HAL
open science

Le calcul tensoriel et les opérations vectorielles orientées

Jean Jacques Moreau

To cite this version:

Jean Jacques Moreau. Le calcul tensoriel et les opérations vectorielles orientées. Comptes Rendus de l'Academie des Sciences. Série IV, Physique, Astronomie, 1949, 228, pp.1472-1474. hal-01947721

HAL Id: hal-01947721

https://hal.science/hal-01947721v1

Submitted on 7 Dec 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

GÉOMÉTRIE. — *Le calcul tensoriel et les opérations vectorielles orientées.* Note de M. **Jean-Jacques Moreau**, présentée par M. Henri Villat.

Parmi les opérations classiques du calcul vectoriel, il en est dont la définition invoque le concept d'*orientation* de l'espace : principalement l'opération algé-brique de *multiplication vectorielle* (avec l'opération connexe de multiplication mixte) et l'opération différentielle *rotationnel*.

Un caractère dominant de ces opérations orientées est de ne pas se prêter directement aux notations tensorielles, ce qui oblige parfois à renoncer à leur emploi : des tenseurs antisymétriques du second ordre doivent alors être introduits à la place du produit vectoriel, du rotationnel, du vecteur champ magnetique, etc.

Nous avons cherché, pour notre part, à relier les deux points de vue grâce à un artifice élémentaire qui établit en quelque sorte la liaison entre les algorithmes « intérieurs » et « extérieurs » (1).

Soit, dans l'espace orienté, $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$ un trivecteur de coordonnées, orthonormal et direct. Le déterminant

$$\begin{vmatrix} \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \vec{x}_3 \\ \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \vec{x}_3 \\ \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \vec{x}_3 \end{vmatrix},$$

dont on interprète chaque terme comme le produit tensoriel de trois vecteurs, définit un tenseur du troisième ordre ε. Remplacer le trivecteur par un autre également orthonormal et direct, revient à effectuer sur chaque ligne du déterminant en question une même substitution orthogonale directe et le laisse donc invariant. Le tenseur ε est ainsi un élément intrinsèque de l'espace orienté.

(1) Nous introduisions déjà cette notation dans une communication au Congrès National de l'Aviation Française de 1946 : *Sur les rotations d'une particule en suspension*. (Rapport n° 42/133).

Plus explicitement, les composantes des vecteurs unitaires $\vec{x}_i$ étant de la forme δ_i^k ([2]), les composantes du tenseur s'écrivent

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{vmatrix} \delta_1^i & \delta_2^i & \delta_3^i \\ \delta_1^j & \delta_2^j & \delta_3^j \\ \delta_1^k & \delta_2^k & \delta_3^k \end{vmatrix}$$

Ce tenseur préside, par le simple jeu du calcul tensoriel, à la formation de toutes les opérations orientées : $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ étant trois vecteurs, on trouve immédiatement que le scalaire invariant

$$m = \varepsilon_{ijk} a_i b_j c_k$$

n'est autre que le produit mixte de ces trois vecteurs.

Corrélativement, si

$$\vec{d} = \vec{b} \wedge \vec{c}$$

on a en notation tensorielle

$$d_i = \varepsilon_{ijk} b_j c_k.$$

De même si l'on considère un champ vectoriel $\vec{u}$ et son rotationnel $\vec{r}$, on a

$$r_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}.$$

On voit encore qu'à un tenseur du second ordre T_{jk} s'associe de manière intrinsèque, en géométrie orientée, le vecteur

$$D_i = \varepsilon_{ijk} T_{jk}$$

appelé classiquement *vecteur dual* du tenseur.

D'une façon générale, dans l'espace orienté à n dimensions, on invoquera un *tenseur d'orientation* ε *d'ordre* n qui préside à la définition des opérations orientées. Son introduction permet de saisir l'influence du nombre de dimensions sur le développement du calcul orienté.

Nous nous bornons ici au cas tridimensionnel. Un produit tensoriel du tenseur ε par lui-même conduit par la règle de multiplication des déterminants à l'expression

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn} = \begin{vmatrix} \delta_i & \delta_i^m & \delta_i^n \\ \delta_j^l & \delta_j^m & \delta_j^n \\ \delta_k^l & \delta_k^m & \delta_k^n \end{vmatrix} = \delta_{ijk}^{lmn}$$

ou *symbole de Kronecker généralisé*.

Une contraction donne ensuite, après développement,

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} = \delta_{jk}^{mn} = \delta_j^m \delta_k^n - \delta_j^n \delta_k^m.$$

([2]) On sait que le *symbole de Kronecker* δ_j^k représente l'unité si les indices j et k sont identiques, et zéro s'ils sont différents.

Ce résultat condense pratiquement toute la technique du calcul des opérations orientées. Soient par exemple trois vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ et le double produit vectoriel

$$\vec{p} = \vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c})$$

on écrit

$$p_i = \varepsilon_{ijk} a_j \varepsilon_{klm} b_l c_m = (\delta_i^l \delta_j^m - \delta_j^l \delta_i^m) a_j b_l c_m = a_j b_i c_j - a_j b_j c_i,$$

d'où l'expression classique

$$\vec{p} = (\vec{a}.\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}.\vec{b})\vec{c}.$$