



# Sur l'allure à l'infini d'un écoulement permanent lent

Jean Jacques Moreau

## ► To cite this version:

Jean Jacques Moreau. Sur l'allure à l'infini d'un écoulement permanent lent. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Série IV, Physique, Astronomie, 1947, 224, pp.1469-1472. <hal-01947715>

**HAL Id: hal-01947715**

**<https://hal.science/hal-01947715v1>**

Submitted on 7 Dec 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

MÉCANIQUE DES FLUIDES. — *Sur l'allure à l'infini d'un écoulement permanent lent.* Note <sup>(1)</sup> de M. JEAN-JACQUES MOREAU, présentée par M. Henri Villat.

Les mouvements permanents lents d'un fluide visqueux incompressible dans l'espace à trois dimensions sont régis par les équations aux dérivées partielles de Stokes <sup>(2)</sup>, qu'on écrit sous forme vectorielle

$$(1) \quad \mu \Delta \vec{u} - \text{grad } p = 0,$$

$$(2) \quad \text{div } \vec{u} = 0,$$

où  $\vec{u}$  est le vecteur vitesse et  $p$  la pression (ou, plus généralement, la somme de la pression et d'une fonction de forces).

A notre connaissance, tous les auteurs qui étudient les problèmes extérieurs relatifs aux solutions de ce système sont contraints de préciser l'hypothèse du *repos à l'infini* par les conditions suivantes, posées *a priori* :

$\vec{u}$  est à l'infini de l'ordre de  $1/R$  (ou d'ordre supérieur);

$p$  tend à l'infini vers une constante  $p_0$ , la différence  $p - p_0$  étant de l'ordre de  $1/R^2$  (ou d'ordre supérieur).

Nous montrons pour notre part que le seul fait de supposer la vitesse tendant uniformément vers zéro à l'infini suffit à assurer les deux points précédents.

On peut appuyer la démonstration sur le lemme que voici :

*Si un vecteur  $\vec{v}$  vérifie les équations de Stokes dans tout l'espace et tend uniformément vers zéro à l'infini, il est identiquement nul et la pression correspondante est une constante.*

En effet, d'un point  $M$  comme centre, décrivons une sphère  $\Sigma$  de rayon  $R$ , limitant un domaine  $D$ . Un théorème classique d'analyse vectorielle donne

$$\iint_{\Sigma} \vec{n} \wedge \vec{v} d\sigma = \iiint_D \text{rot } \vec{v} d\tau.$$

Par ailleurs, des équations de Stokes et de l'identité connue

$$(3) \quad \Delta \vec{v} = \text{grad div } \vec{v} - \text{rot rot } \vec{v},$$

on conclut bien aisément <sup>(3)</sup> que le champ vectoriel  $\text{rot } \vec{v}$  est *harmonique*; de ce fait sa valeur en  $M$  est égale à la moyenne dans la sphère :

$$\text{rot } \vec{v}(M) = \frac{3}{4\pi R^3} \iiint_D \text{rot } \vec{v} d\tau = \frac{3}{4\pi R^3} \iint_{\Sigma} \vec{n} \wedge \vec{v} d\sigma.$$

Or,  $\vec{v}$  tendant uniformément vers zéro à l'infini, cette quantité tendra vers zéro

<sup>(2)</sup> Ces équations nous intéressent plutôt pour notre part comme décrivant le phénomène de viscosité *pris à l'état pur*; en l'absence d'inertie elles sont valables, d'une manière générale lorsque les effets d'inertie sont négligeables devant les effets de viscosité : c'est ce qui a lieu pour les *phénomènes microscopiques* se déroulant au sein de fluides réels [Cf. notre communication : *Sur les rotations d'une particule solide de petites dimensions entraînée dans un écoulement* (Congrès National de l'Aviation Française, 1946, rapport nos 42-133)].

<sup>(3)</sup> Par des dérivations, légitimes puisque les solutions du système de Stokes sont indéfiniment dérivables.

<sup>(1)</sup> Séance du 19 mai 1947.

<sup>(2)</sup> Séance du 19 mai 1947.

si l'on fait croître  $R$  indéfiniment (il en sera ainsi, plus généralement, sous la seule condition que  $\vec{v}$  soit *borné*). Donc  $\text{rot } \vec{v} = 0$ . Rapproché de (2) et (3), ce fait montre que le champ  $\vec{v}$  est *harmonique*. Nous sommes ramenés ainsi à une propriété connue des fonctions harmoniques : Les composantes de  $\vec{v}$ , fonctions harmoniques dans tout l'espace et s'annulant uniformément à l'infini sont identiquement nulles (\*). La constance de la pression résulte ensuite de l'équation (1).

Ce point acquis, soit  $\vec{u}, p$  une solution du système de Stokes définie à l'extérieur d'une surface fermée  $S$ , le vecteur  $\vec{u}$  tendant uniformément vers zéro à l'infini.

Nous introduisons une sphère  $\Sigma$  de très grand rayon, renfermant  $S$ . En tout point  $(x_k)$  du domaine compris entre  $S$  et  $\Sigma$ , des formules classiques (†) nous donnent

$$u_i(x_k) = \frac{1}{8\pi\mu} \iint_{S+\Sigma} \left[ U_{ij} \left( \mu \frac{du_j}{dn} - pn_j \right) - u_j \left( \mu \frac{dU_{ij}}{dn} - P_i n_j \right) \right] d\sigma_j$$

$$p(x_k) = \frac{1}{8\pi\mu} \iint_{S+\Sigma} \left[ \mu u_j \frac{dP_j}{dn} - P_j \left( \mu \frac{du_j}{dn} - pn_j \right) \right] d\sigma_j$$

où  $\vec{n}$  représente sur  $S$  le vecteur unité normal intérieur, et sur  $\Sigma$  le vecteur unité normal extérieur,  $U_{ij}(x_k, y_k)$ ,  $P_j(x_k, y_k)$  sont les *solutions fondamentales de Lorentz*. De la structure de ces solutions il résulte que la contribution  $u'_i(x_k)$  de la surface  $S$  dans l'expression de  $u_i$  tend uniformément vers zéro à l'infini. D'autre part les contributions  $u''_i(x_k)$ ,  $p''(x_k)$  de la sphère  $\Sigma$  constituent une solution du système de Stokes, évidemment indépendante du rayon de  $\Sigma$ , si grand soit-il, de sorte qu'elle se trouve définie *dans tout l'espace*. Or, comme  $\vec{u}$  et  $\vec{u}'$  dont il est la différence, le vecteur  $\vec{u}''$  doit tendre uniformément vers zéro à l'infini, d'où sa nullité en vertu du lemme ; et  $p$  se réduit à une constante  $p_0$ .

Les fonctions  $u_i$  et  $p$  sont dès lors exprimées par des intégrales étendues à la surface  $S$  seule, ce qui conduit immédiatement au résultat annoncé. De même les dérivées  $\partial u_i / \partial x_k$  sont de l'ordre de  $1/R^2$  au moins.

Nous avons pu montrer d'ailleurs que ces résultats subsistaient sous une hypothèse un peu plus large que l'annulation uniforme de  $\vec{u}$  à l'infini : ils sont assurés dès qu'on suppose que  $\vec{u}$  tend vers zéro en *moyenne sphérique*, c'est à dire que la moyenne

$$\frac{1}{4\pi R^2} \iint \vec{u} d\sigma$$

sur toute sphère de centre fixe, tend vers zéro lorsque le rayon  $R$  augmente indéfiniment.

(\*) Cf. H. VILLAT, *Mécanique des fluides*, Chap. II, où cette propriété forme le lemme d'une démonstration semblable à celle qui fait l'objet de la présente Note.

(†) Cf. H. VILLAT, *Leçons sur les fluides visqueux*, Chap. IV. Nous passons des notations vectorielles aux notations tensorielles, qui impliquent, comme on sait, la sommation de tout terme monome par rapport à chaque indice qui s'y trouve répété deux fois.