HAL
open science

Sur l'interprétation tourbillonnaire des surfaces de glissement

Jean Jacques Moreau

To cite this version:

Jean Jacques Moreau. Sur l'interprétation tourbillonnaire des surfaces de glissement. Comptes Rendus de l'Academie des Sciences. Série IV, Physique, Astronomie, 1949, 228, pp.1923-1925. hal-01947739

HAL Id: hal-01947739

https://hal.science/hal-01947739

Submitted on 7 Dec 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

MÉCANIQUE DES FLUIDES. — *Sur l'interprétation tourbillonnaire des surfaces de glissement.* Note de M. **Jean-Jacques Moreau**, présentée par M. Henri Villat.

L'équivalence d'une *surface de glissement*, au sein d'un fluide, à une répartition tourbillonnaire superficielle est classique et intuitive, du moins au point de vue descriptif. Nous montrons d'une manière générale que cette assimilation est légitime pour toute transformation intégrale, déduite des formules de Stokes ou d'Ostrogradsky, dans laquelle le champ de vitesse $\vec{u}$ intervient linéairement (directement et par l'intermédiaire du tourbillon $\vec{\omega}$). Il en va également de même pour certaines transformations intégrales *quadratiques* qui jouent un rôle important en hydrodynamique.

La surface de glissement S, stationnaire ou non, partage le fluide en deux régions D′ et D″; soient $\vec{u}'$ et $\vec{u}''$ les vitesses correspondantes au voisinage de S (discontinuité purement tangentielle) et soit α le vecteur unité normal en un point de S, orienté de D″ vers D′. Un élément $d\sigma$ de la surface S équivaut pour la transformation des intégrales, à une cellule spatiale $d\tau$ dans laquelle le vecteur tourbillon ω serait tel que

$$d\vec{K} = \vec{\omega}\, d\tau = \frac{1}{2}\vec{\alpha} \wedge \left(\vec{u}' - \vec{u}''\right) d\sigma = \vec{\mu}\, d\sigma.$$

Le vecteur $\vec{\mu}$ est la densité superficielle de tourbillon ou *vorticité superficielle*. Il est d'ailleurs commode de réunir alors les éléments tourbillonnaires propres et impropres sous une notation unique d'intégrales de Stieltjes.

La portée *dynamique* de cette assimilation ne nous paraissait pas avoir été dégagée de façon précise. Helmholtz [1] invoque déjà un déplacement des filets tourbillonnaires de la surface de glissement avec une vitesse égale à la demi-somme des vitesses de part et d'autre, mais élude toute justification. Il semble qu'on n'ait fait par la suite que s'appuyer sur son autorité, alors que cette propriété est en réalité subordonnée à des conditions restrictives.

Nous introduisons une *couche médiane* S*, surface matérielle fictive en mouvement dans S et dont les éléments ont pour vitesse

$$\vec{u}^* = \frac{1}{2}\left(\vec{u}' + \vec{u}''\right).$$

Nous cherchons alors la dérivée par rapport au temps du vecteur élémentaire $\vec{\mu}\, d\sigma$ *en supposant l'élément de surface* $d\sigma$ *entraîné dans le mouvement de la couche médiane*, cela par analogie avec les équations classiques de Helmholtz qui définissent l'évolution de l'élément tourbillonnaire $\vec{\omega}\, d\tau$ lorsque $d\tau$ est une cellule fluide. Il vient

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{\mu}\, d\sigma\right) = \left(\vec{\mu}.\vec{\nabla}\right)\vec{u}^{*}\, d\sigma + 2\,\vec{\omega}^{*}_{\alpha} \wedge \vec{\mu}\, d\sigma + \frac{1}{2}\,\vec{\alpha} \wedge \left(\vec{\gamma}' - \vec{\gamma}''\right) d\sigma,$$

$\vec{\gamma}'$ et $\vec{\gamma}''$, accélérations de part et d'autre de S; $\vec{\omega}^{*}_{\alpha}$, composante normale de $\vec{\omega}^{*} = \left(\vec{\omega}' + \vec{\omega}''\right)/2$.

Si le fluide satisfait aux *condition de Helmholtz :* viscosité nulle, champ de forces extérieures dérivant d'un potentiel, relation entre pression et densité (cas extrême : fluide incompressible), le dernier terme de l'équation précédente s'annule. De même pour l'avant-dernier si $\vec{x}^{*}_{\alpha}$ est nul, *soit usuellement si le tourbillon du fluide ambiant est tangentiel ou nul de part et d'autre de* S. La relation restante exprime que le vecteur $\vec{\mu}\, d\sigma$ évolue selon la même loi qu'un segment infinitésimal transporté par la couche médiane.

On tire de là que les lignes tourbillons, lignes intégrales du champ $\vec{\mu}$, peuvent être considérées comme matériellement liées à la couche médiane; en outre, un arc de courbe de cette couche intercepte un flux tourbillonnaire constant dans le temps : adaptations directes de la théorie des structures tourbillonnaires ordinaires.

Par ailleurs, puisqu'on suppose $\vec{\omega}$ tangentiel de part et d'autre de S, le vecteur de discontinuité $\vec{u}' - \vec{u}''$ est dans la surface S le gradient d'un champ scalaire φ, potentiel de discontinuité. Il apparaît alors que *ce potentiel est défini dans la couche médiane d'une manière indépendante du temps.*

Les mêmes faits se retrouvent sous une forme plus simple dans le cas d'une *ligne de glissement*, au sein d'un fluide plan satisfaisant aux conditions de Helmholtz : le scalaire élémentaire

$$dK' = \left(\vec{u}' - \vec{u}''\right) d\vec{M}$$

est invariant lorsque l'élément vectoriel $d\vec{M}$ est entraîné dans le mouvement de la couche médiane, ici ligne matérielle fictive. Par suite, le potentiel de discontinuité

$$\varphi = \int \left(\vec{u}' - \vec{u}''\right) d\vec{M}$$

est défini dans cette couche d'une manière indépendante du temps.