



**HAL**  
open science

## La représentation du temps en mécanique discrète

Vincent Ardourel, Anouk Barberousse

► **To cite this version:**

Vincent Ardourel, Anouk Barberousse. La représentation du temps en mécanique discrète. Christophe Bouton et Philippe Huneman. Temps de la nature, nature du temps. Études philosophiques sur le temps dans les sciences naturelles, CNRS éditions, p. 209-235, 2018. hal-01946063

**HAL Id: hal-01946063**

**<https://hal.science/hal-01946063>**

Submitted on 5 Dec 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# La représentation du temps en mécanique discrète

Vincent Ardourel et Anouk Barberousse

## Résumé

La plupart des modèles et théories physiques utilisent un paramètre continu  $t$  pour représenter le temps. En revanche, les modèles numériques utilisent un paramètre discret  $t_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) pour représenter le temps, les ordinateurs ne pouvant pas traiter des quantités continues. Les relations entre ces deux paramètres temporels ne sont pas sans poser de problème. Pour être résolues sur ordinateurs, les équations continues doivent être remplacées par des équations discrètes. Dans la plupart des cas, les équations discrètes sont obtenues par discrétisation des équations continues, en utilisant des méthodes numériques pour les transformer. Ces méthodes numériques (différences finies, Runge-Kutta, etc.) peuvent conduire à des artefacts lors des calculs sur ordinateurs. Le recours à paramètre discret  $t_k$  est ainsi à la fois ce qui rend possible la révolution computationnelle mais consiste aussi en un pis-aller voire un obstacle à la modélisation des phénomènes physiques. Il existe cependant une manière plus radicale d'introduire un temps discret dans les modèles numériques. Des algorithmes intrinsèquement discrets peuvent être utilisés. Ces derniers semblent éviter certains des problèmes liés à la discrétisation. Le but de chapitre est d'examiner les conséquences de ces approches intrinsèquement discrètes sur la représentation du temps en physique. Plus précisément, nous analysons les conséquences du développement d'une « mécanique discrète » (Lee 1983, 1987), à savoir une mécanique intrinsèquement discrète et pour laquelle le symbole  $t_k$  est une *variable dynamique discrète* et non un simple un *paramètre discret*.

## Introduction

À partir des années 1960, une *mécanique discrète* a été développée par différents mathématiciens et physiciens. Il s'agit d'une théorie physique intrinsèquement discrète, au sens où ses lois et principes fondamentaux sont formulés à l'aide d'équations aux différences. Le but de ce chapitre est d'examiner les conséquences de cette mécanique discrète sur la représentation du temps en physique. Notre hypothèse de travail — qui sera discutée au cours de ce chapitre — est qu'il s'agit d'une *bonne* théorie physique, du moins aussi satisfaisante que les théories physiques traditionnelles pour décrire et prédire les phénomènes, et peut-être même meilleure puisqu'elle est particulièrement bien adaptée au calcul sur ordinateur. Dans un article fondateur de cette théorie, l'un de ses auteurs, le Prix Nobel de physique Tsung-Dao Lee, soulève les deux questions suivantes :

- Au lieu de traiter le temps comme un paramètre continu, nous pourrions nous demander si:
- (1) le temps peut-il être un paramètre discret (une formulation en temps discret)
  - (2) le temps peut-il être discret et traité comme une *bona fide* variable dynamique (mécanique discrète)? (Lee 1983, p. 217)

Nous nous proposons de suivre ces interrogations et de nous intéresser à ces deux aspects de la représentation du temps en mécanique discrète. D'un côté, nous analysons le caractère *discret* de la représentation du temps de cette théorie. De l'autre, nous examinons les conséquences d'une représentation du temps comme *variable* dynamique par opposition à un simple paramètre.

## 1. La mécanique discrète

Pour répondre aux deux questions posées en introduction, nous commençons par expliquer comment les scientifiques introduisent des représentations discrètes pour le temps dans leurs modèles numériques. Pour cela, nous commençons par décrire, dans la section 1.1, différentes méthodes de discrétisation des équations continues avant de se concentrer, dans la section 1.2, à l'analyse de l'une d'entre elle : la méthode symplectique ou variationnelle. Cette méthode numérique nous conduira à l'introduction de la mécanique discrète (MD) à laquelle sont consacrés la section 1.3 et la suite du chapitre.

### 1.1 Discrétisation, modèles numériques et intégrateurs numériques

Le développement de la MD est étroitement lié à celui des modèles numériques, c'est-à-dire les modèles destinés à être calculés sur ordinateurs. Afin de mieux comprendre la spécificité de la MD, il nous faut commencer par examiner comment le temps et les autres grandeurs physiques sont discrétisés pour construire les modèles numériques. Si les ordinateurs sont en effet d'une aide précieuse pour résoudre les équations des théories physiques, une étape préalable est requise. Il faut transformer les équations continues des théories physiques en équations discrètes afin qu'elles puissent être traitées par des ordinateurs. Des algorithmes sont développés dans ce but, appelés des *intégrateurs numériques* dans le cadre de la résolution des équations différentielles. Cette section est consacrée à l'analyse et la comparaison de certains d'entre eux

Parmi les différents intégrateurs numériques, commençons par nous intéresser aux intégrateurs les plus simples : l'intégrateur d'Euler *forward* et l'intégrateur d'Euler *backward*. Le premier transforme la dérivée  $dx/dt=y$  en l'équation discrète  $(x_{k+1}-x_k)/h= y_k$  et le second en l'équation  $(x_{k+1}-x_k)/h= y_{k+1}$ . Considérons par exemple les équations du mouvement du pendule simple. En utilisant chacun de ces intégrateurs, deux équations doivent être transformées à chaque fois. La première correspond à la définition de la vitesse angulaire  $dq/dt=v$  où  $q$  est l'angle que fait le pendule avec la verticale. La seconde équation représente l'évolution de la vitesse angulaire en fonction de la longueur du pendule  $l$  et de l'accélération de la pesanteur  $g$  :  $dv/dt = -g/l \sin(q)$ . Avec l'intégrateur d'Euler forward, les équations discrètes obtenues sont :

$$(q_{k+1} - q_k)/h = v_k \quad \text{et} \quad (v_{k+1} - v_k)/h = -g/l \sin(q_k) \quad (1)$$

Avec l'intégrateur d'Euler backward, les équations discrètes obtenues sont :

$$(q_{k+1} - q_k)/h = v_{k+1} \quad \text{et} \quad (v_{k+1} - v_k)/h = -g/l \sin(q_{k+1}) \quad (2)$$

Introduisons maintenant un autre intégrateur numérique pour résoudre le pendule simple : l'intégrateur *variational* ou *symplectique*. Une première manière de le définir consiste à remarquer qu'il est une sorte de mélange des deux premiers intégrateurs : la première équation différentielle est transformée selon l'intégrateur d'Euler backward et la seconde selon l'intégrateur d'Euler forward :

$$(q_{k+1} - q_k)/h = v_{k+1} \quad \text{et} \quad (v_{k+1} - v_k)/h = -g/l \sin(q_k) \quad (3)$$

Des tests numériques ont été effectués par Stern et Desbrun (2008) pour comparer ces trois intégrateurs (Fig. 1). Les trajectoires du pendule simple ont été calculées sur ordinateur et représentées dans l'espace des phases. Le pendule simple étant un système conservatif, c'est-à-dire qui conserve l'énergie, ses trajectoires sont des courbes fermées d'après les lois de la mécanique de Newton. Cependant, comme on peut le voir sur la Figure 1 (à gauche), les trajectoires obtenues avec l'intégrateur d'Euler forward sont des spirales qui fuient le centre. Cet artefact est le résultat d'instabilité numérique. Avec l'intégrateur d'Euler backward (au milieu) les trajectoires s'enroulent en spirale vers le centre. Cet artefact est cette fois le résultat d'une dissipation numérique. Seules les trajectoires calculées avec l'intégrateur d'Euler symplectique sont des courbes fermées, représentant ainsi correctement le comportement d'un système conservatif.

**Fig. 1 et Fig. 2**

Hairer et al. (2002) ont effectué des tests similaires appliqués aux trajectoires de cinq planètes gravitant autour du soleil. Les calculs numériques ont été exécutés avec les trois intégrateurs sur des périodes de temps représentant 200 000 jours. Les comportements obtenus sont similaires. Avec l'intégrateur d'Euler forward, les trajectoires des planètes sont instables : les planètes quittent leur orbite périodique. Avec l'intégrateur l'intégrateur d'Euler backward, les trajectoires sont aussi instables mais, dans ce cas, les trajectoires des planètes s'effondrent sur le soleil. En revanche, comme on peut le voir sur la Figure 2, l'intégrateur symplectique conduit à de meilleurs résultats : les trajectoires des planètes sont bien périodiques.

Cette différence entre ces trois intégrateurs s'explique principalement par le caractère non-symplectique des algorithmes traditionnels. Cela signifie qu'ils ne conservent pas certaines propriétés géométriques de la dynamique des systèmes mécaniques. Ce défaut est particulièrement problématique lorsque les systèmes étudiés sont conservatifs. Il faut en effet ajouter des mécanismes *ad hoc* pour obtenir un comportement conforme à ce qui est théoriquement attendu. Par contre les intégrateurs symplectiques conservent naturellement ces propriétés globales de la dynamique des systèmes conservatifs. Il n'est plus besoin d'ajouter d'éléments artificiels pour forcer un système mécanique à rester stable. Kang Feng est l'un des mathématiciens qui a largement contribué au développement des intégrateurs symplectiques dans les années 1970. Dans un ouvrage

posthume, son frère souligne que celui-ci avait compris très tôt que ce choix entre ces deux stratégies avaient des conséquences importantes pour la modélisation scientifique :

[Kang Feng] avait bien compris que différentes formulations mathématiques équivalentes d'une même loi physique peuvent se comporter différemment lors d'un calcul sur ordinateur. [...] Ainsi, en mécanique classique, les équations du mouvement de Newton, les équations de la mécanique lagrangienne et celles de la mécanique hamiltonienne se comportent différemment une fois discrétisées. Parce que la formulation hamiltonienne a une structure symplectique, [Kang Feng] avait compris que si l'algorithme pouvait conserver cette propriété géométrique de symplecticité, il serait possible d'éviter la dissipation numérique pour ce type d'algorithme et développer des algorithmes hautement performants. (Feng et Quin 2010, p. x)

De prime abord, les différences entre intégrateurs traditionnels et intégrateurs symplectiques peuvent sembler purement techniques et pertinentes seulement pour les mathématiques appliquées. Mais ce serait négliger la richesse du champ des modèles discrétisés. Ce champ recherche est étroitement lié aux développements des théories physiques et à leurs différentes formulations mathématiques. Plus précisément, nous allons voir que le développement de ces intégrateurs symplectiques apparaît avec le développement d'une mécanique variationnelle discrète.

## 1.2 Des intégrateurs symplectiques à la mécanique discrète

La MD qui nous intéresse dans ce chapitre s'inscrit dans deux directions de recherche distinctes. D'un côté, elle s'inscrit dans la recherche d'algorithmes pour résoudre les équations différentielles sur ordinateur. D'un autre côté, elle s'inscrit dans ce que l'on pourrait qualifier le *tournant géométrique* des théories physiques. Depuis la seconde moitié du XX<sup>e</sup> siècle en effet, les mécaniques lagrangienne et hamiltonienne sont reformulées de manière géométrique, à l'aide de la géométrie différentielle. De nos jours, celle-ci est considérée comme le nouveau langage des théories physiques (Butterfield 2006a, 2006b). Les structures géométriques et les symétries des systèmes physiques occupent une place privilégiée dans leur étude. C'est la raison pour laquelle le développement de modèles discrets qui conservent les structures géométriques retiennent l'attention des scientifiques :

L'essence d'un système mécanique est caractérisée par ses symétries et ses invariants. La conservation de ces symétries et invariants (via par exemple, la conservation des moments) par un algorithme de calcul discret est de première importance s'il on veut retrouver le mouvement continu lors d'une intégration en temps discret. (Stern et Desbrun 2008, p. 75)

La MD est le résultat de ce double soucis méthodologique consistant, d'un côté, à conserver les propriétés globales des systèmes mécaniques en suivant une approche géométrique et, de l'autre, à développer des intégrateurs numériques toujours plus performants.

La formulation lagrangienne de la mécanique classique peut être appréhendée de manière géométrique et ce à l'aide du principe variationnel sur lequel elle repose, le *principe de moindre action*. Dans ce cas, les trajectoires peuvent être vues comme des géodésiques dans l'espace des états. La MD adopte aussi ce point de vue géométrique mais avec une version discrète de la mécanique lagrangienne. Ainsi, comme le soulignent Stern et Desbrun, la mécanique discrète est étroitement liée aux intégrateurs variationnels :

L'idée directrice sous-jacente à la mécanique géométrique discrète consiste à tirer profit de la nature variationnelle de la mécanique et de conserver cette structure variationnelle dans une approche discrète. [...] Si l'on construit un équivalent discret du lagrangien, on peut alors facilement en dériver des équations du mouvement, et ce d'une manière similaire au cas continu. En un mot, on obtiendra des analogues discrets des équations d'Euler-Lagrange qui seront de bonnes méthodes numériques véritablement dérivées d'un principe variationnel. (Stern et Desbrun 2008, p. 79)

La MD n'est pas ainsi pas une version discrète *ad hoc* de la mécanique lagrangienne continue. Elle dérive de la discrétisation du principe variationnel lui-même. Ce fondement variationnel discret garantit la conservation des propriétés géométriques et des invariants dans un cadre discret.

Afin de bien saisir le lien entre la MD et les intégrateurs variationnels, introduisons quelques formules sur l'exemple du pendule simple. Pour cela commençons par rappeler son traitement en mécanique lagrangienne continue. Les équations du mouvement sont déduites de la minimisation de l'action  $S_c$  définie comme l'intégrale du lagrangien  $S_c = \int L_c dt$ . Dans le cas du pendule simple, le lagrangien s'écrit :

$$L_c = \frac{1}{2}ml^2v^2 + mgl \cos(q) \quad (4)$$

où  $q$  est l'angle que fait le pendule avec la verticale,  $l$ , sa longueur,  $v=dq/dt$  la vitesse angulaire,  $m$  la masse du corps, et  $g$  l'accélération de la pesanteur. La minimisation de  $S_c$  conduit aux équations de la section 1.1 :

$$\frac{dv}{dt} = -g/l \sin(q) \quad (5)$$

De la même manière, une action discrète  $S_d$  est définie en MD comme  $S_d = \sum L_d h$  où  $L_d$  est le lagrangien discret et  $S_d$  sa somme discrète au cours du temps discret. Dans le cas du pendule simple, le lagrangien discret peut être défini comme :

$$L_d = \frac{1}{2}ml^2v_{k+1}^2 + mg \cos q_k \quad (6)$$

où  $q_k$  est l'angle du pendule et  $v_{k+1}=(q_{k+1}-q_k)/h$  sa vitesse angulaire discrète. La minimisation de  $S_d$  conduit à l'équation discrète du mouvement :

$$(v_{k+1} - v_k)/h = -\frac{g}{l} \sin q_k \quad (7)$$

Nous voyons maintenant comment la MD est liée aux intégrateurs variationnels. L'équation (7) et la définition de la vitesse angulaire sont précisément les deux *mêmes* équations qui correspondent à l'intégrateur d'Euler symplectique introduit à la section 1.1 (Equation 3). En résumé, la MD est une version discrète de la mécanique classique avec un principe de moindre action comme premier principe et à partir duquel sont dérivées les équations du mouvement. Ces équations discrètes sont très utiles pour le calcul sur ordinateur. Ce sont des intégrateurs symplectiques qui, comme nous l'avons vu à la section 1.1 conduisent à des calculs d'une grande stabilité.

À ce stade de notre introduction de la MD, il nous faut préciser qu'il existe deux versions un peu différentes de cette MD : une version « standard » et une version « étendue ». Jusqu'à maintenant, nous nous sommes intéressés seulement à la première pour laquelle le pas de temps  $h$  est constant. Dans la version étendue, le pas de temps entre chaque instant est *variable*. Celui-ci est noté  $h_k$  entre les instants  $t_k$  et  $t_{k+1}$ . Les instants  $t_1, t_2, t_3 \dots t_{k-1}, t_k$  ne sont ainsi plus séparés d'une quantité égale. La version standard est un cas particulier de la version étendue pour laquelle le pas de temps  $h_k$  est maintenu constant et égal à  $h$  entre chaque instant. Cette version est développée pour construire en pratique les intégrateurs variationnels tel quel l'intégrateur d'Euler symplectique. En effet, la version étendue conduit en général à des algorithmes plus compliqués à implémenter sur ordinateur. Cependant, d'un point de vue théorique, elle est plus satisfaisante car elle autorise davantage de quantités conservées. Non seulement la structure symplectique et les moments sont conservés mais aussi l'énergie est conservée de manière *exacte*. J.E Marsden, l'un des auteurs de la MD, souligne cette extension de la MD :

Contrairement à la mécanique variationnelle standard [...] nous généralisons le cadre théorique pour inclure des variations du temps en plus des variations des variables de configurations habituelles, comme dans Lee (1983) et (1987). [...] Une nouvelle équation est obtenue qui garantit la conservation exacte d'une quantité que nous interprétons comme l'énergie discrète. De cette manière, la définition de l'énergie discrète et sa conservation découlent naturellement d'un principe variationnel. (Marsden et al. 2001, p. 463)

Comme nous l'avons vu dans la section 1.1, l'énergie est particulièrement bien conservée dans la version standard de la MD, celle qui conduit à l'intégrateur d'Euler symplectique. C'est ce qui explique la grande stabilité de ces intégrateurs. Cependant, elle n'est pas conservée *exactement* à chaque instant mais seulement en moyenne : elle oscille légèrement autour d'une valeur moyenne. Au contraire, dans la version étendue de la MD, l'énergie est conservée exactement à chaque instant. Dans la suite du chapitre, nous nous concentrons sur cette version étendue comme version fondamentale de la MD, la version standard étant une version simplifiée pour des besoins pratiques.

### 1.3 La mécanique discrète comme théorie physique

Nous avons vu que la MD est bien différente des procédures permettant aux physiciens de construire des modèles numériques. La stratégie de modélisation n'est pas, d'abord, d'écrire les équations différentielles puis de trouver un moyen ensuite de les discrétiser. Il s'agit de se placer dès le départ dans un cadre discret, en posant un principe fondamental discret et en tirant les équations du mouvement discrètes. Cette spécificité de la MD nous pousse à la considérer comme une authentique *théorie physique* plutôt qu'un ensemble de méthodes numériques. On retrouve cette terminologie dans les travaux de T.D. Lee (1987, p. 844), l'un des premiers auteurs de la MD. Dans cette section, nous explicitons certaines raisons qui justifient selon nous de la qualifier de « théorie physique ».

Tout d'abord, la MD possède un contenu empirique. Ses équations peuvent être interprétées comme décrivant les phénomènes physiques. Les équations d'Euler-Lagrange discrètes en particulier peuvent être interprétées comme décrivant la dynamique des systèmes mécaniques. Nous reviendrons sur ce point en examinant quelques exemples précis tels qu'un corps en chute libre ou un oscillateur harmonique (voir section 2.3). Deuxièmement, la MD partage avec d'autres théories physiques, et notamment avec la mécanique continue, le fait que ses énoncés théoriques puissent être hiérarchisés. La MD repose sur un principe fondamental discret, le principe de moindre action discret. Les lois de la MD, telles que les équations discrètes du mouvement ou la conservation de l'énergie discrète, sont ensuite *déduites* de ce premier principe. Des propriétés théoriques telles que la structure symplectique ou d'autres invariants physiques sont aussi dérivés de ce principe premier. La MD est ainsi une théorie physique du point de vue de son architecture déductive : elle est un ensemble d'énoncés théoriques hiérarchisés. Enfin, les équations de la MD peuvent, pour certaines d'entre elles du moins, être résolues de manière exacte. Par exemple, comme nous allons le voir dans la section 2, il est possible de résoudre de manière exacte le problème de l'oscillateur harmonique. Il s'agit là aussi d'un argument en faveur de l'interprétation de la MD comme une théorie physique. Nous montrerons en effet que la connaissance de résultats exacts contribue à la capacité d'une théorie physique de décrire et d'expliquer les phénomènes.

Même si la MD possède certaines caractéristiques importantes des théories physiques, la question de son autonomie et de son indépendance par rapport à la mécanique continue reste cependant ouverte. La MD pourrait n'être ainsi qu'une *formulation discrète* de la mécanique continue. La différence entre la MD et la mécanique continue ne correspondrait qu'à une différence de notation qui n'affecterait aucunement le contenu empirique de la mécanique continue. Cependant, même si elles partagent le même contenu empirique, différentes formulations d'une même théorie ne décrivent pas forcément les phénomènes de la même manière. Des équations différentes sont mobilisées et qui font appel parfois à des *concepts* différents. C'est par exemple le cas entre les différentes formulations newtonienne, lagrangienne et hamiltonienne de la mécanique continue. J. North va jusqu'à soutenir que les formulations lagrangienne et hamiltonienne possèdent même des « différences irréconciliables » :

Les mécaniques lagrangienne et hamiltonienne peuvent être équivalentes pour l'étude de la mécanique classique. Néanmoins, il y a d'importantes différences entre elles, des différences quant à leur *structure*.(North 2009, p. 19)

Les deux formulations utilisent en effet des espaces des états différents, c'est-à-dire des espaces mathématiques utilisés pour décrire l'évolution des systèmes. En mécanique lagrangienne, un état est décrit par la position  $q$  et la vitesse  $dq/dt$  alors qu'il est décrit par la position  $q$  et le moment conjugué  $p$  en mécanique hamiltonienne. Plus précisément, cette différence correspond, d'un côté, à une variété riemannienne et de l'autre, à une variété symplectique. Cette différence n'est pas du tout négligeable selon North:

Les formulations géométriques modernes suggèrent que le contenu empirique d'une théorie ne se réduit pas à l'ensemble de ses trajectoires possibles. Il y a aussi un espace des états dans lequel les trajectoires s'inscrivent. Et cet espace a une structure. [...] Les mécaniques hamiltonienne et lagrangienne ne sont pas équivalentes du point de vue de cette structure. Cela signifie qu'elles ne tout simplement sont pas équivalente.(North 2009, p. 27)

La question de l'équivalence entre les différentes formulations traditionnelles de la mécanique classique n'est pas seulement empirique mais s'étend ainsi à d'autres aspects des théories. De la même manière, l'espace des états de la MD est différent de celui de la mécanique lagrangienne continue. Il n'y a pas de vitesse  $dq/dt$  en MD. La notion de vitesse n'est pas fondamentale en MD, le mouvement est représenté par une série de positions discrète. Plus précisément, l'espace des états est défini par deux positions successives  $q_k$  et  $q_{k+1}$ . Il y a

ainsi des « différences irréconciliables » entre la mécanique lagrangienne continue et la MD. Ces différences pourraient être même plus radicales encore qu'entre les formulations traditionnelles de la mécanique continue puisque, comme Marsden *et al.* le soulignent, l'espace des états de la MD « n'est pas localement isomorphe [...] à l'espace de des états [traditionnel] de la mécanique lagrangienne » (2001, p. 473).

Après avoir introduit les concepts fondamentaux de la MD, la suite du chapitre est consacrée à l'examen des conséquences de l'utilisation de la MD quant à la représentation du temps.

## 2. Les conséquences d'une représentation discrète du temps

La MD repose sur l'adoption d'une représentation discrète du temps. Mais quelles sont les conséquences de l'utilisation d'une telle représentation discrète pour décrire, prédire et expliquer les phénomènes physiques ? Dans cette section, nous examinons successivement trois réponses possibles. La première serait l'utilisation d'équations qui ne sont pas fondamentales, une réponse qui n'est cependant pas tenable selon nous (section 2.1). La deuxième réponse possible serait l'élimination du continu mathématique en physique. Nous rejetons aussi cette conséquence (section 2.2). La dernière conséquence que nous défendons est celle de l'élimination de la représentation continue du temps en physique (sections 2.3 et 2.4).

### 2.1 Equations discrètes et lois fondamentales

On admet généralement que les équations différentielles, c'est-à-dire des équations continues, sont plus fondamentales que les équations discrètes que sont les équations aux différences. Cette thèse repose sur l'idée selon laquelle les équations aux différences sont nécessairement le résultat de la transformation d'équations différentielles générales. Même si les équations aux différences sont très souvent utilisées en physique, elles sont généralement considérées comme des substituts dont on peut se passer pour décrire les phénomènes, au moins en principe.

La plupart des équations discrètes utilisées dans les modèles numériques sont en effet dérivées d'équations continues auxquelles différentes hypothèses simplificatrices, idéalizations et approximations ont été ajoutées. Les équations discrètes qui en résultent sont spécifiques aux différents modèles numériques. Cependant, comme nous l'avons montré aux sections 1.2 et 1.3, toutes les équations aux différences ne sont pas des équations écrites spécifiquement pour des modèles numériques. Les équations discrètes de la MD sont parfaitement générales. La MD ne se réduit pas à un ensemble de méthodes numériques, comme nous l'avons défendu à la section 1.3. T.D. Lee introduit le contraste entre les équations différentielles et les équations aux différences au sein de la MD de manière particulièrement instructive :

Depuis plus de trois siècles, nous avons été influencés par le précepte selon lequel les lois fondamentales de la physique devaient être exprimées avec des équations différentielles. Les équations aux différences ont toujours été considérées comme des approximations. Dans ce travail, j'essaie d'explorer la direction opposée : les équations aux différences sont plus fondamentales et les équations différentielles sont considérées comme des approximations. (Lee 1987, p. 859)

Il est clair que, selon T.D. Lee, l'utilisation d'une représentation discrète du temps n'implique pas des équations moins fondamentales en MD. Dans la théorie de Lee, les équations aux différences sont traitées comme les équations fondamentales; les équations différentielles en sont au contraire dérivées. Elles résultent d'un *passage à la limite*, lorsque les pas de temps des équations discrètes tendent vers zéro. Lee opère ainsi une inversion par rapport à la position traditionnelle. D'habitude, ce sont les équations différentielles qui sont fondamentales, les équations aux différences étant le résultat d'une procédure de *discrétisation*. Avec la MD, ces sont les équations aux différences qui sont fondamentales, les équations différentielles étant le résultat d'une procédure de *passage à la limite*.

### 2.2 Equations discrètes et continu mathématique

Examinons maintenant la question de savoir si l'utilisation de la MD implique que les scientifiques peuvent se passer du continu mathématique. La réponse à cette question est simple et factuelle. Alors que la MD utilise bien une représentation discrète du temps, elle ne se passe *pas* des nombres réels. Au contraire, la référence aux seuls nombres rationnels conduirait à une restriction sévère de la capacité de la MD à décrire, prédire et expliquer les phénomènes.

Commençons ici par expliciter notre réponse factuelle. Dans la version de la MD qui nous intéresse, le temps est défini comme  $t_k = kh_k$  où  $k$  est un nombre entier et où les pas de temps  $h_k$  sont des nombres réels (Marsden et al. 2001, p. 370). Par conséquent, les instants  $t_k$  sont aussi des nombres réels. Il est important de souligner que les valeurs d'une variable discrète ne sont en rien obligatoirement des nombres rationnels. Un ensemble discret peut être un ensemble fini de nombres réels. Ainsi, lorsque le temps est représenté de manière continue dans la mécanique traditionnelle, il est représenté par un paramètre  $t$  défini sur un intervalle réel, c'est-à-dire un ensemble infini indénombrable de nombres réels. En revanche, le temps en MD est représenté de manière discrète, pa

r un paramètre  $t_k$  défini sur un ensemble fini de nombre réels. Nous soulignons de plus que le continu mathématique est aussi important en MD pour définir certaines notions et opérateurs mathématiques ainsi que pour dériver certains résultats. Par exemple, les opérations de minimisation ainsi que les dérivées partielles utilisées dans cette théorie supposent l'utilisation du continu mathématique.

Afin de mieux comprendre l'importance des nombres réels en MD, nous nous proposons d'examiner la différence entre la MD qui nous intéresse dans ce chapitre et autre version discrète de la mécanique classique proposée par D. Greenspan dans les années 1970. Dans sa « mécanique discrète » (Greenspan 1973, p. 10), le temps est cette fois-ci représenté par un ensemble de nombres rationnels : les instants  $t_k$  sont définis comme  $t_k = kh$  où le pas de temps  $h$  est un nombre *rationnel*. Greenspan et son co-auteur Labudde (1974) montrent que, sous certaines hypothèses, les équations du mouvement de la mécanique de Newton et les principales lois de conservation de la mécanique classique peuvent être formulées de manière discrète à partir de cette représentation du temps. Pour Greenspan, le développement de cette mécanique discrète montre que les scientifiques peuvent se passer du continu mathématique pour étudier les phénomènes physiques :

Le concept d'infini ainsi que les concepts de limite, de dérivée et d'intégrale qui en découlent sont légitimes pour l'étude mathématique pure des nombres réels et des fonctions réelles mais ne sont pas légitimes pour la modélisation des concepts et des phénomènes physiques. [...]

Les équations de la dynamique dans nos modèles seront des équations aux différences qui, qu'elles soient linéaires ou non-linéaires, pourront facilement être résolues [sur ordinateur]. Par conséquent, il est envisageable que si un scientifique était disposé à apprendre le langage simple d'un ordinateur, il n'aurait besoin d'être équipé que d'une connaissance mathématique rudimentaire de l'arithmétique et de l'algèbre pour étudier des phénomènes physiques complexes.

(Greenspan 1973, p. 4)

Nous ne partageons pas l'analyse de Greenspan quant à la portée de sa mécanique discrète. Peut-être cette analyse serait-elle légitime si l'étude des phénomènes physiques ne se faisait que sur ordinateur. Et encore, comme le souligne Greenspan lui-même (1973, p. 4), l'ensemble des nombres réels doit être utilisé pour évaluer la stabilité d'une équation discrète lors de son calcul ordinateur. Mais surtout, la restriction aux seuls nombres rationnels rend très difficile, voire impossible, la résolution *exacte* des équations discrètes du mouvement dans certains cas. Par exemple que l'équation  $t^2_k = gh/d$  n'a *pas* de solution quelles que soient les valeurs de  $g$ ,  $h$ , et  $d$  si l'on se limite aux nombres rationnels. Or, comme nous le verrons dans la section suivante, la possibilité de résoudre de manière exacte les équations d'une théorie est une propriété importante des théories physiques.

### 2.3 Représentation continue du temps, dispensabilité et utilisabilité

Passons maintenant à la réponse positive que nous apportons à la question de savoir ce qu'implique l'utilisation d'une représentation discrète du temps. Nous défendons la thèse selon laquelle le développement de la MD montre que l'on peut se passer de la représentation du temps comme continu pour décrire, prédire et expliquer les phénomènes physiques.

Commençons par préciser ce que l'on entend par « se passer de  $X$  » dans une théorie. Dans les débats traditionnels en philosophie de mathématiques, « se passer de  $X$  » est considéré comme une assertion plus forte que « éliminer  $X$  ». <sup>1</sup> Pour « se passer de  $X$  » au sein d'une théorie  $T$ , il faut non seulement éliminer  $X$  de  $T$  mais, de plus, il faut que la théorie résultante de cette élimination soit une « bonne » théorie. La notion de bonne théorie est évidemment vague et sujet à controverse. Dans la suite de ce chapitre, nous considérons

---

<sup>1</sup> Voir par exemple Colyvan (2001). De plus, dans ces discussions  $X$  est habituellement une *entité*. Nous généralisons ces discussions à la notion de *représentation*.



qu'une bonne théorie est une théorie qui peut être *utilisée* pour décrire, prédire et expliquer les phénomènes physiques.

Selon nous, la MD satisfait ce critère pragmatique. Un de nos arguments principaux en faveur du caractère utilisable de la MD consiste à souligner la possibilité de tirer des inférences en manipulant ces équations et en trouvant les solutions *explicites*, c'est-à-dire des solutions exprimées à l'aide des fonctions mathématiques bien connues. On trouve par exemple ce type de solutions en mécanique continue lors de la résolution de l'équation représentant un corps en chute libre. Celle-ci s'écrit:

$$x(t) = v_{x,i}t + x_i \quad \text{et} \quad z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{z,i}t + z_i \quad (8)$$

où  $x$  et  $z$  sont les composantes horizontales et verticales,  $x_i, z_i, v_{x,i}, v_{z,i}$  les conditions initiales et  $g$  l'accélération de la pesanteur. De la même manière, en MD, les solutions explicites des équations discrètes du mouvement sont :

$$x_k = v_{x,i}t_k + x_i \quad \text{et} \quad z_k = -\frac{1}{2}gt_k^2 + (v_{z,i} + gh)t_k + z_i \quad (9)$$

Celles-ci mobilisent en plus le pas de temps discret  $h$ . Un autre exemple est le système de l'oscillateur harmonique. La solution explicite des équations du mouvement en MD est :

$$x_k = A_d \cos(\omega_d t_k) + B_d \sin(\omega_d t_k) \quad (10)$$

où  $t_k$  est le temps discret,  $A_d$  et  $B_d$  des constantes qui dépendent du pas de temps  $h$ .

La possibilité de résoudre de manière explicite les équations du mouvement de la MD pour certains systèmes est assez remarquable. En effet, pour la plupart des équations du mouvement, de la MD aussi bien que de la mécanique continue, les solutions explicites ne sont pas connues ou n'existent tout simplement pas. En mécanique continue, par exemple, il est rare de pouvoir dériver les solutions explicites des équations différentielles utilisées pour décrire un système. Cependant, même si elles sont rares, ces solutions restent précieuses pour les scientifiques. Elles permettent aux scientifiques de se forger une meilleure compréhension des systèmes étudiés par rapport aux solutions numériques. C'est parce que, comme l'indique P. Humphreys, les solutions explicites sont à la fois générales et exactes :

Le passage des mathématiques analytiques aux mathématiques numériques [...] a une conséquence immédiate : on perd souvent à la fois la grande *généralité* et l'*exactitude* potentielle des solutions qui ont traditionnellement été désirées dans les théories scientifiques. (2004, p. 64-65. Nous soulignons)

Les solutions explicites sont générales au sens où ce sont des *fonctions* de paramètres et de variables. Elles décrivent ainsi un ensemble de relations possibles entre différentes valeurs de variables, conditions initiales etc. L'utilisation de ces solutions contribue ainsi à pouvoir expliquer le comportement de phénomène en indiquant comment les variations de certaines variables physiques sont liées aux variations d'autres variables. Ces solutions sont aussi *exactes*. Cela signifie qu'elles sont des objets mathématiques qui rendent vraies les équations dont elles sont les solutions, comme par exemple  $\sqrt{2}$  rend vrai l'équation  $x^2 - 2 = 0$ . Parce qu'elles sont générales et exactes, les solutions explicites peuvent être utilisées pour dériver d'autres équations et pour extraire ainsi de nouvelles informations sur le système étudié. Par exemple, à partir des solutions explicites (Eq. 9), il est possible de dériver la *trajectoire* d'un corps en chute libre:

$$z_k(x_k) = -\frac{g}{2v_{x,i}^2}(x_k - x_i)^2 + \frac{v_{z,i} + gh}{v_{x,i}}(x_k - x_i) + z_i \quad (11)$$

et se rendre compte ainsi de son caractère parabolique. D'autres informations peuvent être dérivées telles que la haute maximale du corps lancé en l'air, ou encore le point de chute du corps, respectivement :

$$x_k^* = v_{x,i}(v_{z,i} + gh)/g + x_i \quad \text{et} \quad z_k^* = (v_{z,i} + gh)^2/(2g) + z_i \quad (12)$$

Ces informations sont extraites en appliquant différentes opérations mathématiques à ces solutions explicites.

La capacité de la MD à fournir des solutions explicites à certains problèmes de mécanique vient soutenir notre thèse en faveur de son caractère utilisable. De plus, étant une théorie discrète, il n'est pas besoin de rappeler l'intérêt de la MD pour la résolution sur ordinateur de ses équations du mouvement. L'existence de

cette théorie utilisable pour décrire, prédire et expliquer les phénomènes physiques montre ainsi en quel sens on peut se passer de la représentation du temps comme continu en physique. La section suivante explicite les conséquences de cette thèse dispensabiliste.

## 2.4 Dispensabilité et structure du temps

Alors même que l'on peut se passer de la représentation continue du temps, peut-on en tirer quelque conclusion sur la structure du temps ? Si les discussions dans la littérature à ce sujet semblent conduire à une réponse affirmative (Carnap 1966, Newton-Smith 1980, Maddy 1997), nous explicitons comment, selon nous, la dispensabilité de la représentation continue du temps devrait être analysée.

Les discussions à ce sujet mentionnées ci-dessus semblent reposer sur un présupposé : l'utilisation du paramètre  $t$  en mécanique classique — et dans les autres théories continues — est, au moins implicitement, associée à l'hypothèse d'une structure continue pour le temps. Selon Newton-Smith par exemple :

Si le temps est continu, l'ensemble de tous les instants, ordonnés selon la relation être temporellement avant, sera isomorphe à l'ensemble des nombres réels ou à un de ses sous-ensembles (Newton-Smith 1980, p. 114)

Ce présupposé semble généralement admis. Kibble et al adoptent explicitement par exemple cette hypothèse dans leur manuel de mécanique (2004, p. 2). Dans la reconstruction axiomatique de la mécanique proposée par P. Suppes, cet énoncé est présenté comme un axiome de la théorie (1999, p. 294). Enfin, P. Maddy indique aussi dans certains passages que l'utilisation du paramètre réel  $t$  dans les théories physiques présuppose que le temps soit considéré comme continu (1997, p. 155).

Si l'on considère, à l'instar des auteurs précédents, que le recours à la représentation continue du temps en physique reflète une hypothèse de continuité pour le temps, on comprend dès lors que la possibilité de se passer de la représentation du temps ait des conséquences sur notre connaissance de la structure du temps. C'est la raison pour laquelle, selon Newton-Smith, la structure du temps est « indécidable » (1980, p. 126), parce que l'on peut se passer de la représentation continue du temps, au moins en principe. Newton-Smith examine en effet le cas de deux théories physiques dont l'une représente le temps par un paramètre réel et l'autre par un paramètre rationnel. En montrant que ces théories sont empiriquement équivalentes, il conclut qu'on ne peut pas trancher entre une structure continue au temps ou une structure seulement dense.<sup>2</sup>

Peut-on transposer l'argument de Newton-Smith au cas de la MD et conclure ainsi que l'on ne peut pas savoir si la structure du temps est continue ou bien discrète ? Selon nous, les conditions requises pour l'évaluation de cette question manquent d'assise. L'argumentation de Newton-Smith semble présupposer que la manière dont les paramètres temporels sont utilisés dans les théories physiques nous contraint à concevoir le temps de telle ou telle manière. Voici comment Newton-Smith répond à la question de savoir « pourquoi nous avons tendance à regarder le temps comme continu » :

[L]a réponse est simplement que les meilleures théories physiques que nous avons en pratique construites pour décrire le monde physique requièrent dans leur formulation mathématique un paramètre temporel qui parcourt l'ensemble des nombres réels. [...] Nous considérons chaque nombre réel comme dénotant un instant et nous projetons sur un intervalle un nombre infini indénombrable de parties sans extension ou d'instantanés dont chacun correspond à un nombre réel dans l'intervalle. C'est ainsi que notre croyance en la continuité du temps [...] provient de notre projection sur le monde de la richesse du système mathématique que nous avons considéré jusqu'à maintenant comme étant essentiel à la construction des théories physiques viables. (Newton-Smith 1980, p. 118)

Par conséquent, selon Newton-Smith « si nos meilleures théories s'avéraient finalement représenter le temps par une variable discrète, nous aurions au moins autant de raison de regarder le temps comme discret que nous en avons de le regarder comme continu » (ibid.).

Nous ne nous sentons pas engagés à considérer le temps comme « un ensemble infini indénombrable de parties sans extension », même si les théories physiques représentent les temps à l'aide d'un paramètre  $t$  continu. Les théories pourraient bien utiliser cette représentation comme un cadre qui rend possible la description des phénomènes physique, sans que la structure du temps soit un objet d'investigation. Maddy rejette aussi

---

<sup>2</sup> Pour plus de détail, voir Ardourel (2014).

la thèse selon laquelle l'utilisation d'un paramètre temporel continu dans les théories physiques nous engagerait à accepter la continuité du temps. Selon elle, comme nous l'avons vu, représenter le temps comme continu revient à faire l'hypothèse d'une structure continue au temps. Mais cette hypothèse, et plus généralement « les hypothèses quant aux structures physiques reposant sur l'application des mathématiques n'ont pas la même valeur épistémique que les hypothèses physiques ordinaires »(1997, p. 156). Ces hypothèses sont admises dans les théories physiques mais n'engagent pas pour autant les scientifiques à les admettre comme vraies. Si nous retrouvons Maddy sur sa conclusion, nous ne la suivons sur son présupposé initial selon lequel représenter le temps comme continu revient à faire une hypothèse sur la structure du temps. Pouvoir se passer de la représentation continue du temps n'est pas, selon nous, suffisant pour conclure à l'indécidabilité ou l'indétermination de la structure du temps. Pour le dire autrement, à première vue, et avant toute investigation philosophique, les réponses possibles à la question de savoir si le temps est continu semblent être « oui » ou « non ». Newton-Smith montre que la réponse à cette question peut aussi être « indécidable ». Mais l'espace des possibilités est peut-être encore plus ouvert encore. On peut se demander si les conditions-mêmes pour pouvoir se poser cette question sont bien réunies. Selon nous, l'utilisation d'un paramètre temporel dans les théories physiques, qu'il soit continu, discret ou autre encore, ne permet pas de se prononcer sur la structure du temps. Si ni Carnap, Newton-Smith ou Maddy ne semblent avoir envisagé cette possibilité, son intérêt est notamment de comprendre pourquoi différents auteurs de la MD — excepté T.D. Lee sans doute — n'envisagent pas que leur théorie ait de conséquences sur notre connaissance de la structure du temps.

Après avoir examiné le caractère discret de la représentation du temps en MD, nous allons passer à la seconde question posée en introduction, celle de savoir en quel sens le symbole pour le temps peut être une *variable* dynamique plutôt qu'un *paramètre*.

### 3. Les symboles du temps et leur interprétation

Dans son article de 1983, T.D. Lee souligne une caractéristique distinctive de la MD : le symbole pour le temps joue le rôle de variable dynamique plutôt que celui de paramètre. La distinction entre paramètre et variable n'est pas transparente et sera discutée au cours de cette section. Pour commencer, nous indiquerons que les variables sont des quantités qui varient en fonction des paramètres, les paramètres étant les quantités par rapport auxquelles les variables changent. Le but de cette section est d'explicitier tout d'abord cette caractéristique distinctive de la MD, de clarifier ensuite la distinction entre variable et paramètre avant d'en examiner les conséquences sur la représentation du temps.

#### 3.1 Le symbole du temps comme variable dynamique en MD

Commençons par expliciter pourquoi le symbole du temps en MD est une variable dynamique plutôt qu'un paramètre. En MD, le temps doit être représenté comme une variable dynamique pour une raison théorique, à savoir garantir la conservation de l'énergie. Ce résultat est la conséquence d'un théorème démontré par Ge et Marsden (1988, p. 135). Si des équations discrètes dérivent d'un principe variationnel, il est impossible de satisfaire simultanément la conservation exacte de deux propriétés *si* le pas de temps est constant, à savoir (i) l'énergie et (ii) la structure symplectique. Le théorème de Ge-Marsden semble par conséquent bloquer la possibilité de construire des modèles discrets satisfaisants si le pas de temps est constant. Mais, d'un autre côté, il autorise la variation du pas de temps (son adaptation au cours du calcul) pour satisfaire la conservation à la fois des moments, de l'énergie et de la structure symplectique. Ainsi, si l'on souhaite avoir une conservation de ces trois propriétés dans les modèles discrets, la distribution des instants discrets doit être le résultat de la minimisation de l'action discrète. Plus précisément, comme le soulignent D'Innocenzo et al. :

Dans le cas continu, la conservation de l'énergie est une conséquence des équations de Newton pour les systèmes conservatifs pour lesquels le lagrangien ne dépend pas explicitement du temps. Ce n'est pas automatique pour une mécanique discrète quelconque. Au contraire, c'est seulement en traitant à la fois [la position]  $r$  et  $t$  comme des variables dynamiques que l'on peut dériver la loi de Newton et la conservation de l'énergie discrète du principe de moindre action. Par conséquent, l'asymétrie de la mécanique continue (où le temps n'est pas traité sur le même plan que les coordonnées spatiales) est éliminée. (1987, p. 246)

Le temps et la position sont traités de la même manière en MD. Le temps est ainsi représenté par une variable dynamique discrète au sens où le symbole du temps est une variable par rapport à laquelle l'action discrète est

minimisée. Cela signifie que les valeurs des instants discrets ne sont pas arbitraires. Elles ne sont pas déterminées par une règle externe à la théorie physique telle que  $t_{k+1} = t_k + h$ , comme c'est le cas dans les modèles discrets traditionnels (voir section 1.1). Les valeurs de la variable temporelle sont au contraire déterminées par l'évolution des autres variables.

### 3.2 Variables et paramètres

Analysons maintenant la distinction entre variable et paramètre avant d'en tirer des conséquences sur la représentation du temps (section 3.3). Pour cela, nous commençons par expliciter cette distinction dans un cadre où celle-ci est relativement claire, celle des modèles causaux :

La distinction entre variables et paramètres est bien définie seulement dans le contexte d'un modèle [causal] donné. Elle dépend en grande partie des objectifs de la modélisation, d'une division quelque peu arbitraire entre ce qui est endogène et ce qui est laissé exogène, et ce qui est considéré comme pouvant changer ou au contraire comme devant rester fixe. [...] Si lors de la construction d'un modèle [causal], on cherche à savoir comment certaines caractéristiques ou propriétés d'un système sont déterminées par d'autres caractéristiques du système, celles-ci seront rendues endogènes en les traitant comme des variables dépendantes. Si au contraire on a de bonnes raisons de penser que certaines caractéristiques ou leurs changements possibles sont peu probables ou non-pertinents, elles seront laissées comme des paramètres. (Kuorikoski, 2012, p. 368)

Dans les modèles causaux, un paramètre décrit ainsi le cadre au sein duquel les variables évoluent et les variables sont utilisées pour représenter les relations causales qui intéressent le scientifique. Mais qu'en est-il pour les modèles physiques en général ? Même si tous les modèles physiques ne sont pas des modèles causaux, cette distinction semble pouvoir être maintenue en tant qu'elle reflète deux manières dont les quantités peuvent dépendre les unes des autres. Au sein d'un modèle, une variable peut dépendre des changements d'un paramètre alors qu'un paramètre possède sa propre source de changement, qui est indépendante de la manière dont les autres quantités du système changent.

À partir de cette distinction entre variable et paramètre, examinons maintenant le cas du symbole pour le temps. Dans de nombreuses théories physiques telles que la mécanique classique (continue), la mécanique quantique ou encore l'hydrodynamique, le temps est traité comme un paramètre. Ces théories décrivent l'évolution des phénomènes *au cours* du temps. Le temps est un cadre au sein duquel les phénomènes sont étudiés. Son évolution n'est pas un objet d'enquête mais rend possible l'étude des phénomènes physiques. Certaines théories cependant, comme la cosmologie, peuvent représenter le temps comme une variable. En effet, le symbole pour le temps peut varier en fonction d'autres quantités pertinentes pour décrire l'évolution du système telles que le facteur d'échelle ou la température.

Dans les modèles discrets traditionnels, le symbole pour temps  $t_k$  est toujours un paramètre. Il n'est pas un objet d'étude mais un cadre dans lequel les variables sont étudiées. Ce sont les variables  $X$  ou  $Y$  dont l'évolution intéressent le scientifiques qui changent au fur et à mesure que le paramètre discret passe de  $t_k$  à  $t_{k+h}$ . Ainsi, la première différence avec les modèles continus est que l'ensemble possible des valeurs du paramètre temporel est discret. Mais il y a aussi une autre différence. Contrairement au symbole pour le temps  $t$ , le symbole discret pour le temps  $t_k$  est associé à deux notions temporelles,  $t_k$  et  $k$ .  $t_k$  joue le même rôle que  $t$ . Il représente ce que nous appellerons le « temps *dans* le modèle », c'est-à-dire le temps au cours duquel les phénomènes sont représentés. Il peut être exprimés en seconde, minutes, heures. En revanche,  $k$  représente ce que nous appellerons le « temps *du* modèle » au sens où l'évolution à travers la règle  $k \rightarrow k+1$  gouverne l'évolution du modèle discret.  $k$  est un un nombre entier, une quantité sans dimension physique. Il ne représente pas le temps mais est une sorte de compteur ou d'horloge pour le modèle discret. Son évolution, via l'incrémentation « +1 » fait avancer le temps du modèle  $t_k$ .

En MD, ces deux notions temporelles  $k$  et  $t_k$  sont aussi présentes. Comme dans les modèles discrets traditionnels,  $k$  est le « temps *du* modèle » et est un paramètre. Mais à la différence des modèles discrets traditionnels le « temps *dans* le modèle »  $t_k$  n'est plus un paramètre mais une variable. Le passage de  $t_k$  à  $t_{k+1}$  n'est plus pas donné par une règle « +h » extérieure au modèle mais est déterminé par les équations du système étudié.  $t_k$  est ainsi une variable relativement au paramètre  $k$ . La séparation des deux instants successifs  $t_k$  à  $t_{k+h}$  est déduite de la minimisation de l'action discrète. Cette représentation duale du temps en MD, à la fois paramètre via  $k$  et variable via  $t_k$  est une caractéristique qui distingue la MD à la fois des modèles discrets traditionnels mais aussi des modèles continus qui utilisent le paramètre  $t$ .

### 3. 3 Représenter *par* et *représenter comme*

Quelles sont les conséquences de cette représentation duale du temps en MD ? Une première réponse pourrait être de considérer ce trait comme un *artefact* de la MD et par conséquent sans réelle conséquence sur la manière dont le temps est représenté en physique. Mais cette réponse n'est pas tenable car elle met de côté le fait que cette représentation duale du temps est *indispensable* à la MD. Cette représentation découle en effet du théorème de Ge-Marsden qui impose cette représentation duale à la MD. Quelles sont alors les conséquences que l'on peut en tirer de cette représentation, et sur quoi précisément portent-elles ? En particulier, portent-elles sur la structure du temps ?

Pour répondre à cette question, introduisons une distinction à propos du concept de représentation. Pour cela, commençons par appeler tout d'abord « représentation » un objet concret *utilisé* comme un médium par un agent — et compris par un autre agent — pour transmettre un certain contenu. Nous nous intéressons ici à la relation entre le médium et le contenu de la représentation. Dans de nombreux cas, cette relation relève de conventions. Par exemple, on peut décider que ce crayon représente un rail de chemin de fer. Dans ce cas, le rail est représenté *par* le crayon. Le crayon, associé à la bonne convention, est le médium de la représentation. Cependant, le médium de la représentation peut aussi jouer un autre rôle. Prenons l'exemple classique de la caricature du politicien Thiers représenté *comme* une poire (Figure 3). Dans cette caricature, Thiers n'est pas représenté *par* une poire mais *comme* une poire. La poire est en effet connue au XIX<sup>e</sup> siècle comme étant la métaphore de la monarchie bourgeoise. La différence entre « représenter par » et « représenter comme » est ainsi centrale pour comprendre comment les images et les symboles sont utilisés pour communiquer des significations.

Cette distinction semble aussi pertinente dans l'interprétation des symboles en physique. D'un côté, quand une quantité  $X$  est représentée *par* le symbole  $x$ , le symbole  $x$  joue le rôle de  $X$  au sein de la théorie dans laquelle  $x$  est utilisé.  $x$  n'est pas seulement une lettre ; il est le nom d'une variable prenant ses valeurs dans un ensemble de nombres (les entiers, les nombres réels, un ensemble fini de nombres réels etc.). Cet ensemble peut être choisi parce qu'il est supposé être fidèle à la nature de  $X$ . Il peut aussi être choisi pour des raisons de commodité comme, par exemple, lorsque  $X$  est représenté *par* un symbole prenant ses valeurs dans un ensemble discret (respectivement continu) de nombres sans avoir aucune implication sur la nature discrète (respectivement continue) de  $X$ . D'un autre côté, représenter une quantité physique  $X$  *comme* un  $A$  ou un  $B$ , par exemple, comme une variable ou un paramètre, suppose d'interpréter  $X$  comme étant doté des propriétés des  $A$  ou des  $B$ . Par exemple, représenter le temps comme une variable implique d'interpréter le temps comme dépendant d'autres quantités alors que l'interpréter comme un paramètre implique de l'interpréter comme évoluant de manière indépendante. Représenter  $X$  *comme* un  $A$  ou un  $B$  suppose ainsi de s'engager, plus ou moins, sur la nature de  $X$ .

De notre côté, nous suggérons qu'il est possible d'interpréter les variables et les paramètres comme nommant différents *médium de représentation* plutôt que comme disant quelque chose sur la nature des quantités représentées. Nous soutenons que certaines quantités physiques peuvent être représentées *par* des variables ou des paramètres exactement de la même manière qu'elles peuvent être représentées *par* des nombres réels. Représenter une quantité physique *par* une variable ne suppose pas de la doter des propriétés des variables, comme le fait qu'elles soient intrinsèquement liées à d'autres variables. Autrement dit, les variables et les paramètres sont seulement des outils de représentation. En particulier, le fait que  $t_k$  est une variable en MD, alors que  $k$  est un paramètre, ne signifie pas que la MD révèle une nature duale pour le temps. Même si cette représentation duale est *indispensable* à la MD, elle ne nous engage pas sur la nature du temps. Selon nous, le temps en MD, mais aussi dans les théories physiques continues telles que la mécanique continue ou la mécanique quantique, ainsi que dans les modèles discrets, devrait être traité comme « représenté *par* » plutôt que « représenter comme » un paramètre ou une variable.

### 4. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons examiné les conséquences du recours à une théorie discrète sur la manière dont le temps est représenté dans les théories physiques. Ce faisant, nous avons montré que l'opposition fondamentale entre représentation discrète et représentation continue doit être complétée par trois autres oppositions.

La première est celle entre une représentation discrète utilisant les nombres naturels et rationnels — comme celle discutée par Carnap et Newton-Smith — et une représentation discrète utilisant un ensemble fini de nombres réels, comme c'est le cas pour le temps en MD. Nous avons vu au chapitre 2 que l'existence de cette seconde représentation ouvre de nouvelles perspectives sur la possibilité de se passer de la continuité du

temps en physique. Plus précisément, on peut se passer de la représentation continue du temps sans se passer des outils mathématiques infinitistes. Le chapitre 3 a mis en avant deux autres oppositions. D'un côté, nous avons examiné, dans le contexte de la représentation du temps, la distinction entre la notion de variable et celle de paramètre. D'un autre côté, nous avons distingué la notion de « représenter *par* » et celle de « représenter *comme* ». S'il est communément admis que représenter une quantité physique *par* un symbole discret n'implique pas d'hypothèses métaphysiques, nous avons étendu cette conception à la représentation du temps *comme* une variable.

## Références

- Ardourel, V. (2014). La structure du temps est-elle indécidable ? Sous-détermination et structure du temps chez Newton-Smith. *Dialogue*, vol. 53 (4), p. 623-649.
- Butterfield, J. (2006a). On Symplectic Reduction in Classical Mechanics, in Earman, J. & Butterfield, J. (eds.). *The Handbook of Philosophy of Physics*, North Holland: Elsevier, 1--131.
- Butterfield, J. (2006b). On Symmetries and Conserved Quantities in Classical Mechanics, in Demopoulos, W. & Pitowsky, I. (eds.). *Physical Theory and its Interpretation*, Dordrecht: Springer 2006, 43--99.
- Carnap, R. (1966). *Philosophical Foundations of Physics*. New York and London: Basic Books.
- Colyvan, M. (2001). *The Indispensability of Mathematics*. Oxford: Oxford University Press.
- D'Innocenzo, A., Renna, L. & Rotelli, P. (1987). Some Studies in Discrete Mechanics. *European Journal of Physics*, 8, 245--252.
- Feng, K. & Qin, M. (2010). *Symplectic Geometric Algorithms for Hamiltonian Systems*, Heidelberg, Dordrecht, London, New York : Springer.
- Ge, Z. & Marsden, J. E. (1988). Lie-Poisson Hamilton-Jacobi Theory and Lie-Poisson Integrators, *Physics Letters A*, 133 (3), 134 --139.
- Greenspan, D. (1973). *Discrete Models*. Addison-Wesley Publishing Company.
- Hairer E., Lubich, C. & Wanner, G. (2006). *Geometric Numerical Integration: Structure-Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations*, Berlin, Heidelberg: Springer.
- Humphreys, P. (2004). *Extending Ourselves: Computational Science, Empiricism, and Scientific Method*, New-York: Oxford University Press.
- Kibble, Tom W. B. & Berkshire, Frank H. (2009). *Classical Mechanics*, London: Imperial College Press.
- Kuorikoski, J. (2012). Mechanisms, Modularity and Constitutive Explanation, *Erkenntnis*, 77 (3), 361--380.
- LaBudde, R. A. & Greenspan, D. (1974). Discrete Mechanics-A General Treatment. *Journal of Computational Physics*, 15, 134--167.
- Lee, T. D. (1983). Can Time Be a Discrete Dynamical Variable?. *Physics Letters* , 122B (3--4), 217--220.
- Lee, T.D. (1987). Difference Equations and Conservation Laws. *Journal of Statistical Physics*, 46 (5--6), 843--860.
- Maddy, P. (1997). *Naturalism in Mathematics*. Oxford: Clarendon Press.
- Marsden, J. E. & West M. (2001). Discrete Mechanics and Variational Integrators. *Acta Numerica*, 10, 357--514.

Newton-Smith, W. H. (1980). *The Structure of Time*. London: Routledge & Kegan Paul.

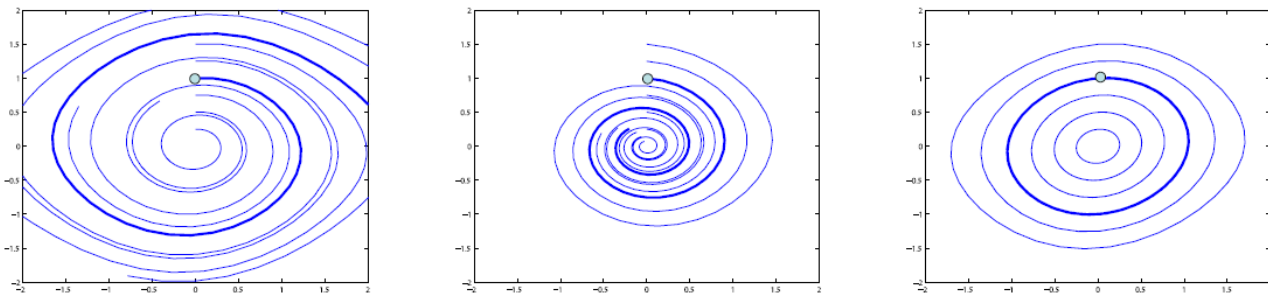
North, J. (2009). The Structure of Physics: A Case Study, *Journal of Philosophy*, 106 (2), 57--88.

Stern, A. & Desbrun, M. (2008). Discrete Geometric Mechanics for variational Time Integrators, in *Discrete Differential Geometry: An Applied Introduction*, Siggraph 2006 Course Notes, chap. 15.

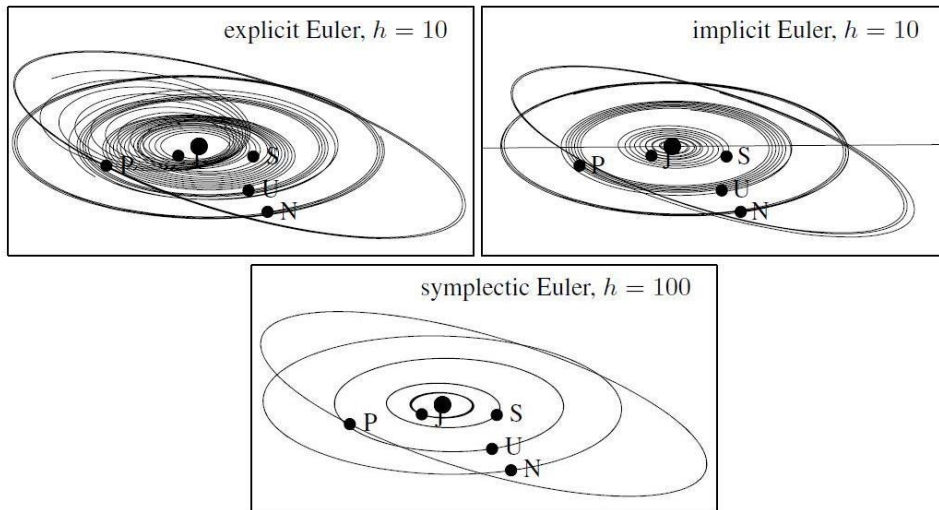
Suppes, P. (1957). *Introduction to Logic*. New York: Van Nostrand Reinhold.

## FIGURES

**Figure 1**



*Légende de la Figure 1* — Trois résolutions numériques du problème du pendule simple dans l'espace des phases  $(q,v)$  avec, de gauche à droite, l'intégrateur d'Euler forward, l'intégrateur d'Euler backward, et l'intégrateur d'Euler symplectique. Figure extraite de (Stern et Desbrun 2008, p. 77).

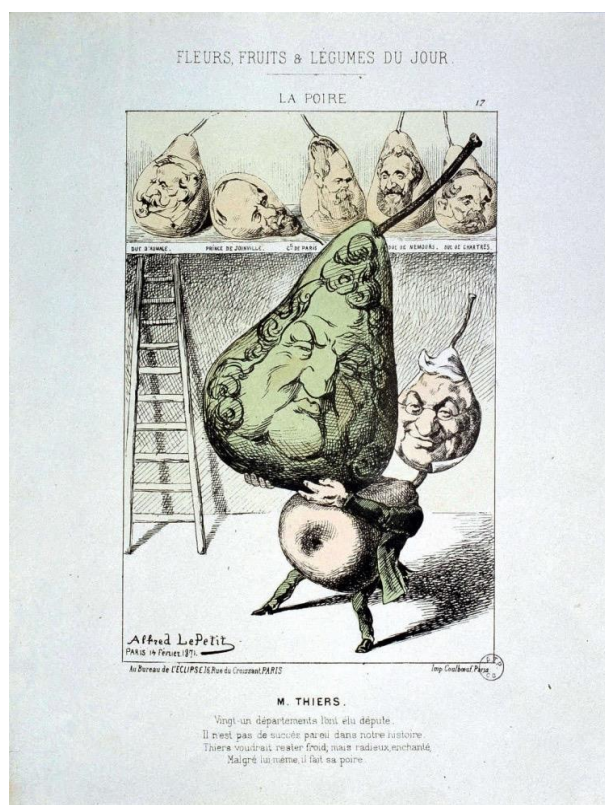


**Figure 2**

*Légende de la Figure 2* — Trois résolutions numériques des trajectoires d'un système solaire réduit à des cinq planètes avec avec l'intégrateur d'Euler forward (en haut à gauche), l'intégrateur d'Euler backward (en haut à droite), et l'intégrateur d'Euler symplectique (en bas). Figure extraite de (Hairer 2006 , p. 14).



Figure 3



Légende de la Figure 3 — « Fleurs, fruits et légumes du jour -- La poire -- M. Thiers », Alfred Le Petit (1871).  
© Picture RMN-Grand Palais - M. Bellot.