



HAL
open science

La chouette de la connaissance ne vole qu'à la nuit tombée

Frédéric Rotella, Irène Zambettakis

► **To cite this version:**

Frédéric Rotella, Irène Zambettakis. La chouette de la connaissance ne vole qu'à la nuit tombée. Colloque Modélisation, Analyse et Contrôle des Systèmes, May 2014, Ifrane, Maroc. pp.0. hal-01945185

HAL Id: hal-01945185

<https://hal.science/hal-01945185>

Submitted on 5 Dec 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.





Open Archive Toulouse Archive Ouverte

OATAO is an open access repository that collects the work of Toulouse researchers and makes it freely available over the web where possible

This is an author's version published in: <http://oatao.univ-toulouse.fr/20068>

To cite this version:

Rotella, Frédéric  and Zambettakis, Irène  *La chouette de la connaissance ne vole qu'à la nuit tombée.* (2014) In: Colloque Modélisation, Analyse et Contrôle des Systèmes, May 2014 (Ifrane, Morocco). (Unpublished)

Any correspondence concerning this service should be sent to the repository administrator: tech-oatao@listes-diff.inp-toulouse.fr

La chouette de la connaissance ne vole qu'à la nuit tombée.

F. Rotella, I. Zambettakis

rotella@enit.fr, izambettakis@iut-tarbes.fr

Laboratoire de Génie de Production,
École Nationale d'Ingénieurs de Tarbes,
65016, Tarbes CEDEX, France.

1 Introduction

Le titre que nous avons choisi pour cette communication peut paraître étrange au premier abord et appelle quelques explications. Nous n'en sommes pas l'auteur il s'agit d'une traduction libre d'une citation du philosophe allemand Georg Wilhelm Friedrich Hegel (1770-1831) :

die Eule der Minerva beginnt erst mit der einbrechenden Dämmerung ihren Flug

extraite de *Grundlinien der Philosophie des Rechts*, Nicolai, Berlin, 1820. Débuter cette présentation de cette façon est une manière de rendre hommage à tous les chercheurs qui par une vision renouvelée ont su faire progresser une discipline, dont l'automatique en particulier, lorsqu'elle s'endort dans un académisme ronronnant. Abdelhacq El Jai est de la classe de ces chercheurs. Remarquons toutefois que Hegel emploie le terme de hibou de Minerve, ce qui symbolise d'un point de vue mythologique la sagesse. Mais comme le dit un autre de ces chercheurs qui se reconnaîtra sûrement, l'automatique étant ce que l'on connaît de moins mal, nous resterons donc sur ce plan là.

Ce qui précède n'est pas la seule motivation à ce titre puisque nous allons nous intéresser à l'observation de fonctionnelles linéaires de l'état d'un système. En effet, parmi les variables d'un système dynamique certaines ne sont pas directement accessibles par la mesure. La capacité de vision nocturne de la chouette est un élément qui conduit à une analogie avec le processus d'observation qui consiste à reconstruire certaines variables cachées. Dans la plupart des cas, on ne cherche pas à reconstruire toutes les variables du système, d'où l'observation de fonctionnelles linéaires. En effet, il est alors préférable, afin d'obtenir un système d'ordre le plus petit possible, de ne pas chercher à reconstruire des informations inutile. À titre d'exemple, lorsque l'on cherche à construire une loi de commande linéaire de retour d'état de gain K de la forme $u(t) = v(t) - Kx(t)$ où $x(t)$ est l'état du système et $v(t)$ la nouvelle consigne, reconstruire directement $Kx(t)$ plutôt qu'un observateur de l'état complet $x(t)$ peut conduire, souvent mais pas toujours, à un observateur de taille inférieure à un observateur de Cumming-Gopinath qui est un observateur de l'état complet. Cependant, l'observation d'une fonctionnelle linéaire de l'état du système peut être utile pour d'autres applications en contrôle des systèmes comme par exemple le diagnostic, la détection et l'isolation de fautes [17]. Dans cet optique, on utilise un observateur pour générer des résidus permettant d'élaborer une décision dans un étage de surveillance et de diagnostic du système

lorsque des perturbations ou des défauts apparaissent sur le processus. En effet, ces variables agissent sur le système mais ne peuvent être mesurées. Donc l'objectif consiste à construire des résidus qui, selon le cas, doivent être sensibles aux défauts ou insensibles aux perturbations, pour ne citer que ces deux exemples. Ainsi l'objet de notre propos est d'indiquer une méthode systématique de conception d'un observateur linéaire de fonctionnelle linéaire dans le cadre d'un modèle linéaire.

Depuis les travaux initiaux de [14, 15, 9] on peut raisonnablement classer les techniques de conception de ces observateurs en deux groupes. D'une part, celles qui partent de la résolution de l'équation de Sylvester qui apparaît dans les conditions d'existence d'un tel observateur. Citons à titre d'exemples [28, 25]. D'autre part, les techniques comme celles proposées dans [5, 6] qui consistent à construire l'observateur d'une fonctionnelle de taille plus grande qui inclut bien sûr la fonctionnelle à reconstruire en appliquant le résultat de [4]. Enfin, notons que de nombreuses solutions demandent que le modèle initial soit sous forme canonique (e.g. [13]) et se focalisent sur des dynamiques a priori fixées pour l'observateur. Cependant, quelle que soit la piste utilisée, ces techniques n'ont pas conduit, jusqu'à présent à des avancées majeures, que ce soit sur le plan de la conception d'un observateur stable de taille minimale ou sur le plan de l'extension possible à d'autres modèles que les systèmes linéaires à coefficients constants. Pour une vision plus précise et détaillée des différentes techniques qui ont été envisagées pour concevoir un observateur de fonctionnelle linéaire on peut consulter [19, 12, 26]. L'intérêt majeur de l'approche que l'on va présenter ici est ainsi de s'affranchir des inconvénients des méthodes habituellement utilisées jusqu'à présent pour concevoir, de façon assez directe, un observateur asymptotique d'une fonctionnelle linéaire de l'état d'un système linéaire.

L'origine des développements que l'on va proposer remonte, dans leur principe, à l'article [8] de Michel Fliess où la construction d'un observateur d'état était basée sur la notion de dérivation. Deux idées forces s'en dégagent alors. D'une part, la conception, n'étant pas basée sur la notion de placement de pôles *a priori* imposés, choix non trivial en l'absence de toute autre considération, découlait naturellement de la technique utilisée. D'autre part cette technique pouvait être étendue sans problème majeur au cas des modèles linéaires dont les coefficients sont des fonctions (suffisamment dérivables) du temps. Cette extension a d'ailleurs été proposée originellement dans [1] à l'aide du modèle plat du système [7] et dans [24] en utilisant l'approche algébrique [18] pour l'estimation des dérivées des signaux.

2 Observation d'une fonction linéaire de l'état

On se place dans le cadre d'un système dont le modèle, linéarisé autour d'un point de fonctionnement [2, 20] est décrit par l'équation d'état :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ m(t) &= Mx(t), \end{aligned} \tag{1}$$

où, pour tout t dans \mathbb{R} , $x(t)$, dans \mathbb{R}^n , représente le vecteur d'état du modèle, $u(t)$, dans \mathbb{R}^p , le vecteur des commandes supposées accessibles, et $m(t)$, dans \mathbb{R}^m , le vecteur des mesures issues des capteurs. Notons que ces variables sont à distinguer des variables que l'on veut piloter. A , B et C sont des matrices constantes de dimensions adaptées. L'objectif est de chercher à estimer au moins asymptotiquement, à partir des informations mesurées sur le système, à savoir les entrées $u(t)$ et les mesures $m(t)$ réalisées par les différents capteurs, un vecteur de la forme :

$$v(t) = Lx(t), \tag{2}$$

où L est une matrice de taille $(l \times n)$ fixée par l'utilisateur. Pour obtenir $v(t)$ on utilise un reconstruteur, appelé observateur de fonctionnelle linéaire ou observateur de Luenberger [16] décrit par l'équation d'état :

$$\begin{aligned}\dot{z}(t) &= Fz(t) + Gu(t) + Hm(t), \\ w(t) &= Pz(t) + Vm(t),\end{aligned}\tag{3}$$

où $z(t)$ est un vecteur de taille q et $w(t)$ un vecteur de taille l . Les matrices F , G , H , P , V et l'ordre q sont déterminés afin que $\lim_{t \rightarrow \infty} (v(t) - w(t)) = 0$. De façon à simplifier la conception de l'observateur on peut toujours supposer que :

$$\text{rang} \left(\begin{bmatrix} M \\ L \end{bmatrix} \right) = m + l.$$

Pour construire cet observateur on cherche, dans un premier temps, les conditions sous lesquelles on aurait, asymptotiquement, une relation linéaire entre $x(t)$ et $z(t)$ de la forme $z(t) = Tx(t)$. Soit $\varepsilon(t) = z(t) - Tx(t)$, alors on obtient :

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}(t) &= \dot{z}(t) - T\dot{x}(t), \\ &= Fz(t) + Gu(t) + Hm(t) - TAx(t) - TBu(t), \\ &= F\varepsilon(t) + (G - TB)u(t) + (FT - TA + HM)x(t).\end{aligned}$$

En imposant les relations :

$$\begin{aligned}G &= TB, \\ TA - FT &= HM,\end{aligned}$$

lorsque F est une matrice de Hurwitz, c'est-à-dire que ses valeurs propres sont toutes à partie réelle strictement négative, on obtient $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = 0$.

Maintenant, en introduisant l'erreur de reconstruction $e(t) = v(t) - w(t)$, elle s'écrit :

$$\begin{aligned}e(t) &= Lx(t) - Pz(t) - Vm(t), \\ &= (L - PT - VM)x(t) - P\varepsilon(t).\end{aligned}$$

Si $L = PT + VM$, les conditions qui conduisent à $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = 0$ assurent également $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ donc une reconstruction asymptotique de la fonctionnelle linéaire $v(t)$.

On vient de montrer que lorsqu'il existe une matrice T satisfaisant aux équations linéaires :

$$\begin{aligned}G &= TB, \\ TA - FT &= HM, \\ L &= PT + VM,\end{aligned}\tag{4}$$

où F est une matrice de Hurwitz alors $v(t) = Lx(t)$ peut être estimé asymptotiquement par un observateur de Luenberger (3) dont les paramètres sont déterminés pour garantir l'existence des matrices T et F . Comme nous l'avons indiqué, il existe de nombreuses méthodes qui permettent, dans certains cas particuliers, de résoudre le problème de la conception d'un observateur d'ordre minimum q où la matrice F possède des valeurs propres fixées *a priori* [19, 26]. Cependant, le problème de la conception d'un observateur asymptotique de taille la plus petite possible n'a pas encore de solution complète.

3 Conception d'un observateur de Luenberger

L'une des caractéristiques majeures de la technique de conception que nous allons présenter réside dans la résolution d'un système linéaire. Le principe de la conception de l'observateur utilise les dérivations successives de $v(t)$. À cet effet, on obtient, pour $k = 0, 1, \dots$:

$$v^{(k)}(t) = LA^k x(t) + \sum_{i=0}^{k-1} LA^{k-1-i} Bu^{(i)}(t).$$

Supposons qu'il existe un indice ν et des matrices $F_{L,i}$, $i = 0$ à $\nu - 1$, et $F_{M,i}$, $i = 0$ à ν , tels que :

$$LA^\nu = \sum_{i=0}^{\nu-1} F_{L,i} LA^i + \sum_{i=0}^{\nu} F_{M,i} MA^i, \quad (5)$$

alors :

$$v^{(\nu)}(t) = \sum_{i=0}^{\nu-1} F_{L,i} LA^i x(t) + \sum_{i=0}^{\nu} F_{M,i} MA^i x(t) + \sum_{i=0}^{\nu-1} LA^{\nu-1-i} Bu^{(i)}(t).$$

3.1 Construction des matrices F à V .

La deuxième étape consiste à éliminer l'état $x(t)$ pour faire apparaître $v(t)$ et $y(t)$ et leurs dérivées. Pour ce faire on utilise les dérivées de $v(t) = Lx(t)$ et de $m(t) = Mx(t)$. On obtient ainsi :

– pour $i = 1$ à $\nu - 1$: $v^{(i)}(t) = LA^i x(t) + \sum_{j=0}^{i-1} LA^j Bu^{(i-1-j)}(t)$, soit :

$$LA^i x(t) = v^{(i)}(t) - \sum_{j=0}^{i-1} LA^{i-1-j} Bu^{(j)}(t);$$

– pour $i = 1$ à ν : $m^{(i)}(t) = MA^i x(t) + \sum_{j=0}^{i-1} MA^j Bu^{(i-1-j)}(t)$, soit :

$$MA^i x(t) = m^{(i)}(t) - \sum_{j=0}^{i-1} MA^{i-1-j} Bu^{(j)}(t).$$

En remplaçant ces expressions dans celle de $v^{(\nu)}(t)$ et en regroupant les termes on obtient une relation de la forme :

$$v^{(\nu)}(t) = \sum_{i=0}^{\nu-1} F_{L,i} v^{(i)}(t) + \sum_{i=0}^{\nu} F_{M,i} m^{(i)}(t) + \sum_{i=0}^{\nu-1} G_i u^{(i)}(t), \quad (6)$$

où les matrices G_i sont calculables en fonction des données du problème. En effet, après quelques manipulations algébriques, on obtient $G_{\nu-1} = (L - F_{M,\nu}M)B$ et pour $\nu \geq 2$ et $j = 0$ à $\nu - 2$:

$$G_j = \left(LA^{\nu-1-j} - \sum_{i=j+1}^{\nu-1} F_{L,i} LA^{i-1-j} - \sum_{i=j+1}^{\nu} F_{M,i} MA^{i-1-j} \right) B. \quad (7)$$

La troisième étape consiste à réaliser la relation (6), c'est-à-dire à construire une équation d'état du premier ordre qui traduit cette relation. Parmi les techniques de réalisation d'équations différentielles usuelles ([11, 20]) la plus adaptée repose sur la factorisation, après codage opérationnel,

de l'équation différentielle (6). En utilisant le codage de Heaviside de l'opérateur de dérivation temporelle, p , et donc celui de l'opérateur d'intégration temporelle, p^{-1} , cette équation différentielle s'écrit :

$$\begin{aligned} v(t) = & F_{M,\nu}m(t) + p^{-1} [F_{L,\nu-1}v(t) + F_{M,\nu-1}m(t) + G_{\nu-1}u(t) \\ & + p^{-1} [F_{L,\nu-2}v(t) + F_{M,\nu-2}m(t) + G_{\nu-2}u(t) \\ & \vdots \\ & + p^{-1} [F_{L,1}v(t) + F_{M,1}m(t) + G_1u(t) \\ & + p^{-1} [F_{L,0}v(t) + F_{M,0}m(t) + G_0u(t)]] \dots]. \end{aligned}$$

Introduisons les vecteurs :

$$\begin{aligned} z_0(t) &= p^{-1} [F_{L,0}v(t) + F_{M,0}m(t) + G_0u(t)], \\ z_1(t) &= p^{-1} [F_{L,1}v(t) + F_{M,1}m(t) + G_1u(t) + z_0(t)], \\ z_2(t) &= p^{-1} [F_{L,2}v(t) + F_{M,2}m(t) + G_2u(t) + z_1(t)], \\ &\vdots \\ z_{\nu-1}(t) &= p^{-1} [F_{L,\nu-1}v(t) + F_{M,\nu-1}m(t) + G_{\nu-1}u(t) + z_{\nu-2}(t)]. \end{aligned}$$

Puisque $v(t) = z_{\nu-1}(t) + F_{M,\nu}m(t)$ on obtient :

$$\begin{aligned} z_0(t) &= p^{-1} [F_{L,0}z_{\nu-1}(t) + H_{M,0}m(t) + G_0u(t)], \\ z_1(t) &= p^{-1} [F_{L,1}z_{\nu-1}(t) + H_{M,1}m(t) + G_1u(t) + z_0(t)], \\ z_2(t) &= p^{-1} [F_{L,2}z_{\nu-1}(t) + H_{M,2}m(t) + G_2u(t) + z_1(t)], \\ &\vdots \\ z_{\nu-1}(t) &= p^{-1} [F_{L,\nu-1}z_{\nu-1}(t) + H_{M,\nu-1}m(t) + G_{\nu-1}u(t) + z_{\nu-2}(t)], \end{aligned}$$

où, pour $i = 0$ à $\nu - 1$, $H_{M,i} = F_{M,i} + F_{L,i}F_{M,\nu}$. Le vecteur $z(t)$ défini par :

$$z(t) = \begin{bmatrix} z_0(t) \\ z_1(t) \\ \vdots \\ z_{\nu-1}(t) \end{bmatrix}.$$

constitue alors l'état de l'observateur de Luenberger (3) avec :

$$F = \begin{bmatrix} I_l & & & F_{L,0} \\ & \ddots & & F_{L,1} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & I_l & F_{L,\nu-2} \\ & & & & I_l & F_{L,\nu-1} \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} G_0 \\ G_1 \\ \vdots \\ G_{\nu-2} \\ G_{\nu-1} \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} H_{M,0} \\ H_{M,1} \\ \vdots \\ H_{M,\nu-2} \\ H_{M,\nu-1} \end{bmatrix},$$

$$P = [0 \quad \dots \quad 0 \quad I_l] \text{ et } V = F_{M,\nu}.$$

Lorsque la matrice F est une matrice de Hurwitz, on a obtenu ainsi un observateur asymptotique de la fonctionnelle linéaire $Lx(t)$. Dans le cas contraire ou si les valeurs propres de la matrice ne conviennent pas, il convient d'augmenter l'indice ν et de réitérer la réalisation à un ordre plus élevé. Enfin, on peut remarquer que l'observateur ainsi conçu est observable.

3.2 Système linéaire fondamental

On peut remarquer que toute cette conception repose sur la relation (5). Soit la matrice :

$$\Sigma_\nu = \begin{bmatrix} MA^\nu \\ LA^{\nu-1} \\ MA^{\nu-1} \\ \vdots \\ LA \\ MA \\ L \\ M \end{bmatrix},$$

alors (5) indique que :

$$\text{rang} \left(\begin{bmatrix} LA^\nu \\ \Sigma_\nu \end{bmatrix} \right) = \text{rang} (\Sigma_\nu),$$

c'est-à-dire que le système :

$$LA^\nu = \Phi \Sigma_\nu, \quad (8)$$

est compatible. Dans ce cas, l'ensemble des solutions de ce système fournit les matrices $F_{M,i}$ et $F_{L,i}$ sous la forme :

$$\begin{bmatrix} F_{M,\nu} & F_{L,\nu-1} & F_{M,\nu-1} & \cdots & F_{L,0} & F_{M,0} \end{bmatrix} = LA^\nu \Sigma_\nu^{\{1\}} + \Omega (I_\rho - \Sigma_\nu \Sigma_\nu^{\{1\}}), \quad (9)$$

où $\rho = m + \nu(m + l)$, Ω est une matrice arbitraire de taille $(l \times \rho)$ et $\Sigma_\nu^{\{1\}}$ une inverse généralisée quelconque de Σ_ν . Bien entendu, dans le cas où $\text{rang} (\Sigma_\nu) = \rho$ cette solution est unique. Toujours est-il que la résolution du système (8) fournit les matrices $F_{L,i}$, pour $i = 0$ à $\nu - 1$, donc permet de construire directement la matrice F ce qui permet d'en tester la stabilité. On sait alors si on peut procéder poursuivre la construction de l'observateur ou s'il y a lieu d'incrémenter ν .

3.3 Construction de T

Dans ce paragraphe nous allons exhiber une matrice T qui satisfait aux relations nécessaires que doit vérifier un observateur de Luenberger. On peut remarquer que la structure des matrices G_j qui, rappelons-le ont pour expression $G_{\nu-1} = (L - F_{M,\nu}M)B$ et pour $\nu \geq 2$ et $j = 0$ à $\nu - 2$:

$$G_j = \left(LA^{\nu-1-j} - \sum_{i=j+1}^{\nu-1} F_{L,i} LA^{i-1-j} - \sum_{i=j+1}^{\nu} F_{M,i} MA^{i-1-j} \right) B.$$

suggère, par la relation $G = TB$, la matrice de taille $(l\nu \times n)$:

$$T = \begin{bmatrix} LA^{\nu-1} - \sum_{i=1}^{\nu-1} F_{L,i} LA^{i-1} - \sum_{i=1}^{\nu} F_{M,i} MA^{i-1} \\ \vdots \\ LA^{\nu-j} - \sum_{i=j}^{\nu-1} F_{L,i} LA^{i-j} - \sum_{i=j}^{\nu} F_{M,i} MA^{i-j} \\ \vdots \\ L - F_{M,\nu}M \end{bmatrix}$$

candidate à être solution de l'équation de Sylvester caractéristique de ce type d'observateur. En supposant, pour simplifier, $\nu \geq 2$, il s'agit donc de prouver que cette matrice vérifie effectivement $TA - FT = HM$ avec :

$$F = \begin{bmatrix} I_l & & F_{L,0} \\ & \ddots & F_{L,1} \\ & & \vdots \\ & I_l & F_{L,\nu-2} \\ & & I_l & F_{L,\nu-1} \end{bmatrix} \text{ et } H = \begin{bmatrix} H_{M,0} \\ H_{M,1} \\ \vdots \\ H_{M,\nu-2} \\ H_{M,\nu-1} \end{bmatrix},$$

où, pour $i = 0$ à $\nu - 1$, $H_{M,i} = F_{M,i} + F_{L,i}F_{M,\nu}$.

En effet, on a :

$$TA = \begin{bmatrix} LA^\nu - \sum_{i=1}^{\nu-1} F_{L,i}LA^i - \sum_{i=1}^{\nu} F_{M,i}MA^i \\ \vdots \\ LA^{\nu-j+1} - \sum_{i=j}^{\nu-1} F_{L,i}LA^{i-j+1} - \sum_{i=j}^{\nu} F_{M,i}MA^{i-j+1} \\ \vdots \\ LA - F_{M,\nu}MA \end{bmatrix}.$$

Dans ce qui suit on note par X_j le j -ième bloc générique de l lignes de la matrice X induit par la partition :

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{\nu-1} \\ X_\nu \end{bmatrix}.$$

Les blocs génériques de T étant définis par, pour $j = 1$ à $\nu - 1$:

$$T_j = LA^{\nu-j} - \sum_{i=j}^{\nu-1} F_{L,i}LA^{i-j} - \sum_{i=j}^{\nu} F_{M,i}MA^{i-j},$$

et $T_\nu = L - F_{M,\nu}M$, les blocs génériques de FT s'écrivent, pour $j = 1$:

$$[FT]_1 = F_{L,0}T_\nu = F_{L,0}L - F_{L,0}F_{M,\nu}M,$$

et pour $j = 2$ à ν :

$$\begin{aligned} [FT]_j = T_{j-1} + F_{L,j-1}T_\nu &= LA^{\nu+1-j} - \sum_{i=j-1}^{\nu-1} F_{L,i}LA^{i+1-j} - \sum_{i=j-1}^{\nu} F_{M,i}MA^{i+1-j} \\ &\quad + F_{L,j-1}L - F_{L,j-1}F_{M,\nu}M. \end{aligned}$$

Pour $j = 2$ à $\nu - 1$, cette expression se réduit à :

$$[FT]_j = LA^{\nu+1-j} - \sum_{i=j}^{\nu-1} F_{L,i}LA^{i+1-j} - \sum_{i=j}^{\nu} F_{M,i}MA^{i+1-j} - (F_{M,j-1} + F_{L,j-1}F_{M,\nu})M,$$

et pour $j = \nu$, à $[FT]_\nu = LA - F_{M,\nu}MA - (F_{M,\nu-1} + F_{L,\nu-1}F_{M,\nu})M$.

Remarquons tout d'abord que la relation (5) permet d'écrire le premier bloc de TA sous la forme :

$$[TA]_1 = \sum_{i=0}^{\nu-1} F_{L,i} LA^i + \sum_{i=0}^{\nu} F_{M,i} MA^i - \sum_{i=1}^{\nu-1} F_{L,i} LA^i - \sum_{i=1}^{\nu} F_{M,i} MA^i = F_{L,0}L + F_{M,0}M.$$

Ainsi, les blocs génériques de $TA - FT$ s'écrivent :

– pour $j = 1$:

$$F_{L,0}L + F_{M,0}M - (F_{L,0}L - F_{L,0}F_{M,\nu}M) = (F_{M,0} + F_{L,0}F_{M,\nu})M;$$

– pour $j = 2$ à $\nu - 1$:

$$\begin{aligned} & LA^{\nu-j+1} - \sum_{i=j}^{\nu-1} F_{L,i} LA^{i-j+1} - \sum_{i=j}^{\nu} F_{M,i} MA^{i-j+1} \\ & - \left(LA^{\nu+1-j} - \sum_{i=j}^{\nu-1} F_{L,i} LA^{i+1-j} - \sum_{i=j}^{\nu} F_{M,i} MA^{i+1-j} - (F_{M,j-1} + F_{L,j-1}F_{M,\nu})M \right) = \\ & (F_{M,j-1} + F_{L,j-1}F_{M,\nu})M; \end{aligned}$$

– pour $j = \nu$:

$$LA - F_{M,\nu}MA - LA + F_{M,\nu}MA + (F_{M,\nu-1} + F_{L,\nu-1}F_{M,\nu})M = (F_{M,\nu-1} + F_{L,\nu-1}F_{M,\nu})M.$$

On vient ainsi de montrer que $TA - FT = HM$. Il reste à prouver que $PT + VM = L$. Puisque :

$$P = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & I_l \end{bmatrix} \text{ et } V = F_{M,\nu},$$

on obtient :

$$PT + VM = L - F_{M,\nu}M + F_{M,\nu}M,$$

ce qui achève la démonstration.

3.4 Résumé

Nous avons donc obtenu le résultat suivant :

Théorème 1. *S'il existe Ω tel que les matrices données par (9) conduisent à une matrice :*

$$F = \begin{bmatrix} & & & F_{L,0} \\ I_l & & & F_{L,1} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & I_l & F_{L,\nu-2} \\ & & & I_l & F_{L,\nu-1} \end{bmatrix},$$

de Hurwitz alors l'observateur de Luenberger (3) avec :

$$\begin{aligned} G &= \begin{bmatrix} G_0 \\ G_1 \\ \vdots \\ G_{\nu-2} \\ G_{\nu-1} \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} F_{M,0} \\ F_{M,1} \\ \vdots \\ F_{M,\nu-2} \\ F_{M,\nu-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{L,0} \\ F_{L,1} \\ \vdots \\ F_{L,\nu-2} \\ F_{L,\nu-1} \end{bmatrix} F_{M,\nu}, \\ P &= \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & I_l \end{bmatrix} \text{ et } V = F_{M,\nu}, \end{aligned}$$

où l'expression des matrices G_j , $j = 0$ à $\nu - 1$, est donnée en (7), est un observateur asymptotique de $Lx(t)$.

La preuve découle des développements précédents et de l'existence de la matrice T . Lorsque ce théorème est satisfait, la dimension de l'observateur obtenu est νl . Dans le cas où $\text{rang}(T) < \nu l$, une dernière étape, assez évidente, pour réduire cette dimension est nécessaire. À l'aide de la factorisation de rang maximal de T , on obtient rapidement un observateur d'ordre $q = \text{rang}(T)$, avec $(\nu - 1)l < q \leq \nu l$. Pour ne pas alourdir le texte, nous ne détaillons pas cette étape. De plus en considérant l'entier ν le plus petit tel que F soit stable, on obtient l'observateur stable de $Lx(t)$ d'ordre minimum.

4 Quelques cas particuliers intéressants mais déjà connus

4.1 Observateur de forme linéaire

Cette démarche a permis de proposer dans [21] des observateurs de Luenberger stables de taille minimale pour reconstruire une forme linéaire de l'état. Il a été montré que l'on pouvait alors, en augmentant l'indice ν dans la relation fondamentale (5), passer de la conception d'un observateur stable dont les dynamiques, dans le pire des cas, ne pouvaient être fixées *a priori* à un observateur dont on pouvait fixer de plus en plus de dynamiques. Nous ne reviendrons pas sur la technique utilisée, qui est généralisée par les relations présentées dans la section précédente. La particularité notable de ce cas réside dans l'absence d'une phase de réduction de dimensionnalité de l'observateur puisque l'on rajoute à chaque étape une seule composante à l'état de l'observateur.

4.2 Observateur de Darouach

Il s'agit d'un observateur de Luenberger (3) pour lequel $q = l$ et $P = I_l$. La condition d'existence de cet observateur, établie dans [4], s'écrit :

$$\forall s \in \mathbb{C}, \Re(s) \geq 0, \text{rang} \begin{bmatrix} M \\ MA \\ L(sI_n - A) \end{bmatrix} = \text{rang} \begin{bmatrix} MA \\ L \\ M \end{bmatrix} = \text{rang} \begin{bmatrix} LA \\ MA \\ L \\ M \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Cette condition peut être décomposée en deux conditions distinctes, chacune avec une interprétation différente. La dernière partie de (10), à savoir :

$$\text{rang} \begin{bmatrix} MA \\ L \\ M \end{bmatrix} = \text{rang} \begin{bmatrix} LA \\ MA \\ L \\ M \end{bmatrix},$$

qui concerne l'existence de la structure (3) avec $q = l$ conduit immédiatement à la compatibilité du système (8) pour $\nu = 1$. Par son traitement, cette relation fournit l'existence de l'écriture, non forcément unique :

$$LA = F_{M,1}MA + F_{L,0}L + F_{M,0}M. \quad (11)$$

Utilisons cette décomposition dans la première partie de la condition de Darouach :

$$\forall s \in \mathbb{C}, \Re(s) \geq 0, \text{rang} \begin{bmatrix} M \\ MA \\ L(sI_n - A) \end{bmatrix} = \text{rang} \begin{bmatrix} MA \\ L \\ M \end{bmatrix}, \quad (12)$$

cela donne :

$$\begin{aligned} \text{rang} \begin{bmatrix} M \\ MA \\ L(sI_n - A) \end{bmatrix} &= \text{rang} \begin{bmatrix} M \\ MA \\ sL - F_{M,1}MA - F_{L,0}L - F_{M,0}M \end{bmatrix}, \\ &= \text{rang} \begin{bmatrix} M \\ MA \\ sL - F_{L,0}L \end{bmatrix} = \text{rang} \begin{bmatrix} M \\ MA \\ (sI_l - F_{L,0})L \end{bmatrix}, \\ &= \text{rang} \left\{ \begin{bmatrix} I_m & & I_m \\ & & \\ & sI_l - F_{L,0} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} MA \\ L \\ M \end{bmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Ainsi la condition (12) donne

$$\forall s \in \mathbb{C}, \Re(s) \geq 0, \text{rang} [sI_l - F_{L,0}] = l,$$

ce qui signifie que $F_{L,0}$ est une matrice de Hurwitz, et donc que l'observateur de Luenberger est asymptotique. La condition de Darouach s'avère donc équivalente à l'existence de la décomposition (11) avec $F_{L,0}$ de Hurwitz. En conséquence, le théorème 1 est une généralisation de celui établi par Darouach. Notons cependant une différence notable entre ces deux résultats. Alors que celui que nous présentons est essentiellement sur le calcul matriciel, celui de Darouach est basé sur un critère fréquentiel de type Kalman-Hautus, critère difficilement exploitable en dehors du cadre des systèmes linéaires à coefficients constants.

4.3 Observateur de Cumming-Gopinath

Appelé également observateur réduit il s'agit d'un observateur d'ordre $n - m$ permettant de reconstruire, pour un modèle observable, l'état complet du système (1) [3, 10]. Nous allons voir que notre démarche permet de retrouver cette structure que nous rappelons ici pour plus de facilité.

Maintenant, supposons que $M = [I_m \ 0]$ et par voie de conséquence $L = [0 \ I_{n-m}]$, c'est-à-dire que l'on cherche à reconstruire les $n - m$ dernières composantes de l'état de (1) qui ne sont pas mesurées. Ces partitions conduisent à la partition de l'état :

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

où $x_1(t) = y(t)$ représente les m premières composantes de $x(t)$. On définit également les partitions des matrices :

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

avec $A_{11}(m \times m)$ et $B_1(m \times r)$.

4.3.1 Observateur réduit (rappel)

À partir des relations :

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= A_{11}y(t) + A_{12}x_2(t) + B_1u(t), \\ \dot{x}_2(t) &= A_{21}y(t) + A_{22}x_2(t) + B_2u(t), \\ y(t) &= x_1(t), \end{aligned}$$

des techniques éprouvées conduisent à l'observateur de Luenberger :

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= (A_{22} - \Lambda A_{12})z(t) + (B_2 - \Lambda B_1)u(t) \\ &\quad + (A_{21} - \Lambda A_{11} + A_{22}\Lambda - \Lambda A_{12}\Lambda)y(t), \\ \hat{x}(t) &= \begin{bmatrix} y(t) \\ z(t) + \Lambda y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ I_{n-m} \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} I_m \\ \Lambda \end{bmatrix} y(t), \end{aligned}$$

où Λ est une matrice de taille $((n-m) \times m)$ appelée gain de réinjection de l'innovation en sortie dans l'observateur. Il est bien connu que lorsque la paire (A, M) est détectable, ce qui est équivalent à la paire (A_{22}, A_{12}) est détectable, alors il existe toujours une matrice Λ telle que la matrice $A_{22} - \Lambda A_{12}$ soit de Hurwitz.

Dans le cas où un changement de variables, traduit par la matrice inversible Π , a été utilisé dans un traitement préliminaire pour se ramener aux hypothèses sur L et M , seule la dernière relation est à modifier en :

$$\hat{x}(t) = \Pi^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ I_{n-m} \end{bmatrix} z(t) + \Pi^{-1} \begin{bmatrix} I_m \\ \Lambda \end{bmatrix} y(t).$$

Le lien avec l'observateur de Luenberger (3) est assuré par :

$$\begin{aligned} F &= A_{22} - \Lambda A_{12}, & G &= B_2 - \Lambda B_1, \\ H &= A_{21} - \Lambda A_{11} + A_{22}\Lambda - \Lambda A_{12}\Lambda, & P &= \Pi^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ I_{n-m} \end{bmatrix}, \\ V &= \Pi^{-1} \begin{bmatrix} I_m \\ \Lambda \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

4.3.2 Obtention directe de cet observateur

Nous montrons dans cette section que l'on peut obtenir l'observateur de Cumming-Gopinath à l'aide de la technique directe par dérivation que nous avons présenté. Avec $L = [0 \quad I_{n-m}]$ et $M = [I_m \quad 0]$, on obtient :

$$LA = [A_{21} \quad A_{22}] \text{ et } MA = [A_{11} \quad A_{12}].$$

Puisque $\text{rang} \left(\begin{bmatrix} L \\ M \end{bmatrix} \right) = n$, on a nécessairement d'une part :

$$\text{rang} \left(\begin{bmatrix} LA \\ MA \\ L \\ M \end{bmatrix} \right) = \text{rang} \left(\begin{bmatrix} MA \\ L \\ M \end{bmatrix} \right),$$

donc $\nu = 1$ dans ce qui précède, et d'autre part les décompositions uniques :

$$\begin{aligned} LA &= A_{21}M + A_{22}L, \\ MA &= A_{11}M + A_{12}L. \end{aligned}$$

Ainsi l'équation :

$$LA = \Phi \begin{bmatrix} MA \\ L \\ M \end{bmatrix},$$

d'inconnue $\Phi = [F_{M,1} \ F_{L,0} \ F_{M,0}]$ est compatible. Les matrices $F_{M,1}$, $F_{L,0}$ et $F_{M,0}$ vérifient donc :

$$\begin{aligned} A_{21}M + A_{22}L &= F_{M,1}(A_{11}M + A_{12}L) + F_{L,0}L + F_{M,0}M, \\ &= (F_{M,0} + F_{M,1}A_{12})M + (F_{L,0} + F_{M,1}A_{11})L. \end{aligned}$$

L'unicité des décompositions de LA et MA conduit aux égalités :

$$\begin{aligned} A_{22} &= F_{L,0} + F_{M,1}A_{12}, \\ A_{21} &= F_{M,0} + F_{M,1}A_{11}. \end{aligned}$$

La première de ces relations donne :

$$F_{L,0} = A_{22} - F_{M,1}A_{12},$$

et, suivant ce qui précède, lorsque la paire (A_{22}, A_{12}) est détectable, alors il existe toujours une matrice $F_{M,1}$ telle que la matrice $A_{22} - F_{M,1}A_{12}$ soit de Hurwitz. Un choix particulier de $F_{M,1}$ satisfaisant cette contrainte conduit également à $F_{M,0} = A_{21} - F_{M,1}A_{11}$.

Puisque $\nu = 1$, il reste à calculer :

$$\begin{aligned} F &= F_{L,0} = A_{22} - F_{M,1}A_{12}, \\ G &= G_0(L - F_{M,1}M)B = B_2 - F_{M,1}B_1, \\ H &= H_{M,0} = F_{M,0} + F_{L,0}F_{M,1}, \\ &= A_{21} - F_{M,1}A_{11} + A_{22}F_{M,1} - F_{M,1}A_{12}F_{M,1}, \\ P &= I_{n-m}, \\ V &= F_{M,1}. \end{aligned}$$

Avec $F_{M,1} = \Lambda$, on a ainsi retrouvé l'observateur de Cumming-Gopinath à l'aide d'une démarche directe.

5 Conclusion

Outre le fait que nous avons déterminé une procédure constructive de conception de l'observateur d'une fonctionnelle linéaire de l'état d'un système linéaire à paramètres constants on remarque que cette procédure peut tout à fait être étendue aux modèles linéaires non stationnaires, c'est-à-dire dont les paramètres sont des fonctions connues ou estimées du temps. En ce qui concerne l'observation cela a été proposé dans quelques cas particuliers comme par exemple l'extension

aux systèmes non stationnaires du critère de Darouach dans [22] ou la construction d'observateur de formes linéaires [23]. Ce point de vue nous paraît essentiel car les modèles linéaires non stationnaires, grâce aux avancées permises par certains points de vue fructueux en automatique, constituent un élément important pour le pilotage de suivi de trajectoires par un système.

Ainsi l'article que nous avons présenté s'inscrit dans une démarche plus générale : fonder les raisonnements et principes développés uniquement sur des notions que l'on peut étendre en temps variant (dérivations, intégrations, signaux, etc.) et nous aurions pu appeler ce texte :

En défense du principe de linéarité non stationnaire.

Ayant commencé sur une citation et nous finirons par une autre citation. Afin de justifier le terme de non stationnaire que nous avons choisi pour caractériser les systèmes linéaires dont les paramètres varient d'une façon connue en fonction du temps, ce qui entre parenthèses les distingue des systèmes linéaires à paramètres variants (LPV) et avec lesquels on ne doit pas les confondre, on peut se rappeler que le philosophe Gaston Bachelard (1884-1962) dans son ouvrage *La philosophie du non*, P.U.F, Paris, 1940, sous-titré *Nouvelle défense de l'esprit scientifique*, indique :

La généralisation par le non doit inclure ce qu'elle nie.

Références

- [1] Ayadi, M., Contribution à la commande des systèmes linéaires plats de dimension finie, Thèse de Doctorat, INP-Toulouse, 2002.
- [2] Chen, C.-T., *Linear system theory and design*, Oxford University Press, 1999.
- [3] Cumming, S.D.G., Design of observers of reduced dynamics, *Electron. Lett.*, vol. 5, n. 10, pp. 213–214, 1969.
- [4] Darouach, M., Existence and design of functional observers for linear systems, *IEEE Trans. Aut. Control*, AC-45, n. 5, pp. 940–943, 2000.
- [5] Fernando, T., Trinh, H., Jennings, L., Functional observability and the design of minimum order linear functional observers, *IEEE Trans. Aut. Control*, vol. 55, n. 5, pp. 1268–1273, 2010.
- [6] Fernando, T., Trinh, A procedure for designing linear functional observers, *Applied Mathematics Letters*, vol. 26, n. 2, pp. 240–243, 2013.
- [7] Fliess, M., Lévine, J., Martin, P., Rouchon, P., Flatness and defect of nonlinear systems : introductory theory and examples, *Int. J. Control*, vol. 61, n. 6, pp. 1327–61, 1995.
- [8] Fliess, M., Sur des pensers anciens faisons des vers nouveaux, Actes de CIFA'2000, pp. 26-36, 2000.
- [9] Fortmann, T.E., Williamson, D., Design of low-order observers for linear feedback control laws, *IEEE Trans. Aut. Control*, vol. AC-17, n. 2, pp. 301–308, 1972.
- [10] Gopinath, On the control of linear multiple input-output systems, *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 50, pp. 1063–1081, 1971.
- [11] Kailath T., *Linear systems*, Prentice Hall, 1980.

- [12] Korovin, S.K., Fomichev, V.V., *State observers for linear systems with uncertainty*, in russian, Fitzmatgiz, 2007, english transl., Walter de Gruyter, 2009.
- [13] Korovin, S.K., Fomichev, V.V., Minimum-order functional observers, *Computational Mathematics and Modeling*, vol. 21, n. 3, pp. 275–296, 2010.
- [14] Luenberger, D.G., Determining the state of a linear system with observers of low dynamic order, Ph. D. Dissertation, Stanford University, 1963.
- [15] Luenberger, D.G., Observing the state of a linear system, *IEEE Trans. on Military Electronics*, MIL-8, n. 2, pp. 74–80, 1964.
- [16] Luenberger, D.G., Observers for Multivariable Systems, *IEEE Trans. Aut. Control*, vol. 11, n. 2, pp. 190–197, 1966.
- [17] Maquin, D., Ragot, J., *Diagnostic des systèmes linéaires*, Hermès, 2000.
- [18] M. Mboup, C. Join, M. Fliess, Numerical differentiation with annihilators in noisy environment, *Numerical Algorithms*, vol. 50, n. 4, pp. 439–467, 2009.
- [19] O’Reilly, J., *Observers for linear systems*, Academic Press, 1983.
- [20] Rotella, F., Zambettakis, I., *Automatique élémentaire*, Hermes-Lavoisier, 2008.
- [21] Rotella, F., Zambettakis, I., Minimal single linear functional observers for linear systems, *Automatica*, vol. 47, n. 1, pp. 164–169, 2011.
- [22] Rotella, F., Zambettakis, I., On functional observers for linear time-varying systems, *IEEE Trans. Aut. Control*, vol. 58, n. 5, pp. 1354–1360, 2013.
- [23] Rotella, F., Zambettakis, I., A design procedure for a single time-varying functional observer, Proc. 52th IEEE Conference on Decision and Control, pp. , 2013.
- [24] Tian, Y., Floquet, T., Perruquetti, W., Fast state estimation in linear time-varying systems : an algebraic approach, Proc. 47th IEEE Conference on Decision and Control, pp. 2539–2544, 2008.
- [25] Trinh, H., Nahavandi, S., Tran, T.D., Algorithms for designing reduced-order functional observers of linear systems, *Int. J. Innovative Computing, Information and Control*, vol. 4, n. 2, pp. 321–333, 2008.
- [26] Trinh, H., Fernando, T., *Functional observers for dynamical systems*, Springer, 2012.
- [27] Tsui C.C., A new algorithm for the design of multifunctional observers, *IEEE Trans. Aut. Control*, vol. AC-30, n. 1, pp. 89–93, 1985.
- [28] Tsui C.C., An overview of the applications and solution of a fundamental matrix equation pair, *Jour. of Franklin Institute*, vol. 341, pp. 465–75, 2004.