



HAL
open science

Sur la dynamique d'un écoulement rotationnel

Jean Jacques Moreau

► **To cite this version:**

Jean Jacques Moreau. Sur la dynamique d'un écoulement rotationnel. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Série IV, Physique, Astronomie, 1949, 229, pp.100-102. hal-01947747

HAL Id: hal-01947747

<https://hal.science/hal-01947747v1>

Submitted on 7 Dec 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Note de M. JEAN-JACQUES MOREAU, présentée par M. Henri Villat.

Dans une Note antérieure ⁽¹⁾, nous avons montré comment on pouvait, par la seule considération du champ de tourbillon $\vec{\omega}$ dresser le bilan dynamique d'un milieu incompressible quelconque emplissant l'espace ou le plan, moyennant des conditions à l'infini usuellement vérifiées. Les intégrales

$$\vec{I} = \iiint_D \vec{OM} \wedge \vec{\omega} d\tau$$

et

$$\vec{J} = - \iiint_D OM^2 \vec{\omega} d\tau$$

jouent pour cela un rôle tout analogue à celui de la résultante cinétique et du moment cinétique.

Le cas d'une portion limitée de milieu incompressible donne également lieu à des résultats simples si l'on suppose que le milieu, de propriétés quelconques à l'intérieur, est *helmholtzien* dans le voisinage de la frontière S. Nous voulons dire par là que dans cette région le milieu se réduit à un fluide parfait et que les actions à distance qu'il subit dérivent d'un potentiel uniforme. A ce cas se ramènent les problèmes usuels concernant un solide immergé dans un fluide parfait. Il vient alors comme expressions de la résultante \vec{R} et du moment résultant \vec{H} des actions sans potentiel appliquées dans le domaine D ⁽²⁾ :

$$\frac{1}{\rho} \vec{R} = \frac{d\vec{I}}{dt} - \iint_S \left[\frac{1}{2} u^2 \vec{\alpha} - (\vec{u} \cdot \vec{\alpha}) \vec{u} \right] d\sigma - \iint_S \vec{OM} \wedge \vec{u} (\vec{\alpha} \cdot \vec{\omega}) d\sigma,$$

$$\frac{1}{\rho} \vec{H} = \frac{d\vec{J}}{dt} - \iint_S OM \wedge \left[\frac{1}{2} u^2 \vec{\alpha} - (\vec{u} \cdot \vec{\alpha}) \vec{u} \right] d\sigma + \iint_S OM^2 \vec{u} (\vec{\alpha} \cdot \vec{\omega}) d\sigma,$$

\vec{u} : vecteur vitesse du milieu,

$\vec{\alpha}$: vecteur unité normal extérieur en chaque point de S.

Les dérivations d/dt sont effectuées en supposant que la portion D de milieu conserve son individualité matérielle. On rejoint aisément à partir de là les formules données par M. Pérès ⁽³⁾ pour le cas d'un écoulement périodique.

En outre

$$\iint_S \left[\frac{1}{2} u^2 \vec{\alpha} - (\vec{u} \cdot \vec{\alpha}) \vec{u} \right] d\sigma = 2 \iiint_D \vec{u} \wedge \vec{\omega} d\tau = \vec{A},$$

$$\iint_S \vec{OM} \wedge \left[\frac{1}{2} u^2 \vec{\alpha} - (\vec{u} \cdot \vec{\alpha}) \vec{u} \right] d\sigma = 2 \iiint_D \vec{OM} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{\omega}) d\tau = \vec{B}.$$

Si l'on suppose de plus que la structure tourbillonnaire de D est *fermée*,

⁽²⁾ Ces actions sans potentiel ne sont évidemment définies qu'à un gradient additif près, mais elles doivent s'annuler sur S, d'après l'hypothèse. On en conclut que \vec{R} et \vec{H} sont bien définis.

⁽³⁾ *Comptes rendus du III^e Congrès International de Mécanique appliquée*, Stockholm, 1931, vol. 1, p. 132.

⁽¹⁾ *Comptes rendus*, 226, 1948, p. 1420.

c'est-à-dire que $\vec{\omega}$ est sur S tangential ou nul, on peut décomposer \vec{u} en la somme d'un champ \vec{u}^i induit selon les formules de Biot-Savart par la structure tourbillonnaire intérieure et d'un terme complémentaire \vec{v} : *vitesse primitive*. On trouve alors que les contributions de \vec{u}^i dans \vec{A} et \vec{B} sont nulles, de sorte que ces termes se réduisent à des intégrales d'interaction entre la structure tourbillonnaire de D et la vitesse primitive, formellement analogues à des actions électromagnétiques

$$\vec{\alpha} = 2 \iiint_D \vec{r} \wedge \vec{\omega} d\tau,$$

$$\vec{\beta} = 2 \iiint_D \vec{OM} \wedge (\vec{r} \wedge \vec{\omega}) d\tau.$$

Et il reste

$$\vec{R} = \rho \frac{d\vec{I}}{dt} - \rho \vec{\alpha},$$

$$\vec{H} = \rho \frac{d\vec{J}}{dt} - \rho \vec{\beta}.$$

On peut voir là une généralisation large, mais directe, du théorème classique de Joukowski.

Tous ces résultats s'étendent au cas où D contient des singularités ou des discontinuités, interprétées comme des limites de répartitions tourbillonnaires. En particulier, un *doublet hydrodynamique* de moment \vec{L} , localisé en un point P contribue respectivement aux expressions de \vec{I} et \vec{J} par les quantités \vec{L} et $\vec{OP} \wedge \vec{L}$.

D'une manière générale, d'ailleurs, si la structure tourbillonnaire de D est *fermée*, on peut montrer que les intégrales \vec{I} et \vec{J} sont respectivement la résultante et le moment résultant d'un *torseur* indépendant du choix de l'origine O que nous appelons par extension le *torseur de polarisation* du système matériel.