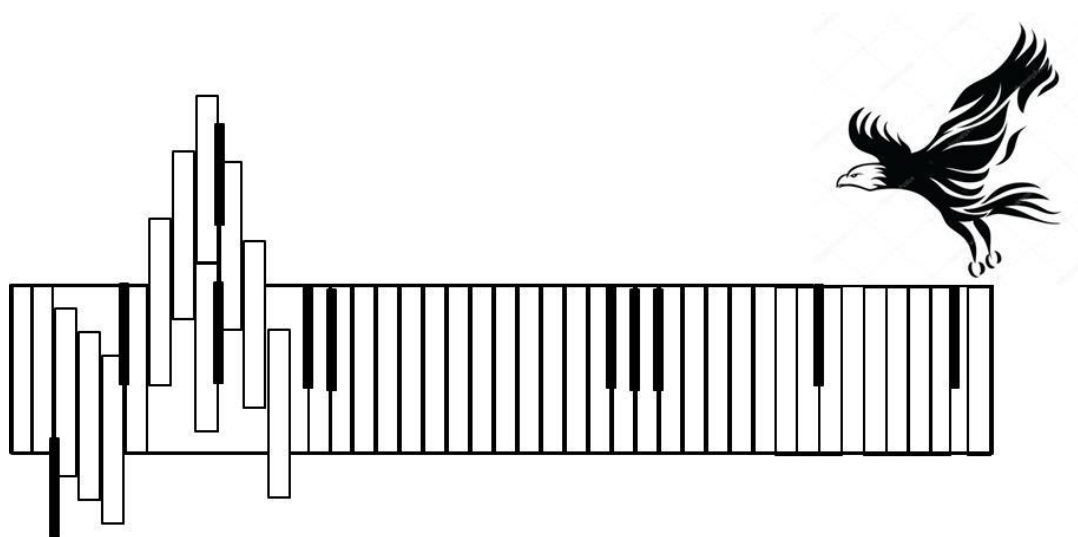
Ballade pour le fa noir

Regard sur un clavier de piano

Bernard Guy

Ecole des Mines de Saint-Etienne

guy@emse.fr



Décembre 2018

Résumé

L'observation d'un clavier de piano fait apparaître plusieurs nombres, qui reflètent la façon dont les notes sont assemblées dans la gamme occidentale. Ce sont : - *sept* et *cinq*, comme le nombre de touches blanches et le nombre de touches noires dans une même période (ou octave) ; et - *deux* et *trois* comme la répartition des noires en deux groupes à l'intérieur d'une période (dont on peut ne retenir que le *deux*, le *trois* s'en déduisant par soustraction au *cinq* précédent). Sans prétendre à l'originalité, le texte expose un schéma conceptuel accommodant ces divers nombres, résumés dans l'association {7 ; 5 ; 2}. Pour ce faire, le jeu de trois ingrédients, présentés comme contraintes de type mathématique, deux logiques et une historique, est souligné. Contraintes logiques : - *contrainte d'accord* $A(r_{ij})$: pour produire une bonne impression à l'oreille, les fréquences f_i et f_j de deux notes voisines i et j doivent être dans le rapport $f_j/f_i = r_{ij}$ de deux (petits) nombres entiers ; - *contrainte de transposition* $T_{p,\alpha}$: on veut faire apparaître une périodicité de p notes, avec dans chaque période une organisation semblable des sons offrant un même effet auditif; les fréquences des notes en correspondance d'une période à l'autre sont dans le rapport α ; cette disposition permet la polyphonie (des voix plus hautes peuvent chanter la même mélodie, de façon transposée par rapport aux voix plus basses) ; - *contrainte historique* H : lorsque plusieurs solutions répondent aux contraintes $A(r_{ij})$ et $T_{p,\alpha}$, l'histoire nous prescrit un choix parmi les possibles. On montre comment l'association {7 ; 5 ; 2} se comprend, pour la musique occidentale, dans le cadre donné par les trois contraintes, selon une série d'étapes illustrées par autant de claviers imaginaires intermédiaires, et ouvrant au passage à la compréhension de systèmes musicaux différents. L'utilisation (excessive ?) dans la littérature du *cycle des quintes*, et de la relation $3^{12} \cong 2^{19}$ comme « preuve » d'une structure musicale qui serait unique, est discutée.

Mots clés : musicologie ; histoire de la musique ; solfège ; piano ; gamme occidentale ; contrainte d'accord ; contrainte de transposition ; clavier ; touches blanches ; touches noires ; répartition.

Page de titre : clavier dessiné par l'auteur ; aigle téléchargé depuis pngtree.com (libre de droit). La photographie et les illustrations de la suite du texte sont de l'auteur.



A mes petits-enfants musiciens¹
A Souha Malhis
A Marc Doumas

1. Introduction

Regardez un piano fermé, admirez ses grandes murailles sombres, sans aspérité pour le regard, ni l'imagination. Juste quelques reflets.

Ouvrez-le !

Découvrez un autre monde : des touches rangées en bon ordre, des blanches, à plat ; des noires, en relief, comme une série de cordillères. Le rythme des noires règle la numérotation des blanches ; sans elles, comment s'y retrouver ? L'alignement des touches énonce une rationalité silencieuse, cachant les émotions que la course des doigts va susciter.

Lorsque je regarde le clavier, trois, voire quatre, nombres me sautent aux yeux :

- *sept* : le nombre de touches blanches, avant que cela recommence de la même façon : voilà une période ;

- *cinq* : le nombre de touches noires inscrites dans cette zone de sept ; et

- *deux* et *trois* : les nombres de touches noires du premier et du second groupe à l'intérieur des cinq. Deux plus trois égalent cinq. On pourrait aussi dire *trois* et *quatre*, comptant les réunions par les blanches. Ou encore les associer dans les duos (*trois*, *deux*) et (*quatre*, *trois*) : trois blanches avec deux noires, quatre blanches avec trois noires. Quand on sait de quoi on parle, une paire suffit ; ou même un des deux nombres de la paire fait l'affaire. En bref, parmi les différentes écritures, je choisis la série (*sept*, *cinq*, *deux*) que nous écrivons : $\{7 ; 5 ; 2\}^2$.

¹ Tous ne comprendront pas ? Il y aura au moins quelques images !

² En écrivant cette association, je n'ai pas mis les touches blanches et les touches noires d'emblée sur le même plan ; j'aurais simplement parlé de $\{12\}$, soit le nombre total de touches ou d'intervalles. Nous aurions aussi pu écrire pour une période la liste $\{bnbnbbnbnbn\}$ où b désigne une touche blanche et n une touche noire. Enfin, nous aurions pu commencer la période à partir de n'importe quelle note : la façon dont nous parlons désigne le choix de départ.

Evidemment, quand je regarde une trompette, je n'ai pas la même impression ; cet instrument ne me montre pas d'emblée trois nombres. Sa rutilance, sa sculpture, ne se privent pas de faire pressentir la folie même de la musique et des notes, davantage dissimulée dans l'apparente froideur numérique du piano. La portée sur la feuille de papier ne donne pas non plus l'idée directe de la structure musicale, à lire entre les lignes.

Seul le piano allie de façon presque palpable le calcul et la chanson.

J'ai ouvert le piano. Vais-je jouer ? La question à résoudre est la suivante : d'où vient ce $\{7 ; 5 ; 2\}$? Tombe-t-il du ciel par hasard ? Aurait-on pu imaginer d'autres pianos, d'autres mondes ? Avec des touches de trois couleurs, ou quatre, ou plus encore.... De formes différentes, d'organisations différentes ? Sans régularité ? De combien de façons les rêver ? Y-a-t-il des raisons structurelles, mathématiques, qui mènent sans échappatoire à ce $\{7 ; 5 ; 2\}$?

L'objet de ce texte est de donner la réponse. Oui, il y a bien des arguments logiques, auxquels il faut ajouter des influences historiques conjoncturelles qui jouent mécaniquement sur le résultat. Les unes et les autres se combinent en un beau récit. En cherchant dans la littérature et sur la grande toile, je n'ai pas trouvé la réponse qui aille droit au $\{7 ; 5 ; 2\}$: une multitude d'informations, elles montrent certes toute la richesse de l'épopée musicale, mais elles m'ont égaré. Après un certain travail, j'ai donc rassemblé les éléments qui concernent directement ma question et vous les offre ici. Non musicologue et sans prétendre faire œuvre originale, je déroule un fil conceptuel qui m'a manqué. Je ne cherche pas la complète exactitude mathématique, ni historique ; je malmène d'ailleurs cette dernière pour réécrire après coup une instruction cohérente, et je retiens surtout ce qui concerne l'organisation des touches dans la gamme de mon piano, sans regarder les innombrables développements reliés (sur la multitude des gammes possibles et les intervalles qu'elles hébergent³). Au passage, on comprendra la part de tâtonnement, de bricolage même, qu'il y a dans l'organisation des notes, et l'on devinera, sans avoir besoin d'y aller en détail, les nombreux autres choix que l'on a pu faire pour écrire la musique. Associée à cette question de l'ordonnement des touches est bien celle des sons produits : pourquoi, quand j'appuie ici, j'obtiens telle fréquence (et non telle autre), par rapport à celles des stations voisines ?

³ Je n'approfondis pas non plus la question de l'harmonie, au risque de décevoir les fins joueurs.

S'il y a quelque originalité, on la verra plutôt dans le mode d'exposition, et le souci de partir, non directement du résultat, mais d'une sorte de clavier primitif où toutes les notes sont encore possibles ; et de montrer comment le restreindre progressivement pour arriver à notre piano. Les étapes définies en route sont illustrées par des claviers imaginaires. La présentation ouvre à des systèmes musicaux arbitraires, ce que le développement occidental empêche, avec son cycle des quintes omniprésent⁴. Ce dernier, qui prétend même donner automatiquement la seule et bonne solution, n'est qu'un cas particulier d'une approche plus générale dont je veux donner l'esprit. Sans toutefois expliciter les mathématiques reliant les solutions proposées aux principes annoncés : cela sort du cadre de cet exposé⁵. Je montre simplement que le clavier de piano que nous avons sous les yeux répond aux préceptes mis en avant, fonctionnant au moins comme guides de présentation. Pardon à ceux que je fais trop souffrir ; merci aux critiques de tous !

2. Les notes et leurs fréquences

Avant de commencer, parlons un instant des fréquences associées aux notes. La fréquence est la valeur d'un paramètre physique qui caractérise la note : plus elle est aiguë, plus la fréquence est élevée⁶. Si on regarde l'objet qui produit la note, une corde vibrante par exemple, la fréquence est inversement proportionnelle à sa longueur (toutes choses égales par ailleurs, c'est-à-dire à masse linéique et tension constantes, et en passant sous silence pour l'instant le fait qu'une même corde puisse vibrer selon plusieurs modes et produire plusieurs sons en même temps, appelés harmoniques). Voyez la taille du violon et celle du violoncelle : une corde deux fois plus courte pour l'un, une fréquence deux fois plus élevée, un son plus aigu. Ou encore : une corde deux fois plus longue pour l'autre, une fréquence divisée par deux, un son plus grave. Et ainsi de suite pour des fréquences dans des rapports définis par diverses puissances de deux, c'est-à-dire 2, 4, 8 etc. ce que l'on écrit 2^n , pour $n = 1, 2, 3$; mais

⁴ Le premier gain de ce texte est de m'avoir fait apprendre un peu de solfège. Et de m'avoir conduit à constater une complexité que j'étais loin d'imaginer, et qui ne cesse d'augmenter au fil de mes lectures et conversations. Enfonçant sans doute des portes ouvertes pour les spécialistes, je mets un point final provisoire à cette quête, avant la nouvelle version qui apportera les corrections indispensables.

⁵ Et soulignerait sans doute les limites de mon approche.

⁶ Une fréquence comptée en Herz, noté Hz, est un nombre de vibrations par secondes ; on connaît le La3 de référence, de fréquence 440 Hz.

aussi pour les racines carrées, cubiques, quatrièmes etc. de 2 que l'on écrit $2^{1/n}$. Si l'on appelle $f(l)$ la fréquence de la corde de longueur l , ces propriétés s'écrivent de la façon suivante :

$$f(2l) = f(l)/2 \qquad f(2^n l) = f(l)/2^n$$

$$f(l/2) = 2f(l) \qquad f(l/2^n) = 2^n f(l)$$

Les relations précédentes sont valables avec des facteurs quelconques α , non forcément des puissances de deux, par exemple : $f(\alpha l) = f(l)/\alpha$ (toutes choses égales par ailleurs également). Si l'on ouvre le ventre du piano pour voir les longueurs des cordes, on visualise donc la forme de la fonction exponentielle ou logarithmique⁷.

Un fait remarquable est que *les notes correspondant à des fréquences égales à des puissances de deux d'une même fréquence, c'est-à-dire produites par des cordes de longueur double ou moitié etc. d'une corde donnée, donnent la même impression sonore*. C'est pour cette raison que nous avons mis en valeur à l'instant les puissances de 2. Cela fut déjà observé par les grecs de l'école dite de Pythagore (ca. – 580, ca. – 495) ; résultat mis en relation avec le fait que de telles cordes vibrantes partagent des notes communes (grâce aux harmoniques : la corde de longueur l va surtout vibrer sur toute sa longueur, mais aussi un peu selon deux morceaux de longueur $l/2$, produisant alors la même note que celle dominante de la corde de longueur totale $l/2$, etc.). On parle d'octave pour la période qui apparaît entre une note et la note de fréquence double ou moitié (ce mot sera compris par la suite), permettant un décalage des touches « en retrouvant la même impression ». Lorsque l'on joue des do situés dans des octaves différentes, on n'entend qu'un seul effet. C'est presque comme si c'était la même note⁸. Par le jeu des harmoniques de rang successifs (partage d'une corde en deux, en trois etc.) les notes correspondantes vont de moins en moins bien ensemble. Dans la suite de l'exposé, nous commencerons par oublier ces octaves pour avoir un point de vue plus général.

⁷ A condition que les cordes soient rangées de façon monotone, c'est-à-dire dans l'ordre de leurs longueurs, ce qui anticipe sur la suite de l'exposé. On peut se servir d'un piano comme règle à calcul : on ouvre le piano : pour multiplier les nombres p et q , on repère les cordes en correspondance avec p et q et on se déplace à la corde d'indice $p+q$: sa longueur nous donne le produit $p.q$ (principe de la méthode que nous ne précisons pas davantage ici).

⁸ Mais ce n'est pas la même note, comme les promoteurs du cycle des quintes ont parfois tendance à l'oublier (voir plus loin).

3. Trois contraintes $A(r_{ij})$, $T_{p,\alpha}$ et H

Venons-en à notre logique supposée implacable. Comme nous l'avons annoncé, des contraintes mathématiques vont agir pour rendre compte du $\{7 ; 5 ; 2\}$. Nous en repérons trois⁹ et les appelons $A(r_{ij})$, $T_{p,\alpha}$ et H , les nombres r_{ij} , p et α intervenant dans les contraintes A et T étant discutés dans un instant. Les différentes notes sont définies par des indices i , j etc. En mathématiques une contrainte est une relation que vont remplir les variables qui nous intéressent, et qui restreint l'éventail des valeurs.

$A(r_{ij})$, contrainte d'accord

*Deux notes voisines i et j , frappées en même temps ou successivement, donnent une impression sonore agréable si leurs fréquences f_i et f_j sont dans un rapport de (petits) nombres entiers $f_j/f_i = r_{ij}$. Ce point de vue est différent de celui sous-jacent à l'octave mais le rejoint ; nous parlons d'impression sonore agréable (on dirait aussi sympathie entre deux notes), non de *même* impression sonore. A ce stade les rapports r_{ij} ne présentent pas forcément de liens entre eux. On pourra envisager d'emblée un ensemble de valeurs r_{ij} dissemblables (on peut estimer qu'il y a plusieurs rapports agréables et non un seul, et que, suivant les notes, les bons rapports avec les notes voisines sont différents¹⁰), ou, au contraire, une seule valeur, à partir de laquelle on déterminera les autres. En utilisant par exemple le cycle des quintes (voir plus loin), tout se passe comme si l'on disait : il n'y a qu'une note s'accordant avec une note donnée, c'est celle qui est à la quinte (et de proche en proche, d'autres vont arriver). Notre présentation paraît quant à elle plus générale (plusieurs notes s'accordent avec une note donnée et on ne s'occupe pas tout de suite des liens entre elles), mais cache tout de même des liens inévitables entre les notes, par les opérations de transitivité que l'on est amené à effectuer. Il y aura ainsi une convergence entre les deux approches, les légendaires quintes restreignant toutefois davantage le système. Les numéros i et j sont censés ne pas correspondre à des notes exagérément éloignées, c'est-à-dire qu'ils ne sont pas « trop » différents. Cette contrainte, exprimée mathématiquement mais d'origine en somme physique*

⁹ Ces contraintes n'ont pas été énoncées ainsi dans l'aventure musicale ; comme je l'ai dit, elles font partie de ma relecture du clavier. Le mot contrainte a un sens mathématique obligeant ! On pourrait aussi parler d'influence, ou d'ingrédient, dans la recette vers la solution.

¹⁰ C'est d'ailleurs le cas dans la gamme occidentale. A la limite, on choisira les r_{ij} , non plus pour leur rendu « agréable », mais à l'intérieur d'un système imposant leur inter-cohérence, selon des contraintes du type de celles décrites dans la suite du texte ; les fréquences choisies s'éloignent alors de rapports de petits nombres entiers.

et psychophysique, se retrouve aussi, avec des nuances, chez les grecs. Nous en avons déjà rendu compte en parlant des harmoniques présentes dans une note donnée.

Les nombres entiers intervenant aux numérateurs et dénominateurs des r_{ij} sont par exemple 2, 3, 4, 5 etc. On s'attend donc à avoir des rapports égaux par exemple à $3/2$, $4/3$, $5/3$, $5/4$, $9/8$ etc¹¹. La question est évidemment de savoir jusqu'où on va quand on parle de nombres entiers petits. Le rapport $243/128$, ou n'importe quel nombre rationnel¹², est-il admissible ? Si l'on a bien retenu la leçon sur les relations entre fréquences et longueurs de cordes vibrantes, on conclura que les longueurs des cordes l_i et l_j correspondant aux notes i et j seront également dans un rapport de petits nombres entiers, inverse du précédent, soit $l_j/l_i = 1/r_{ij}$. Cette contrainte d'accord pourrait aussi s'appeler contrainte d'intervalle juste, selon les traités de solfège.

$T_{\alpha,p}$ contrainte de transposition de rapport α en fréquences et de périodicité p en nombre de notes

*On souhaite faire apparaître une périodicité de p notes, de façon à retrouver dans les nouvelles périodes les mêmes relations d'accord, c'est à dire les mêmes impressions sonores, entre les notes contiguës ; les fréquences des notes en correspondance dans deux périodes voisines sont dans le rapport α . On ne dit pas pour l'instant quelle est la valeur de cette amplitude p , nombre entier : seulement deux ou trois notes ? Ou davantage ? On ne dit pas non plus quelle est la valeur du nombre α qui n'est pas forcément *a priori* entier ; mais, compte-tenu de ce que nous avons dit du jeu des harmoniques, et si on souhaite retrouver des impressions qui se marient d'une période à l'autre, on s'attend plutôt que α soit un entier (égal à 2 par exemple) ou, comme les r_{ij} , un rapport de nombre entiers. Les discussions sur p et sur α sont à première vue indépendantes ; pour éviter d'alourdir l'exposé, elles sont regroupées dans la même contrainte. La condition sur les fréquences faisant intervenir p et α s'écrit :*

$$f_{p+1} = \alpha f_1$$

$$f_{p+2} = \alpha f_2$$

...

¹¹ On aurait pu aussi décider un seul et même rapport entre une note et celle immédiatement suivante, comme fraction de l'octave ; mais on serait passé à côté d'autres ratios (cf. le 3 de la quinte). Une autre façon de déterminer des liens entre les rapports r_{ij} pourrait être de faire fonctionner des contraintes de transposition (voir plus loin) sur des intervalles différents.

¹² Un nombre rationnel est un rapport de deux nombres entiers.

$$f_{2p} = \alpha f_p$$

etc. pour les notes de 1 à p de la première période et de p+1 à 2p de la deuxième. On en tire des relations du type :

$$f_1/f_2 = f_{p+1}/f_{p+2} \quad \text{c'est-à-dire } r_{12} = r_{p+1 \ p+2}$$

exprimant que les notes voisines ont entre elles les mêmes relations dans les différentes périodes et vont provoquer les mêmes impressions auditives comme recherché. On ne dit pas dans le cadre de T si ces impressions sont bonnes ou mauvaises, c'est-à-dire de fréquences vérifiant la contrainte A précédente, telles que les r_{ij} soient des rapports de nombres entiers.

T est une contrainte de polyphonie (on peut aussi parler de contrainte de décalage). C'est bien en effet de chanter, mais tout le monde n'a pas la même voix, certains chantent plus haut, d'autres plus bas, et on veut pouvoir se produire ensemble : il faut alors être en mesure de translater la mélodie vers le haut pour ceux qui chantent plus haut, ou vers le bas pour ceux qui chantent plus bas, en gardant quelque chose qui sonne « pareil » et écrit de façon semblable¹³. C'est un choix naturel. On aurait pu imaginer *a priori* une infinité de notes toutes différentes, sans rapport les unes avec les autres, avec des mélodies que l'on ne peut décaler. L'expérience montre que l'on peut être amené à vouloir transposer une mélodie ou des accords du plus petit degré possible (ce sera d'un demi-ton, le plus petit écart en fréquence) : on perd alors la notion de période (on a alors $p = 1$; on peut aussi dire que l'on a une infinité de périodes possibles). C'est aussi une façon d'élargir la notion de note identique (on disait que deux notes séparées d'une octave comptent pour la même note) : dans le cas d'une transposition d'un degré élémentaire, toutes les notes se valent, toutes peuvent procurer la même impression puisqu'elles peuvent toutes intervenir également à différents degrés d'une mélodie.

¹³ Le décalage peut ou non se traduire par une écriture différente des notes. On peut chanter à l'octave sans changer l'écriture ; on peut aussi décaler de quelques notes (on parle d'une tierce ou d'une quinte par exemple) et devoir le traduire dans une écriture différente. Dans les deux cas, pouvoir agir ainsi suppose une certaine structure de la suite des notes, celle que nous cherchons à mettre en évidence.

H contrainte historique

Si, en faisant jouer les contraintes $A(r_{ij})$ et/ou $T_{\alpha,p}$ on trouve plusieurs solutions (plusieurs notes possibles ; il y en a en toute rigueur une infinité), la solution adoptée résulte d'un choix historique « arbitraire » dont il faut tenir compte. Ce qui est retenu à une étape donnée du raisonnement conditionne les choix ultérieurs, associés à l'exercice éventuellement renouvelé des contraintes mathématiques précédentes. Le choix est historique et géographique, c'est-à-dire dépendant des cultures et civilisations. Il s'exprime par des collections de nombres r_{ij} , p et α différents, pourvu que les organisations des notes respectent les contraintes portant sur ces nombres.

Comme je l'ai déjà dit en note, le mot contrainte peut donner une impression de rigidité excessive. En parlant des contraintes A et T, je souhaite d'abord mettre de l'ordre dans l'exposition et la pensée : A signifie surtout que l'on cherche à allier des notes voisines, T que l'on cherche à se translater et à se ramener à une amplitude restreinte et répétable à l'intérieur de laquelle mener la discussion. L'intérêt de celle-ci réside dans la tentative, jamais achevée complètement, de marier les deux ingrédients (intervalle juste entre notes voisines et octave par exemple ; quinte et octave ne jouent pas des rôles échangeables et leur complémentarité n'est pas parfaite) et laissent ouverts de nombreux choix, exprimés dans H. On parlera de gamme pour un ensemble de p notes (cf. T) ayant de bonnes relations entre elles (cf. A), c'est à dire dans lequel puiser pour jouer simultanément ou successivement sans dissonance.

4. Approche qualitative : une série de claviers potentiels

Etape 1, figure 1

Muni des trois contraintes $A(r_{ij})$, $T_{\alpha,p}$ et H, étudions maintenant comment rendre compte de notre triplet $\{7 ; 5 ; 2\}$, en suivant sur un piano virtuel l'effet des choix successifs. Le point de départ est représenté sur la Figure 1. C'est la situation la plus quelconque comportant une infinité de touches (ou autant qu'on veut, numérotées de 1 à n), correspondant à des notes de fréquences croissantes de la gauche vers la droite (la note j a la fréquence f_j ; les cordes sont donc de plus en plus courtes). La tâche minimale que nous avons déjà effectuée est un

classement des cordes en fréquences croissantes¹⁴. Cette relation d'ordre mise à part, la fréquence de chaque note est sans rapport direct avec celles des notes voisines, et il n'y a pas non plus de périodicité.

Etape 2a, Figure 2a

Si on fait jouer la contrainte $A(r_{ij})$ sur le clavier de la Figure 1, l'allure de ce dernier ne change pas ; toutefois les fréquences ne sont plus complètement arbitraires puisque leurs valeurs pour des notes voisines sont dans des rapports de (petits) nombres entiers r_{ij} . A ce stade, il n'y a pas spécialement de périodicité.

Etape 2b, Figure 2b

Si l'on fait jouer la contrainte $T_{\alpha,p}$, toujours sur le clavier de la Figure 1, on voit apparaître des périodes de p touches, dans des rapports de fréquence α ; p et α étant pour l'instant indéterminés. Ceci signifie que, selon notre définition, si la première période commence à la touche n°1, on va retrouver au bout de p de touches, c'est-à-dire de la touche $p + 1$ jusqu'à la touche $2p$ (2° période), une organisation semblable des notes. Ceci s'écrit par des relations du type $f_{p+1}/f_1 = f_{p+2}/f_2 = \dots = f_{2p}/f_p = \alpha$ où α est le facteur d'augmentation de fréquence d'une période à la suivante. On aura une telle augmentation de fréquence et une telle similitude pour les notes des périodes suivantes (3° période de $2p+1$ à $3p$, 4° période de $3p+1$ à $4p$ et ainsi de suite). On tire de ce qui précède que, par exemple de la première à la troisième période, les rapports de fréquences sont à élever au carré, comme dans $f_{2p+1}/f_1 = \alpha^2$. Et ainsi de suite avec des puissances croissantes de α , en s'éloignant de la première période. Comme on l'a vu en écrivant $T_{\alpha,p}$, la contrainte de transposition impose aussi que le rapport des fréquences de deux notes voisines correspondantes dans une période et dans une autre soit le même (on tire des relations précédentes: $f_{p+2}/f_{p+1} = f_2/f_1$), mais sans être forcément égal à un rapport de deux nombres entiers.

Le nombre α peut pour l'instant être quelconque, et nous ne privilégions pas $\alpha = 2$ ou $1/2$, (changement particulier dont on a dit qu'il ne modifiait pas l'impression auditive). Nous nous permettons en effet d'envisager *a priori* d'autres valeurs (ne s'éloignant pas trop de la constance de l'impression auditive), comme $\alpha = 3$ (ou même des valeurs non entières) etc. On

¹⁴ Nous avons aussi opéré sans le dire une discrétisation, imposée par la structure mécanique du piano : on ne peut faire varier les notes de façon continue comme avec un violon ou une trompette ; on découpe l'échelle des sons en petits incréments perceptibles à l'oreille qui vont correspondre à des cordes différentes du piano.

peut s'attendre qu'une valeur plus petite de α va correspondre à un nombre p de notes également plus petit (pour une configuration « raisonnable » où le nombre de notes à l'intérieur d'une amplitude de fréquences données n'est pas illimité : les différences entre les notes doivent être audibles !), ce qui indique que les discussions sur α et p ne sont pas complètement indépendantes.

Dans le cas d'un doublement de fréquence, on est ramené à étudier un intervalle noté $\{f, 2f\}$, ou $f\{1, 2\}$, ou simplement $\{1, 2\}$, entre une fréquence et son double ; on cherche alors à définir des notes dans l'intervalle restreint, sans couvrir l'infinité des possibilités par une infinité de notes n'ayant rien à voir les unes avec les autres comme les notes de 1 à n de la Figure 1. Et on translate par la suite le résultat semblablement à lui-même autant qu'on veut de la période de base aux autres. Dans le cas général d'une multiplication par α , on cherche à définir des notes dans l'intervalle $\{f, \alpha f\}$ ou $f\{1, \alpha\}$ ou $\{1, \alpha\}$.

Etape 3, Figure 3

Faisons maintenant agir simultanément les deux contraintes $A(r_{ij})$ et $T_{\alpha,p}$ sur le clavier de la Figure 1. Ce qui revient à faire agir $T_{\alpha,p}$ sur le clavier de la Figure 2a, ou $A(r_{ij})$ sur le clavier de la Figure 2b. Les deux opérations sont commutatives. On obtient la disposition de la Figure 3. La contrainte d'accord impose que les fréquences de notes voisines sont dans des rapports de nombres entiers. La contrainte de transposition impose que le rapport des fréquences de deux notes voisines et de même rang dans une période et une autre est le même. Ce qui est nouveau, en additionnant (ou multipliant) ces deux contraintes, c'est que le nombre α n'est maintenant plus quelconque par rapport aux r_{ij} ; il peut être obtenu par multiplication des divers rapports faisant passer de f_1 à f_{p+1} par les diverses notes intermédiaires. Ce qui s'écrit :

$$\alpha = \prod_{i=1}^p r_{i i+1} \quad (1)$$

Où les r_{ij} sont alors limités à des indices immédiatement adjacents de type $r_{i i+1}$. Dans (1) Π signifie produit. Le nombre de touches p dans la période est toujours indéterminé et sans relation directe avec les facteurs r_{ij} . La relation (1) est évidente si on l'écrit

$$\alpha = \prod_{i=1}^p \frac{f_{i+1}}{f_i} = \frac{f_2}{f_1} \cdot \frac{f_3}{f_2} \cdots \frac{f_{p+1}}{f_p} = \frac{f_{p+1}}{f_1}$$

où les différentes fréquences se simplifient.

Une méthode d'obtention des r_{ij}

On peut resserrer les contraintes portant sur les r_{ij} en proposant une méthode de détermination de leurs valeurs inspirée par le cycle des quintes de la musique occidentale. Dans ce cas, on ne part pas d'emblée d'une collection de rapports r_{ij} comme donnée (et satisfaisant des contraintes de type A), mais on construit cette collection à partir d'un seul premier rapport, supposé agréable, et en insérant dans une période de valeur α la suite des rapports nouveaux, obtenus selon la méthode décrite dans ce qui suit.

Dans le cas du cycle des quintes, le rapport unique de départ est égal à $3/2$, et l'on envisage des périodes avec doublement de fréquence ($\alpha = 2$) : à partir d'une note de base (par exemple un do), on multiplie la fréquence du do par des puissances successives de $3/2$. Cela revient à trouver des nouvelles notes en rapports « agréables » avec celles qui les précèdent, et on divise le cas échéant leurs fréquences par des puissances de 2 pour les ramener à l'intérieur de la période $\{f, 2f\}$ (car on dit que c'est la « même » note). La première note obtenue par cette méthode dans la gamme occidentale est un sol, cinquième note, ou quinte, à partir de do (d'où le nom de cycle des quintes).

Restons quant à nous généraux en laissant indéterminé le premier rapport $r_{12'}$ et la période α . Dans $r_{12'}$, l'indice 1 renvoie à la note de départ et l'indice 2' à la première note atteinte par multiplication de la fréquence de base par le rapport $r_{12'} = f_{2'}/f_1$. Le premier rapport choisi est plus petit que α . Le ' indique le caractère provisoire du rang 2' : lorsqu'on aura rempli la période α et décidé de s'arrêter, la suite des notes sera renumérotée. Il convient de bien voir que la halte résulte d'un choix, celui de considérer comme acceptable l'approximation avec laquelle une note obtenue par cette procédure correspond à une note déjà acquise ; il n'y a pas de raison en effet que l'on retombe toujours exactement sur ses pieds. Après la première opération, on multiplie à nouveau le rapport $r_{12'}$ par lui-même pour obtenir une nouvelle note. Deux cas alors sont à envisager : si $(r_{12'})^2 < \alpha$, on appelle $r_{13'}$ ce nouveau rapport, il définit la note 3'. Si $(r_{12'})^2 > \alpha$, on divise alors ce facteur par la première puissance k de α permettant de se ramener dans l'intervalle $\{1, \alpha\}$. On appelle $r_{13'}$ le résultat, il définit la note 3' (celle-ci

n'est pas forcément de fréquence plus grande que la note 2', c'est-à-dire bien classée en matière de progression de l'indice $j = 2', 3'$). On continue la même procédure, engendrant les notes successives 4', 5' etc. dont les rapports à la note de base n° 1 sont définis par $r_{1i'} = (r_{12'})^i / \alpha^k$ (k , fonction de i , est l'exposant de α permettant de se ramener à l'intérieur de la période). Suivant les cas, cette procédure peut être continuée indéfiniment, engendrant une infinité de notes ; on l'arrête pour des raisons « historiques » relevant de la décision d'avoir atteint une « précision » suffisante, ce mot ayant à la fois un sens mathématique et psycho-acoustique ; le stop se fait à la note p telle que $r_{1p'} = (r_{12'})^p / \alpha^q \cong \alpha$, c'est-à-dire correspondant à la note de fréquence α (q est la dernière valeur de k ; on a pris $f = 1$ pour la première fréquence). Cela permet de définir le p de la période. On renumérote alors si besoin les notes 1', 2', 3' etc. pour les mettre dans l'ordre, à l'intérieur de l'intervalle de fréquences $\{1, \alpha\}$. Par cette méthode, on impose des relations entre les r_{ij} voisins du type

$$r_{1(n+1)'} = (r_{1n'})r_{12'} / \alpha^s = (r_{12'})^{n+1} / \alpha^s \quad (2)$$

qui viennent en somme se rajouter à la relation (1) ; $r_{12'}$ est le premier rapport support de la méthode, s est l'exposant éventuel permettant à $r_{1(n+1)'}$ de revenir dans la période $\{1, \alpha\}$, n' et $(n+1)'$ étant les indices des notes obtenues successivement par la méthode avant renumérotation.

Etape 4, Figure 4.

Nous avons à présent défini une certaine structure musicale, caractérisée par des nombres p , α et r_{ij} pour une même période (nous nous limitons maintenant aux indices i et j appartenant à une même période) ; ces nombres sont liés entre eux comme dans la relation (1), ou éventuellement des relations de type (2). Mais cette structure est pour l'instant un cadre vide, même si on a restreint les possibilités par les relations précédentes : on ne sait pas combien il y a de touches dans une période, quel est le décalage α en fréquences, quels sont les rapports de fréquences entre notes voisines...

C'est à ce stade que la jurisprudence va donner plusieurs réponses, toutes compatibles avec cette structure. L'histoire de la musique occidentale montre quels choix particuliers ont été retenus, exprimés dans la contrainte H_{oc} (oc comme occident). Plusieurs exemples sont discutés dans la littérature et présentés comme en amont de la solution de nos pianos

d'aujourd'hui. Donnons-en deux directement utiles pour notre propos : ce sont la gamme de Pythagore (obtenue par cycle des quintes) et la gamme de Zarlin ou des physiciens. Dans les deux cas la transposition se fait sur un doublement de fréquence ($\alpha = 2$) et sur sept notes ($p = 7$, donnant une octave) qui vont correspondre aux sept touches blanches de la gamme de do¹⁵. La contrainte A pour la gamme de Zarlin s'exprime en raisonnant sur deux accords, régis par les nombres $5/4$ et $3/2$ (et non $3/2$ seul), que l'on décale vers le haut ou vers le bas de façon un peu analogue à la méthode des quintes (on rajoute ici les tierces). Les deux gammes de Pythagore et de Zarlin sont représentées dans le Tableau 1. Les valeurs des rapports r_{li} pour $i = 2$ à 8 sont indiquées dans le tableau ; par définition elles sont comprises entre 1 et 2. On donne aussi les valeurs des fréquences possibles des notes ainsi que les ratios entre fréquences voisines.

L'action de H_{oc} sur le clavier de la Figure 3 est représentée sur la Figure 4. On peut maintenant donner le même nom aux sept notes de même rang dans deux périodes ou octaves différentes. Ce sont : do, ré, mi, fa, sol, la, si (nommées ainsi d'après les premières syllabes des vers d'un poème latin ; le do était initialement appelé ut). On parle de gamme diatonique, correspondant à un ensemble de tons de base permettant d'écrire une musique donnée au moins au sens classique (par opposition à la somme totale de tous les tons possibles que l'on va rajouter dans la suite de l'histoire en parlant de gamme « chromatique »).

J'ai commencé à exprimer une insatisfaction à propos du cycle des quintes, et voilà que je viens de donner deux exemples (gammes de Pythagore et de Zarlin) qui en dérivent peu ou prou. Dans l'infinité des possibilités ouvertes par les contraintes A et $T(\alpha = 2)$ nous pouvons effectivement faire d'autres propositions. On peut ainsi imaginer des systèmes où la fréquence de chaque note est multipliée par un seul et même ratio $\alpha^{1/p}$ auquel cas on retombe exactement sur la fréquence α au bout de p notes. Par exemple le ratio $2^{1/8}$ avec une gamme de 8 notes. Ou deux ratios en alternance, l'un double de l'autre, de telle façon qu'au total encore on retombe sur le facteur 2. On peut éventuellement s'appuyer sur l'égalité approchée $3^{12} \cong 2^{19}$ pour trouver une série de puissances de 3 divisées par des puissances de 2 qui s'insère dans l'octave (voir aussi les exemples de la section 8). Dans le Tableau 3, je propose

¹⁵ Bien qu'en toute rigueur la gamme de Pythagore ait été construite par la méthode des quintes à partir du Fa ; on s'arrête au bout de sept notes en estimant que la huitième note obtenue, soit la note appelée aujourd'hui Fa#, est voisine du Fa de départ : d'où le mot *altération* pour nommer la note nouvelle par rapport à l'ancienne, permettant une nouvelle quinte juste.

une suite de sept notes, fondée sur des rapports et des intervalles tous différents (on n'a ni cycle ni théorème des trois longueurs). Le lecteur aura compris qu'il s'agit d'une proposition toute mathématique (parmi l'infinité des gammes déjà proposées) dont j'ignore complètement le caractère harmonieux ou non !

Du point de vue conceptuel, l'étape H_{oc} représente une même étape par rapport aux précédentes, qui avaient préparé une structure musicale. La gamme présentée dans le Tableau 1 s'appelle gamme de do mode majeur, appelé aussi gamme ionienne¹⁶.

5. Pause. Tons et demi-tons ; nouvelle contrainte d'accord (tempérament égal)

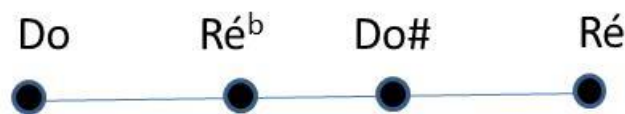
Si l'on regarde de près les intervalles entre les notes de la gamme pythagoricienne, telle qu'elle est écrite pour l'instant, on observe qu'il y en a deux seulement, un grand et un petit, soient $9/8 = 3^2/2^3 = 1,10986$, et $256/243 = 2^8/3^5 = 1,0535$, respectivement. Pour la gamme de Zarlin, il y en a trois, deux grands assez proches l'un de l'autre, et un petit (soient $9/8$ et $10/9$ pour les deux grands, et $16/15$ pour le petit). Le fait que l'on tombe sur deux ou trois valeurs d'intervalle (alors que l'on aurait pu attendre autant d'intervalles différents que de notes, moins un) n'est pas un hasard : cela est conforme au « théorème des trois longueurs » des mathématiciens (voir Gramain, 2011) dans le cadre de la méthode de construction utilisée. On se ramène à une octave après avoir multiplié un rapport particulier par lui-même un certain nombre de fois ; on tombe alors à chaque étape sur un, deux ou au plus trois intervalles ; la propriété se retrouve pour la gamme de Zarlin. On appelle ton le grand intervalle de la gamme de Pythagore et demi-ton le petit (ce vocabulaire est justifié plus bas).

Le premier intervalle pour la gamme de Pythagore est presque égal au carré du second : $(1,0535)^2 = 1,10986$ (arrondis) ou encore 1,11 à comparer à 1,12. D'où l'encouragement que nous avons à parler de ton et demi-ton. On peut se faire la remarque que ce « presque » fait un peu désordre et que ce serait mieux avec deux intervalles dont l'un soit rigoureusement égal au carré de l'autre. Cela ouvrirait, en rajoutant les demi-tons qui nous manquent entre les

¹⁶ A cette étape de l'histoire occidentale, on aurait pu choisir d'autres gammes, correspondant à des séquences d'intervalles, comptés en suites de tons et $1/2$ tons, différentes (la distinction ton - $1/2$ ton est discutée dans la section 4). On a ici, à partir du do, la succession ton - ton - $1/2$ ton - ton - ton - $1/2$ ton (pour la succession ré, mi, fa, sol, la, si), à mêmes valeurs des paramètres $p = 7$ et $\alpha = 2$. On aurait pu avoir d'autres successions par exemple - ton - $1/2$ ton - ton - ton - $1/2$ ton - ton (ce qui revient à commencer le même processus, non à do mais à ré). Dans ces divers cas, cela correspond à des suites de r_{ij} différentes, mais toutes jouant sur tons et $1/2$ tons.

notes séparées d'un ton, un escalier à douze marches ; et on pourrait avoir des décalages plus petits que α , égaux à un ou quelques degrés, permettant des ajustements plus fins entre voix ou instruments jouant plus ou moins haut. Ce sera possible en rendant égales ces 12 parties de l'octave, en fixant alors la valeur du $\frac{1}{2}$ ton = $2^{1/12} = 1,059$ (à comparer à 1,0535 de 256/243) et pour le ton, cette valeur au carré, soit $2^{2/12} = 1,123$ (à comparer à 1,125 de 9/8). En modifiant ainsi tous les intervalles, le grand et le petit, nous aboutissons à ce que nous appelons le tempérament égal (proposé par Werkmeister à la fin du XVII^e siècle). Le résultat est donné dans le Tableau 2 (pour 7 notes).

A ce stade de notre exposé, il est utile de décrire plus précisément la suite de la démarche historique dont nous allons nous éloigner, pour continuer « à tout prix » notre mode de présentation (reposant sur le jeu des contraintes A et T). Après avoir fait apparaître les sept notes d'une gamme dite diatonique (autant de touches blanches pour notre piano), la poursuite de la méthode du cycle des quintes fait apparaître une première note qui ne retombe pas exactement sur une des notes déjà trouvées, mais qui en est proche ; cette proximité fait que l'on ne donne pas à cette nouvelle note un nom complètement nouveau mais qu'on parle d'altération de la note voisine déjà nommée. En continuant de cette façon, on récupère toutes les notes diésées (cycle des quintes ascendant). On décide alors de s'arrêter à 12 (c'est déjà bien !) et on aboutit aux notes bien connues, avec deux longueurs d'intervalle. Par ailleurs, le cycle des quintes descendants fait apparaître les bémols de façon symétrique par rapport aux dièses ; les bémols ne coïncident pas avec les dièses (on n'a pas encore pris de tempérament égal), comme le schéma ci-dessous le montre.



Exemple de disposition de notes diésée et bémolisée à l'intérieur d'un intervalle, ici entre do et ré. Le cycle des quintes montant fait apparaître deux intervalles non égaux : celui entre do et do[#] et celui entre do[#] et ré. Le cycle descendant fait apparaître le ré^b dans une position symétrique.

Cette situation contient potentiellement $12 + 5 = 17$ notes, suivant les accords montants ou descendants que l'on souhaite jouer. C'est dans le cadre de douze notes que le tempérament égal a été proposé, et non dès le stade de sept notes comme nous avons commencé à le présenter. Historiquement, l'instrument du piano est apparu *après* cet établissement de sept +

cinq notes, les cinq notes supplémentaires arrivant ensemble. Nous malmenons donc l'histoire en mettant le tempérament égal avant les notes nouvelles diésées ou bémolisées¹⁷ que nous allons quant à nous faire apparaître successivement (dièses et bémols s'identifiant alors). Toutefois, selon Lattard (1997), la possibilité de transposer la gamme de sept tons grâce à des intervalles supplémentaires a contribué à la définition des douze marches de la gamme chromatique, ce qui rejoint notre façon de présenter les choses.

Etape 5, Figure 5.

Après action de la nouvelle contrainte d'accord de tempérament égal (que nous pourrions appeler $A = W(\text{ton}, \frac{1}{2} \text{ ton})$, avec W pour Werkmeister) sur la Figure 4, on obtient le clavier de la Figure 5. On a toujours $\alpha = 2$ et $p = 7$. Les écarts sont ordonnés entre les sept notes existantes pour l'instant.

6. Où il faut de nouvelles notes et de nouvelles touches (nouvelle contrainte de transposition)

Etape 6, Figure 6

Nous sommes prêts pour vouloir plus. A la suite de la section précédente, nous nous disons maintenant que la contrainte de polyphonie pourrait jouer sur une transposition moins grande qu'une octave. Avec par exemple $p = 1$ ou 2 et non 7 ! Avec les tempéraments égaux on peut translater les sept touches blanches de n'importe quelle quantité, et, à condition d'intercaler dans la gamme suivante des touches pour les demi tons qui manquent (un $\text{do}\#$ par exemple entre le do et le ré , etc.), on pourra reconstruire une même séquence de tons et demi-tons. Ce faisant, on fait alors fonctionner une nouvelle contrainte de transposition par extension, car ce n'est pas sur un ensemble de notes existantes que se fait le décalage : il faut faire en même temps apparaître de nouvelles notes.

¹⁷ Il existe historiquement un clavier où dièses et bémol sont joués par deux touches différentes ; on a 19 notes par octave. Abandonné car trop compliqué. Le fait qu'il y ait une seule touche noire entre deux blanches fait penser que cette touche a une seule valeur de note (et non deux comme serait un dièse et un bémol non égalisés) et donne à penser que l'on arrive effectivement après le choix d'un tempérament égal. En réalité, c'est plus subtil : une unique touche noire pouvait historiquement être accordée de différentes façons, autant que les blanches, suivant des choix tenant aux goûts de l'accordeur et du joueur, et du type d'harmonies rencontrées dans le morceau à jouer

Pour une translation d'une seule note, nous parlerons encore d'une contrainte de transposition $T(1, 2^{1/12})$, ou simplement T_1 ; $p = 1$, $\alpha = 2^{1/12} = 1/2$ ton. Faisons donc agir cette contrainte T_1 sur le clavier de la Figure 5. Il faut alors mettre deux notes nouvelles entre les blanches existantes : une entre le fa et le sol, nous pouvons l'appeler fa dièse ou sol bémol (qui s'identifient dans le tempérament égal) ; et une entre le do et le ré, nous pouvons l'appeler do dièse ou ré bémol. Les nouveaux noms s'appuient sur ceux de la gamme diatonique initiale. Voilà les premières noires ! Fig. 6.

Etape 7, Figure 7

Faisons maintenant agir la contrainte $T_2 = T(2, 2^{2/12})$ sur le clavier de la Figure 5 (ou la contrainte T_1 sur le clavier de la Figure 6). Il faut alors mettre deux notes nouvelles, qui seront le sol dièse et le ré dièse, et l'on va rajouter des touches noires comme on vient de le faire dans l'étape précédente (Figure 6). Le résultat est donné sur la Figure 7.

Etape 8, Figure 8

Si nous faisons agir la contrainte T_1 sur le clavier de la figure précédente (ce qui revient à la faire agir trois fois sur le clavier initial de la Fig. 5), on doit faire apparaître une dernière note noire supplémentaire qui est le la dièse ou si bémol. Voir Fig. 8, on a fini ! Les nouvelles contraintes T_1 , T_2 et T_3 vérifient $T_i = T(i, 2^{i/12})$ et (1) montre que $r_{i+1} = cte = 2^{1/12}$ pour deux indices i et $j = i + 1$ adjacents.

7. Le point sur la constitution du présent clavier : retour sur le chemin parcouru

On appelle gamme chromatique la suite de 12 notes que nous venons d'obtenir. Une telle gamme est commune à plusieurs gammes diatoniques, chacune étant choisie de façon privilégiée pour un morceau de musique donné, au moins dans le cadre classique. Au total on est satisfait, on a récupéré toutes les touches noires, et on a le clavier auquel on est habitué... Si l'on récapitule : la contrainte de transposition sur un doublement de fréquence impose la largeur d'une période ; la contrainte d'accord assortie du choix d'un arrêt (H) impose un premier nombre fini égal à 7 dans la période. Ensuite, le jeu renouvelé de T , sous la forme de T_1, T_2 etc. finit de mettre les noires entre les blanches. Le paramètre p passe alors de 7 à 12.

La dualité entre les touches noires et les touches blanches renvoie somme toute à l'histoire ; si on ne s'était pas d'abord arrêté à 7 en allant tout de suite jusqu'à 12, toutes les touches seraient potentiellement de la même couleur¹⁸. L'existence des touches noires n'est pas le signe de l'existence en soi des demi tons ni des dièses ou bémols (les intervalles mi/fa, et si/do sont déjà là dans la série blanche alors qu'ils sont d'un demi-ton) mais de l'ordre dans lequel on les a décidées. Heureusement, si l'on n'avait que des blanches, on serait perdu !

En bref, la relation (1) s'écrit maintenant :

$$2 = \prod_{i=1}^{12} 2^{1/12}$$

Et le problème mathématique général se formule ainsi : que peut-on dire de nombres rationnels r_{ij} tels que

$$\alpha = \prod_{i=1}^p r_{i i+1}$$

avec p et α entiers (pour le second, la condition d'être entier n'est pas absolue). Il y a une infinité de solutions, non indépendantes, du fait de la relation ; lorsque la transposition se fait sur une seule note, soit $p = 1$ (cf. section 6), alors le rapport r est imposé et égal à α (non entier, de valeur $2^{1/12}$, dans l'histoire que nous avons racontée).

8. Note sur le cycle des quintes ; les autres systèmes musicaux

En annonçant les résultats des sections précédentes, nous avons résumé une énorme évolution historique, non faite sans débats. Pour présenter l'échelle retenue depuis quelques siècles en occident, la démarche la plus répandue dans la littérature renvoie à Pythagore et utilise, nœud de la discussion, le raisonnement sur le cycle des quintes. Comme nous l'avons dit, tout s'articule sur un rapport de fréquences de $3/2$ (supposé « agréable »), entre deux notes susceptibles d'intervenir ensemble ou à la suite dans une musique ; en commençant l'histoire

¹⁸ Signalons au passage un caractère intéressant des relations entre les touches blanches et les touches noires : la répartition au mieux des deux « absences » de touches noires entre les blanches engendre deux groupes « équilibrés » de respectivement deux et trois noires. C'est la répartition que l'imprimeur choisit pour produire une droite de pente $7/12$ lorsqu'il doit la pixéliser (il ne peut la dessiner par un trait continu). En raisonnant ainsi on a fait comme si les nombres 7 et 12 étaient arrivés de façon indépendante et qu'il fallait les ajuster. En réalité, nous avons vu que, lorsque nous arrivons au 12, le 7 s'est déjà « infiltré » en bonne place par la méthode choisie : est-ce un hasard que l'ajustement équilibré soit inscrit dans la procédure ?

au do, la note suivante est le sol, soit la cinquième dans la gamme, d'où le nom de quinte ; on se place dans le cadre d'octaves successives (correspondant à des doublements de fréquences) ramenées à l'octave de départ. Au bout de douze opérations du même type (au cours desquelles on retrouve successivement les sept notes blanches et les cinq noires ; pour respecter ce strict ordonnancement il faut partir du fa, mais la recette est bien la même), on décide de s'arrêter¹⁹. On retrouve la note de départ avec une bonne approximation selon la fameuse relation $(3/2)^{12} \cong 2^7$, ou encore $3^{12} \cong 2^{19}$, où le symbole \cong signifie une égalité approchée²⁰. Cette méthode rend compte également de l'existence de deux types d'intervalles entre les notes (théorème des trois longueurs ; le nombre d'intervalles, 1, 2 ou 3, est fonction du moment où l'on décide de s'arrêter).

Sans du tout nier sa cohérence logique ni son rôle historique, l'utilisation presque exclusive dans les discours sur la musique du cycle des quintes pose une série de questions. Tout d'abord, on particularise d'emblée la recherche en privilégiant les nombres 3/2 et 2 (soient les rapports de fréquences pour l'intervalle sympathique de base d'une part et pour l'octave d'autre part ; certes 2 et 3 sont les premiers nombres entiers que l'on rencontre après 1) : ne risque-t-on pas de passer à côté d'autres systèmes possibles ? Il y a aussi un malaise à dire que le rapport d'accord idéal est 3/2, alors que la méthode nous conduit à d'autres rapports tels 9/8, 27/16... 4/3 présentés comme le rapport 3/2 déguisé, que l'on va s'empresse d'accepter : mais sont-ils autant agréables ? Le trouble associé tient à ce que l'on a décidé d'ignorer la différence entre une même note prise dans différentes octaves. Suivant ce qui nous arrange, on dit que c'est la même note ou deux notes différentes : pour celui qui la produit, l'effort n'est pas le même, quel que soit l'effet sur celui qui la reçoit, et la notion de transposition a précisément sa valeur ! La contradiction vient également de l'annonce d'autres systèmes musicaux ne s'accordant pas avec les règles particulières que l'on s'est donné, tout en présentant ces règles comme générales. On entend simultanément - que le 12 de la gamme chromatique est la seule solution et - que l'on peut trouver d'autres divisions de l'octave (en toute rigueur mathématique le processus du cycle des quintes n'a d'ailleurs pas de fin). On notera de même le « glissement » que représente le choix d'un tempérament égal tournant le dos à des intervalles justes, ou encore celui que représente une transposition d'une octave à celle concernant un nombre plus petit de notes.

¹⁹ En partant du Fa on obtient successivement les notes : Do, Sol, Ré, La, Mi, Si, Fa#, Do#, Sol#, Ré#, La#, Mi#, suite obtenue par notre approche (coïncidence ?).

²⁰ Suivant le recul que l'on a, on peut dire que l'égalité approchée est parfaitement acceptable ou complètement intolérable ! Le choix repose en définitive sur une convention sociale (et acoustique) raisonnable.

Enfin, il est faux de dire que c'est grâce à la relation approchée $3^{12} \cong 2^{19}$ que l'on obtient mécaniquement une gamme à douze notes. Tout d'abord, on a noté que le caractère plus ou moins approché résulte d'une décision. Mais il se trouve aussi que l'on peut faire jouer *la même relation* $3^{12} \cong 2^{19}$, à partir d'un ratio de départ différent de 3/2 et construire des gammes ayant la même légitimité logique. C'est le cas par exemple pour un ratio de départ de 9/8 (qui est celui du ré par rapport au do) ou un ratio de départ de 27/16 (qui est celui du la par rapport au do). Ce sont deux rapports de puissances de trois à des puissances de deux.

En partant d'un rapport de 9/8

On a $9/8 = 3^2/2^3$. Comme dans la démarche du cycle des quintes, on multiplie ce ratio par lui-même autant de fois que possible, et on divise par deux le résultat s'il le faut pour rester dans la même octave. Combien de fois p cela sera-t-il possible compte tenu de l'égalité décidée $3^{12} \cong 2^{19}$? Un autre nombre q intervient, il correspond à la puissance de 2 utilisée la dernière fois pour revenir au point de départ. On a ainsi l'équation :

$$(3^2/2^3)^p = 2^q$$

Ou encore $3^{2p} = 2^{q+3p}$

à identifier à $3^{12} = 2^{19}$

Ce qui donne $2p = 12$ $q + 3p = 19$

On en tire $p = 6$ (et $q = 1$: on reste dans la même octave). On divise donc l'octave en 6 notes avec un seul intervalle. Elles correspondent à do, ré (1), mi (2), fa dièse (3), sol dièse (4), la dièse (5), do (6), où l'on indique entre parenthèse l'ordre d'apparition des notes.

En partant d'un rapport de 27/16

On a $27/16 = 3^3 / 2^4$. En suivant la même méthode, on a les équations $3p = 12$, $4p + q = 19$. D'où $p = 4$ ($q = 3$), on divise la gamme en 4, les intervalles sont encore égaux. Les quatre notes sont : do, ré dièse (3), fa dièse (2), la (1), do (4).

Cette méthode peut être appliquée de façon générale avec deux nombres a (un rapport « agréable ») et α (un rapport de fréquence pour une période) quelconques (différents de $3/2$ et 2), et cherchant les nombres entiers p et q vérifiant $a^p \cong \alpha^q$. On est alors amené à chercher un nombre rationnel p/q qui soit le plus proche du rapport $\log a / \log \alpha$. On prend les entiers p et q permettant d'ajuster au mieux ce rapport (suivant la précision que l'on accepte). Le nombre de notes dans cette gamme est p . Dans son article, Gramain (2011) donne deux autres exemples obtenus par cette méthode, tous deux avec $\alpha = 2$. Pour un rapport de départ égal à $3/5$ on obtient $p = 5$ soient 5 notes dans une gamme pentatonique de tempérament égal (les notes ne correspondent pas aux notes habituelles, l'auteur les appelle do , $ré^p$, mi^p , sol^p , la^p et do , avec un exposant p comme pentatonique pour indiquer leur modification par rapport aux notes habituelles). Avec le rapport $4/7$, on obtient une gamme heptatonique à 7 tons égaux dénotés do , $ré^h$, mi^h , fa^h , sol^h , la^h , si^h , et do ; l'exposant h signifie heptatonique. Dans le cas d'un rapport de $7/12$ on obtient directement une gamme avec 12 intervalles égaux, c'est la gamme tempérée de Werkmeister dont nous avons parlé et que Bach a propagée²¹. Gramain rappelle aussi la gamme pentatonique dite chinoise correspondant aux cinq touches noires, et qui ne boucle pas sur elle-même.

Timbre et cycle des quintes

Un mot sur la question du timbre (dont la discussion approfondie sort du champ de notre propos). Un piano réel ne produit de notes pures mais, pour une touche jouée, tout un ensemble de notes de poids variés en plus de la note « principale » (le timbre résulte de cette pondération propre à chaque instrument). Nous avons parlé des harmoniques : dans la mesure où les fréquences $2f$, $4f$, etc. (suivant les puissances de 2) comptent pour la « même » note, on voit que la fréquence $3f$, apparaissant parmi les premières, a un poids spécial. N'est-ce pas une raison de la place éminente du cycle des quintes dans la discussion sur la construction de la gamme (et du moindre succès des autres approches) ? Sans doute. Nous remarquerons toutefois que la discussion mathématique s'y rapportant ne prend en compte à chaque fois que la note principale (dont on cherche à accorder la fréquence avec des notes voisines dans une succession) et non l'ensemble des notes produisant le timbre.

²¹ Attention que l'on raisonne alors en logarithmes (\ln) dans des égalités du type $3/5 = \ln(a)/\ln(2)$; on cherche p et q tels que : $(2^{3/5})^p = 2^q$. Une solution est $p = 5$, $q = 3$.

Autres systèmes musicaux

On voit ainsi que les contraintes (accord, transposition) mises en avant, dans une formulation plus générale qu'un appui strict sur le cycle des quintes dans une octave, s'accordent heureusement avec la musique occidentale, sans exclure d'autres organisations des notes. En parcourant la littérature (sans recherche approfondie ni vérification), on rencontre de très nombreuses gammes (celles démontrées à l'instant pour $p = 4, 5, 6$ n'en constituent qu'une infime partie). Evoquons rapidement certaines d'entre elles : des périodes définies par $\alpha = 1,9$ ou $2,1$ pour une « quasi-octave » ; ou $\alpha = 3$, du do au sol de l'octave suivante (en Inde, gamme coexistant avec une nomenclature basée sur $\alpha = 2$). Ou encore des « méga-octaves » avec $\alpha = 4$, voire 8. Du côté du nombre de degrés à l'intérieur de l'octave (avec $\alpha = 2$), on rencontre une étonnante variété de cas : 17, 19, 22, 23, 24, 26, 29, 31, 41, 43, 48, 53, 55... On voit citer divers compositeurs, tels Messiaen, Debussy, Chopin, ainsi que des mathématiciens..., qui auraient exploré, chacun à sa façon, des gammes buissonnières. Il ne semble pas que toutes les structures rencontrées reposent sur des rapports de fréquences r_{ij} reliés entre eux par une unique législation. Un travail de recherche serait de chercher à quels $A(r_{ij})$ et $T_{p,\alpha}$ correspondent les divers cas : une partie d'entre eux correspond à une poursuite du cycle des quintes au-delà des douze premières notes qu'il engendre. Nous ne rentrons pas dans la discussion sur la structure des micro-intervalles sous-jacents (division d'un ton en neuf commas pythagoriciens, distinguant quatre commas pour le demi-ton diatonique et cinq commas pour le demi-ton chromatique). On penche alors vers une virtuosité mathématique non forcément en relation avec des émotions musicales à la hauteur.

D'autres claviers

Nous pourrions montrer des claviers associés à ces nouveaux systèmes. On pourrait déjà, pour la gamme habituelle et ses 12 degrés, peindre toute touche arbitrairement en blanc ou en noir. En restant dans les gammes occidentales, nous avons le loisir d'envisager des pianos fondés sur des gammes majeures d'autres modes, c'est à dire non de do, mais de toutes les notes suivantes. En gardant la même succession blanc / noir, on observe que, pour le mode de ré majeur, le fa est noir (Figure 10). Sur la Figure 11, nous avons représenté un clavier imaginaire à gamme pentatonique. Sur la Figure 12 enfin, un clavier un peu plus fou.

11. Conclusion

Mettons un terme provisoire à cet apprentissage. Nous avons mesuré le paradoxe fécond d'un impossible ajustement entre quinte et octave, ou de façon plus générale entre contrainte d'accord et contrainte de transposition²². Il nous reste, de façon dominante dans la musique occidentale ce nombre de $2^{1/12}$, apparemment loin des cordes vibrantes de coexistence agréable des grecs, et du $3/2$ de la quinte. Et pourtant $2^{1/12}$ est la trace de la recherche d'un bouclage d'un ensemble de notes, et de la proximité à un intervalle pris dans un ensemble restreint, limité par le théorème des trois longueurs. L'accordeur de piano arrive-t-il pourtant avec son $2^{1/12}$ portatif pour inspecter tous les intervalles, note après note ? Non. Pour ceux que j'ai vus, ces spécialistes fonctionnent avec des accords sur plusieurs notes selon des choix qui leur sont personnels. Heureuse imperfection, est-elle en rapport avec l'émoi que le piano fait naître, au moins par ceux qui ne le jouent pas trop mal ? Refermons le dossier. L'instrument, non. C'est à mon tour...

Remerciements.

Je remercie Souha Mahlis qui à Saint Etienne, sans se lasser, m'apprend à jouer du piano avec mes doigts et non seulement dans ma tête ; Jean-Pierre Hamelin joueur virtuose qui à Belle Ile m'a encouragé à écrire ce texte et fait d'utiles remarques sur la question du timbre (section 10). Philippe Coueignoux avec qui à Boston j'ai eu une première discussion sur le sujet du présent texte (du cycle des quintes aux soucis de l'imprimeur, note 18). Marc Doumas qui m'a éclairé sur la théorie musicale et sur bien des points utiles à la rédaction. Thierry Mayer a accordé notre piano et expliqué comment le $2^{1/12}$ n'était son premier outil pour ce faire ! Merci à François et André Gramain pour leur secours mathématique (au moins dans la transmission !). Je salue tous mes amis pianistes, mes petits-enfants musiciens à Lyon, Dole et Bordeaux; tous mes amis experts du piano. Jouons, chantons ! Lors d'une précédente version, j'avais donné le titre : « L'aigle et le fa noir, regard sur un clavier de piano » ; manifestant, pensais-je, un hommage souriant à la chanteuse Barbara et son piano. Ayant compris depuis ce qu'il y avait de sombre derrière cet oiseau, j'ai changé mes mots, sans renier mon attachement. La référence à l'œuvre de Guy Bernard (voir ci-après) est tout à fait authentique (merci à MD).

²² Pour Marc Doumas « la musique se joue dans le compromis entre irrégularité (indivisibilité) transcendante (théorique) et égalité immanente (pratique) ». Autre façon de dire que le cycle des quintes n'en est pas un du point de vue mathématique.

Travaux consultés

- Pierre-Yves Asselin (1985) *Musique et tempérament*, Editions Jobert-Costallat, 236 p.
- Guy Bernard (1961) *L'art de la musique*, Seghers, Paris, 702 p.
- Laurent Gautier (2018) *Gammes et théories musicales*, Internet, 47 p.
- André Gramain (2011) *Introduction au solfège*, inédit, 11 p. + 3 annexes.
- Jean Lattard (1997) *Musique : gamme et tempéraments, de Pythagore aux simulations informatiques*, 224 p.
- Jean Lattard (2003) *Intervalles, échelles, tempéraments et accordages musicaux*, L'Harmattan, 242 p.
- David Louapre (2018) *Mathématiques de la musique*, vidéo youtube.
- Bernard Parzys (1984) *Musique et mathématiques, suivi de Gammes naturelles* par Yves Hellegouarch, Association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public, n°53, 164 p.
- Michel Philippot (2008) *Gamme*, Encyclopedia Universalis, Paris, tome 10, pp. 419-422.
- Pour la science (2018) *Good vibrations*, hors série, n°100, 108 p.
- Jean-François Récoché (2017) *Fréquence et musique*, dossier thématique n°3, 12 p.
- Wikipédia : nombreux articles sur la théorie de la musique, consultés en 2017 et 2018 (cordes vibrantes, fréquence, gammes, tempéraments etc.)
- .

	Do	Ré	Mi	Fa	Sol	La	Si	Do
Numéro de la note	1	2	3	4	5	6	7	8
Gamme de Pythagore Fréquences ramenées à une octave	1	9/8 $3^2/2^3$	81/64 $3^4/2^6$	4/3 $2^2/3$	3/2 $3/2$	27/16 $3^3/2^4$	243/128 $3^5/2^7$	2 2
Valeur de la fréquence	1	1,125	1,266	1,33	1,5	1,688	1,898	2
N° d'ordre d'apparition en utilisant le cycle des quintes		4	6	1	3	5	7	2
Fréquences (htz) dans l'octave n°3	261,63	294,33	331,13	348,84	392,44	441,50	496,69	523,26
Rapports de fréquences note/ note précédente		9/8 $3^2/2^3$ ton 1,125	9/8 $3^2/2^3$ ton	256/243 $2^8/3^5$ ½ ton 1,053	9/8 $3^2/2^3$ Ton	9/8 $3^2/2^3$ ton	9/8 $3^2/2^3$ ton	256/243 $2^8/3^5$ ½ ton
Gamme de Zarlin Fréquences ramenées à une octave	1	9/8	5/4	4/3	3/2	5/3	15/8	2
Valeur de la fréquence	1	1,125	1,25	1,33	1,5	1,67	1,875	2
Rapports de fréquences note/ note précédente	16/15 1,067	9/8 1,125	10/9 1,11	16/15 1,067	9/8 1,125	10/9 1,11	9/8 1,125	16/15 1,067

Tableau 1

Fréquences (en Hertz) et rapports de fréquences dans les gammes diatoniques de Pythagore (do majeur) et de Zarlin (ou des physiciens).

	Do	Ré	Mi	Fa	Sol	La	Si	Do
Gamme diatonique à tempérament égal Fréquences ramenées à une octave	1	$2^{2/12}$	$2^{4/12}$	$2^{5/12}$	$2^{7/12}$	$2^{9/12}$	$2^{11/12}$	2
Valeur numérique		1,123	1,260	1,335	1,498	1,682	1,888	2
Fréquences (htz) dans l'octave n°3	261,63	293,66	329,63	349,23	392,00	440,00	493,88	523,26
Rapports de fréquences Note / note précédente		$2^{2/12}$ Ton 1,123	$2^{2/12}$ ton	$2^{1/12}$ ½ ton 1,059	$2^{2/12}$ ton	$2^{2/12}$ Ton	$2^{2/12}$ ton	$2^{1/12}$ ½ ton

Tableau 2

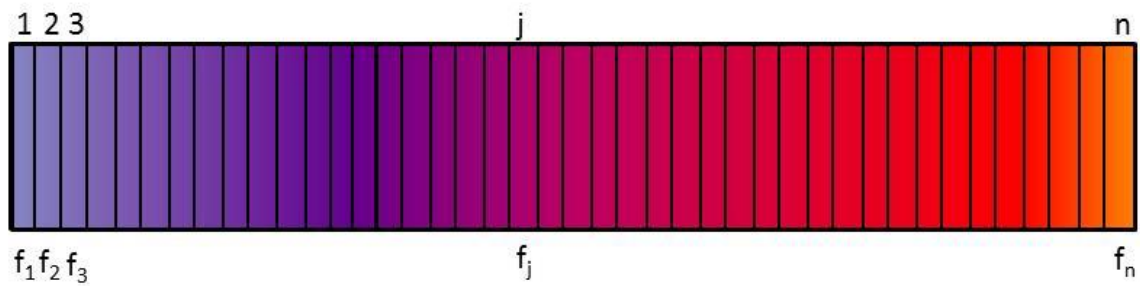
Fréquences et rapports de fréquences dans la gamme diatonique de tempérament égal

	Do	Ré	Mi	Fa	Sol	La	Si	Do
Gamme des Sept Fréquences ramenées à une octave	1	14/13	14/12 = 7/6	14/11	14/10 = 7/5	14/9	14/8 = 7/4	2
Valeur numérique	1	1,077	1,167	1,273	1,4	1,556	1,75	2
Fréquences (htz) dans l'octave n°3	261,63	281,76	305,24	332,98	368,26	406,98	457,85	523,26
Rapports de fréquences Note / note précédente		14/13	13/12	12/11	11/10	10/9	9/8	8/7

Tableau 3

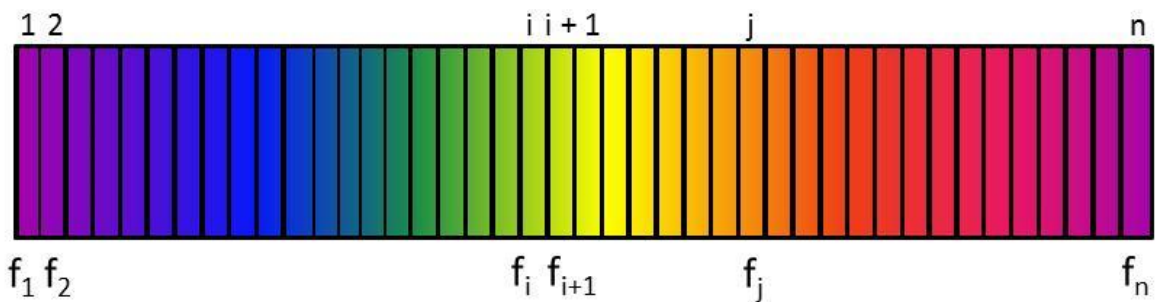
Fréquences et rapports de fréquences dans la « gamme des Sept »

Proposition de l'auteur. Les mêmes noms de do, ré, mi, fa etc. sont utilisés même si les fréquences sont différentes des fréquences habituelles.



1

$$f_1 < f_2 < f_3 < \dots < f_j < \dots < f_n$$



2a

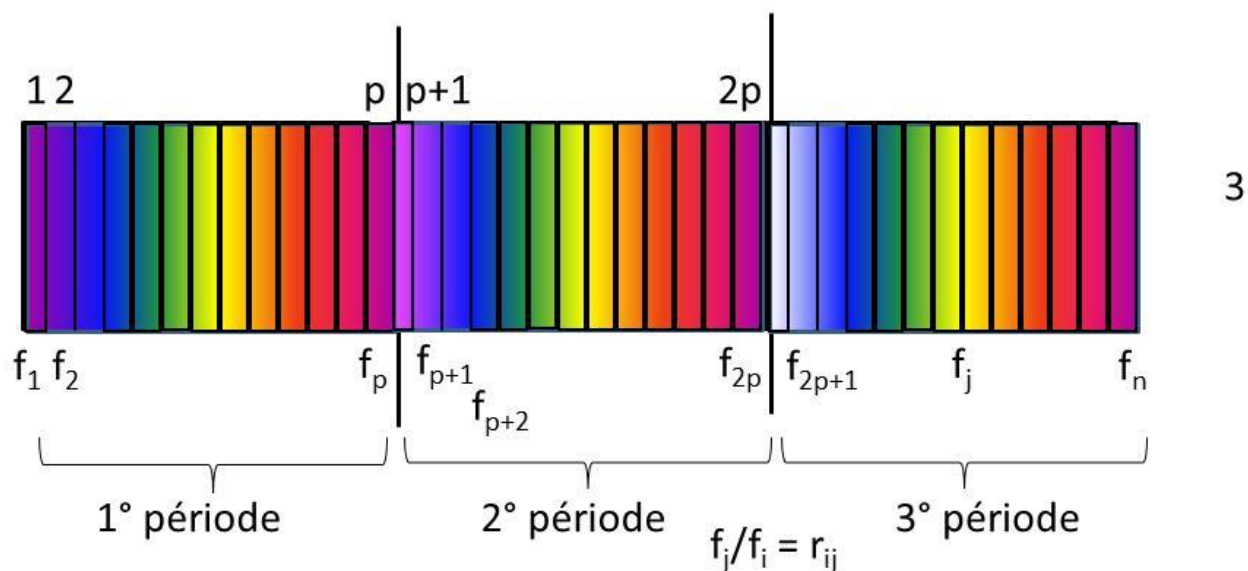
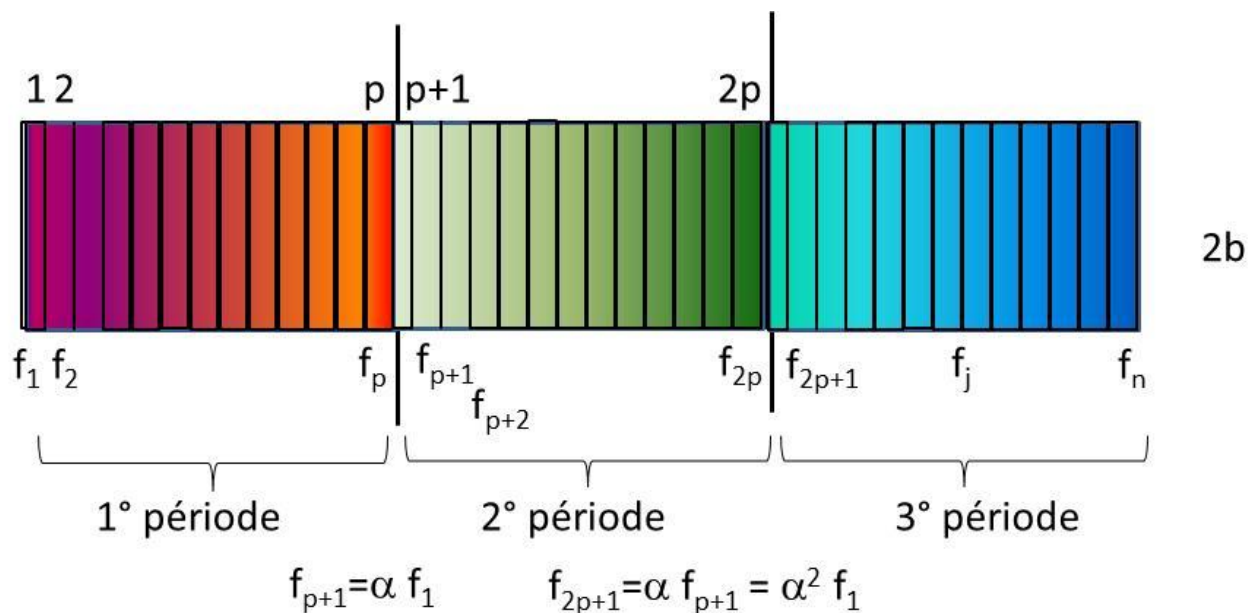
$$f_2/f_1 = r_{12}$$

$$f_{i+1}/f_i = r_{i i+1}$$

$$f_1 < f_2 < f_3 < \dots < f_j < \dots < f_n$$

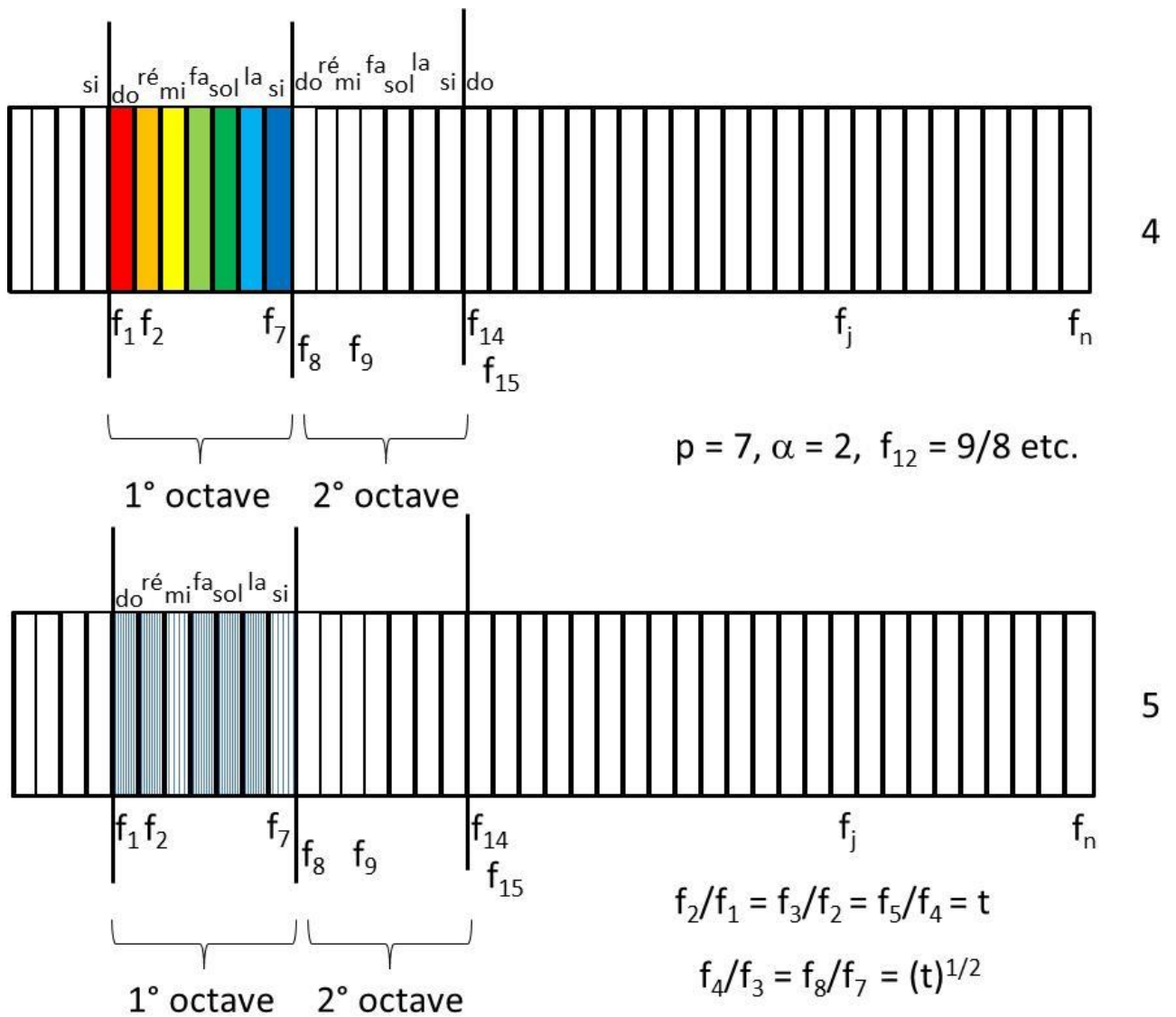
Figures 1, 2a

La Figure 1 montre un clavier indifférencié où les notes sont rangées par fréquences croissantes sans aucune autre spécification. En 2a, on a fait jouer la contrainte d'accord sur le clavier initial, et les notes voisines ont maintenant des fréquences dans des rapports de nombres entiers $f_j/f_i = r_{ij}$. On pourrait décider par exemple que la fréquence de chaque note est égale à la précédente multipliée par le facteur $4/3$. Sur le dessin, le nombre de touches entre deux notes, par exemple entre f_3 et f_j , ou entre f_j et f_n (Fig. 1), est arbitraire et ne correspond pas forcément à celui que l'on peut y compter. On a mis un fond coloré avec un dégradé de couleur pour montrer la progression monotone des fréquences des notes, avec des variations plus marquées en 2a qu'en 1. Dans la théorie musicale, le mot couleur est utilisé au sens figuré.



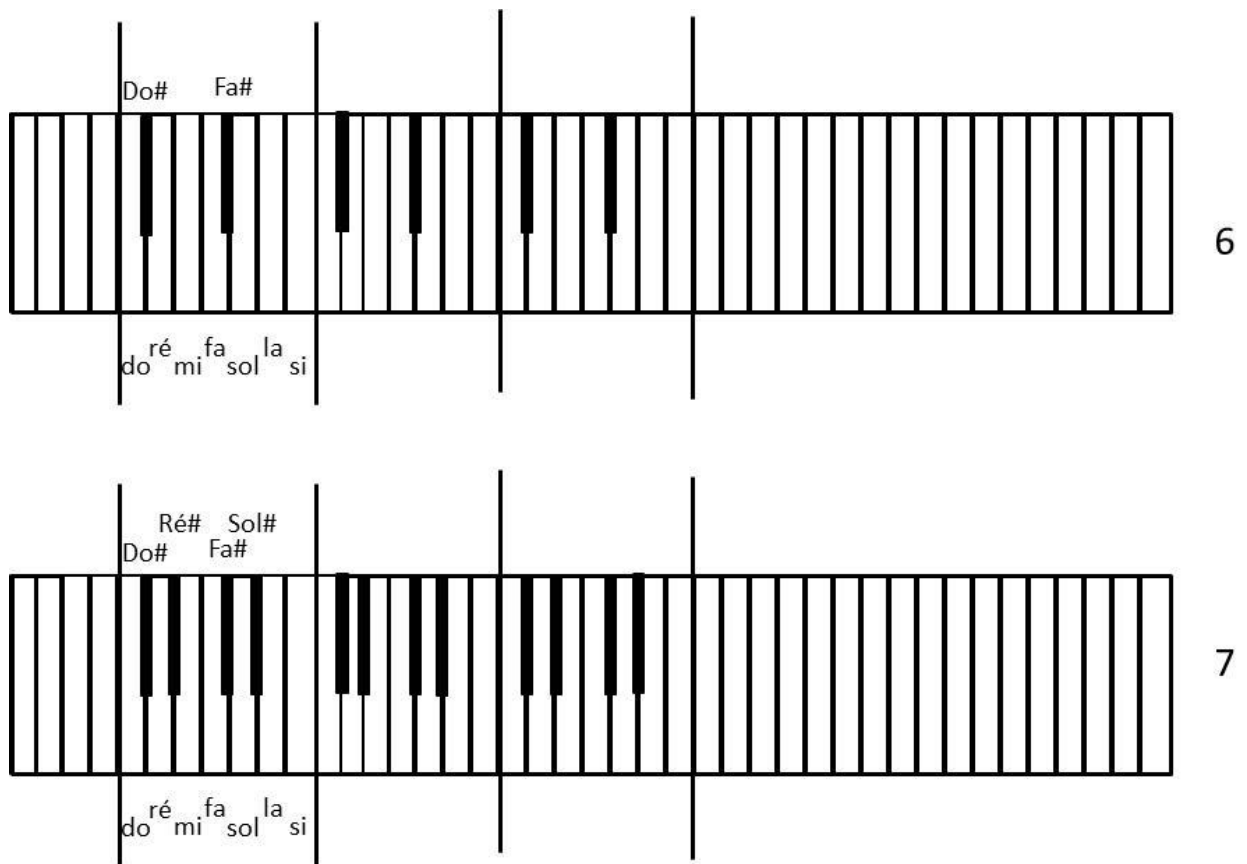
Figures 2b et 3

En 2b, on a fait jouer la contrainte de transposition, toujours sur le clavier initial (Figure 1), et l'on a fait apparaître des périodes contenant p notes chacune. Sur la Figure 3, on a fait jouer les deux contraintes d'accord et de transposition ensemble sur le clavier initial (Fig. 1). On a des périodes de p notes, avec des notes voisines dont les rapports de fréquences ne sont pas arbitraires. Gestion des couleurs : en 2b, on suggère des morceaux qui ont une similitude entre eux, sachant qu'en 3 les notes elles-mêmes à l'intérieur des périodes sont ajustées entre elles en fréquences.



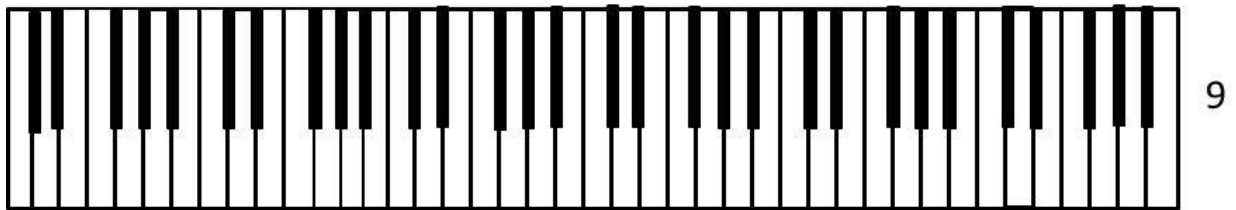
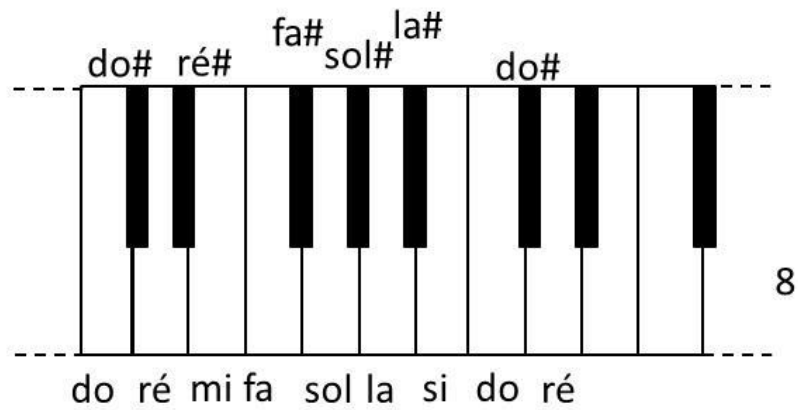
Figures 4 et 5

En 4, selon le choix historique, on a une période égale à 7 et un doublement de fréquence pour le passage d'une période à la suivante ($\alpha = 2$). On peut alors nommer les sept notes : do, ré, mi, fa, sol, la, si (les couleurs ont une simple visée esthétique). En 5 on ajuste au mieux les différents intervalles de sorte qu'ils se ramènent à deux possibilités seulement non indépendantes entre elles (ton et demi-ton), le produit de tous les intervalles étant toujours égal à 2 (octave) ; on obtient un clavier de tempérament égal avec pour le demi-ton : $1/2t = 2^{1/12}$ (autre étape historique). Les figurés sont là pour montrer la dualité d'intervalles rencontrés.



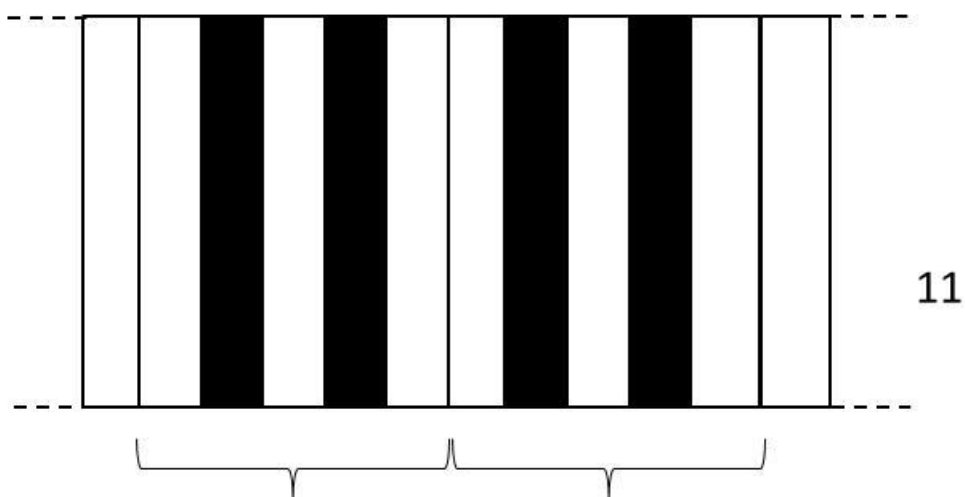
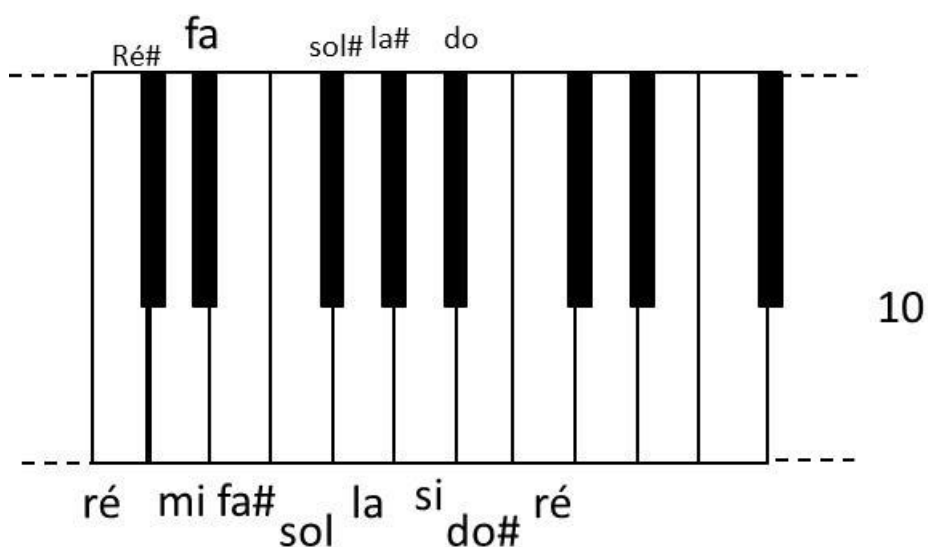
Figures 6 et 7

Sur la figure 6, on a fait jouer la contrainte de transposition sur une note seulement, à partir du do ; on fait apparaître deux notes supplémentaires (do# et fa#). En 7 on recommence l'opération et l'on fait apparaître deux notes supplémentaires (ré# et sol#).



Figures 8 et 9

Sur la Figure 8, on a fait jouer la contrainte de transposition sur une note seulement, à partir du clavier de la Figure 7. On aboutit alors au clavier que nous connaissons et la « construction conceptuelle » est achevée. Sur la Figure 9 on a le clavier auquel on est habitué.



Figures 10 et 11

Sur la Figure 10, on a gardé la même alternance de tons et de demi-tons que dans la gamme de do, et on a aussi gardé la même succession de touches blanches et noires. La différence est que l'on part du ré au lieu du do. Dans cette disposition, le fa est noir.

Sur la Figure 11, on a représenté une portion d'un clavier imaginaire où l'on joue sur des gammes ne comportant que cinq notes chacune (ce peut être une octave divisée en cinq parties égales par exemple). Pour différencier les touches, deux sont noires ; et pour marquer le début et la fin des octaves, deux touches blanches se suivent. La touche noire n'est pas la marque d'un demi-ton ; on peut remarquer symétriquement que la touche blanche n'est pas la marque d'un ton : dans la gamme habituelle, le mi et le fa sont tous deux blancs alors que séparés d'un demi-ton.

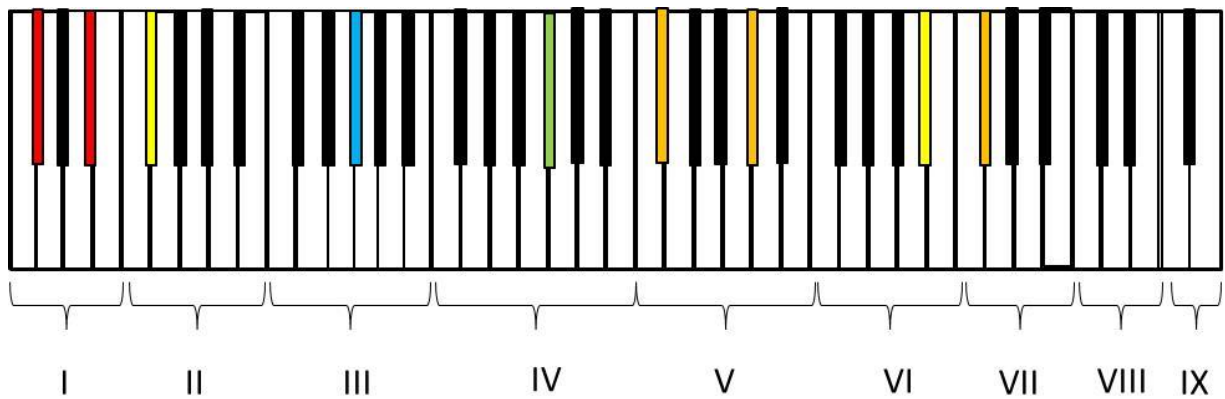


Figure 12

Clavier imaginaire montrant un arrangement d'intervalles comprenant des nombres de notes différents, numérotés I, II, ... VIII et IX. On n'en sait pas plus à ce stade : les intervalles correspondent-ils chacun à une amplitude d'une « octave » avec doublement de fréquence d'un intervalle à l'autre ? Les intervalles entre les notes sont-ils égaux ? La différence entre les noires et les blanches repose-t-elle sur des écarts contrastés en fréquences ? Que représentent les touches colorées ?