



**HAL**  
open science

## Sur la structure des tenseurs isotropes et des tenseurs de révolution

Jean Jacques Moreau

► **To cite this version:**

Jean Jacques Moreau. Sur la structure des tenseurs isotropes et des tenseurs de révolution. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Série IV, Physique, Astronomie, 1954, 238, pp.441-443. hal-01947908

**HAL Id: hal-01947908**

**<https://hal.science/hal-01947908>**

Submitted on 7 Dec 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

GÉOMÉTRIE. — *Sur la structure des tenseurs isotropes et des tenseurs de révolution.*

Note de M. JEAN-JACQUES MOREAU, présentée par M. Henri Villat.

L'auteur démontre, par de simples calculs d'algèbre tensorielle, que tout tenseur isotrope est un polynôme tensoriel en  $\varepsilon$  et  $\delta$ .

Dans de précédentes Notes <sup>(1)</sup>, nous avons donné un catalogue des tenseurs isotropes à deux ou trois dimensions, pour les ordres usuels, ainsi que des tenseurs de révolution. De même que dans les études antérieures de Cisotti et de ses continuateurs <sup>(2)</sup>, nous nous étions appuyés, pour dresser ce catalogue, sur des considérations d'invariance particulières à chacun des ordres. On arrive de la sorte à la présomption qu'un tenseur isotrope d'ordre quelconque doit pouvoir se représenter par une combinaison linéaire de tenseurs élémentaires obtenus eux-mêmes par multiplication tensorielle de symboles  $\varepsilon$  et  $\delta$ .

La démonstration de ce théorème de structure peut être rattachée à la théorie algébrique des invariants du groupe orthogonal, fondée sur l'identité de Capelli <sup>(3)</sup>, théorie assez longue et délicate. La tentative de démonstration de Pastori <sup>(4)</sup>, basée sur le décompte des paramètres est très insuffisante. Les

<sup>(1)</sup> *Comptes rendus*, 230, 1950, p. 1734 et 231, 1950, p. 1028.

<sup>(2)</sup> CISOTTI, *Atti dei Lincei*, 11, 1930, p. 727, 917 et 1055; CALDONAZZO, *Atti dei Lincei*, 15, 1932, p. 842. Voir également : JEFFREYS, *Methods of Mathematical Physics*, Cambridge, 1931. Pour le décompte du nombre de tenseurs isotropes indépendants, voir RACAN, *Atti dei Lincei*, 17, 1933, p. 386.

<sup>(3)</sup> Voir H. WEYL, *The Classical Groups*, Princeton, 1939.

<sup>(4)</sup> *Atti dei Lincei*, 12, 1930, p. 374 et 499.

raisonnements divers employés par ailleurs dans ce domaine sont souvent viciés par une confusion entre la dépendance algébrique et la dépendance fonctionnelle.

Nous donnons ici une démonstration simple et élémentaire du théorème, en nous bornant au cas de trois dimensions. Les coordonnées sont orthonormales.

1° Pour que le tenseur  $T_{ijk\dots}$  d'ordre  $n$ , soit isotrope, il faut et il suffit que la forme multilinéaire

$$L = T_{ijk\dots} a_i b_j c_k \dots$$

reste invariante lorsque les  $n$  vecteurs  $a_i, b_j, c_k, \dots$  subissent un même déplacement infinitésimal.

$$da_i = \varepsilon_{imp} \omega_m a_p dt$$

et cela, quel que soit le vecteur rotation  $\omega_m$ . Comme

$$dL = T_{ijk\dots} [(da_i) b_j c_k \dots + a_i (db_j) c_k \dots + a_i b_j (dc_k) \dots + \dots]$$

on en tire une *condition nécessaire et suffisante d'isotropie*

$$(1) \quad \varepsilon_{pmi} T_{pjk\dots} + \varepsilon_{pmj} T_{ipk\dots} + \varepsilon_{pmk} T_{ijp\dots} + \dots = 0.$$

2° Procédons alors par récurrence : admettant que tout tenseur isotrope d'ordre  $n - 1$  ou  $n - 2$  s'écrit par combinaison des symboles  $\varepsilon$  et  $\delta$ , on va l'établir pour l'ordre  $n$ .

$T_{ijk\dots}$  étant supposé isotrope, multiplions (1) par  $\varepsilon_{mis}$ . En tenant compte des règles de calcul des  $\varepsilon$  on obtient

$$(2) \quad 2 T_{sjk\dots} + T_{jsk\dots} - \delta_j^s T_{ik\dots} + T_{kjs\dots} - \delta_k^s T_{iji\dots} + \dots = 0.$$

Dans cette égalité apparaissent, à côté du tenseur  $T_{sjk\dots}$ , des tenseurs déduits de celui-là en permutant l'indice  $s$  avec un autre indice, ainsi que des tenseurs contractés, donc isotropes d'ordre  $n - 2$ . Par ailleurs on écrit

$$T_{sjk\dots} - T_{jsk\dots} = \delta_{sj}^i T_{ipk\dots} = \varepsilon_{msj} \varepsilon_{mip} T_{ipk\dots}.$$

Comme  $\varepsilon_{mip} T_{ipk\dots}$  est un tenseur isotrope d'ordre  $n - 1$ , on en déduit, en représentant par  $(\varepsilon, \delta)$  une combinaison de symboles  $\varepsilon$  et  $\delta$ ,

$$T_{jsk\dots} = T_{sjk\dots} + (\varepsilon, \delta).$$

Si l'on tient compte de  $n - 2$  autres relations analogues à la précédente, l'égalité (2) prend finalement la forme

$$(n + 1) T_{sjk\dots} + (\varepsilon, \delta) = 0$$

qui définit bien la structure de  $T_{sjk\dots}$ .

Le calcul est déjà valable pour  $n = 2$ . Comme un tenseur d'ordre zéro, c'est-à-dire un scalaire, est essentiellement isotrope et qu'un tenseur d'ordre 1, c'est-à-dire un vecteur, est nul s'il est isotrope, le théorème est démontré.

3° Des raisonnements analogues permettent l'étude des tenseurs de révolution autour d'une direction de l'espace définie par un vecteur  $a_i$ . Ces tenseurs sont des combinaisons linéaires d'expressions tensorielles construites au moyen des symboles  $\varepsilon$  et  $\delta$  et du vecteur  $a_i$ .

GÉOMÉTRIE. — *La connexion des variétés fibrées. II.*

Note (\*) de M. SHÔSHICHI KOBAYASHI, présentée par M. Joseph Pérès.

1. Les notations et les définitions sont celles de notre Note précédente (1). Soit  $\Omega_x$  un H-espace (2) des lacets différentiables par morceaux au point  $x$  d'une variété B.  $f' \in \Omega_x$  est dit un *allongement* de  $f \in \Omega_x$  (où  $f$  est un *accourcissement* de  $f'$ ), s'il existe des nombres  $t_i \in I$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ) tels que  $t_1 \leq t_2 \leq t_3$  et des fonctions continues différentiables par morceaux :