



HAL
open science

Commande par platitude des systèmes linéaires multientrées multi-sorties non stationnaires

Mohamed Ben Abdallah, Mounir Ayadi, Frédéric Rotella, Mohamed Benrejeb

► **To cite this version:**

Mohamed Ben Abdallah, Mounir Ayadi, Frédéric Rotella, Mohamed Benrejeb. Commande par platitude des systèmes linéaires multientrées multi-sorties non stationnaires. Journal Européen des Systèmes Automatisés (JESA), 2014, 1, pp.1-23. 10.3166/JESA.48.1-23 . hal-01945169

HAL Id: hal-01945169

<https://hal.science/hal-01945169v1>

Submitted on 5 Dec 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Open Archive Toulouse Archive Ouverte

OATAO is an open access repository that collects the work of Toulouse researchers and makes it freely available over the web where possible

This is an author's version published in: <http://oatao.univ-toulouse.fr/20018>

To cite this version:

Ben Abdallah, Mohamed and Ayadi, Mounir and Rotella, Frédéric  and Benrejeb, Mohamed *Commande par platitude des systèmes linéaires multientrées multi-sorties non stationnaires*. (2014) Journal Européen des Systèmes Automatisés (1). 1-23. ISSN 1269-6935

Any correspondence concerning this service should be sent to the repository administrator: tech-oatao@listes-diff.inp-toulouse.fr

Commande par platitude de systèmes multi-entrées multi-sorties non stationnaires

Mohamed Ben Abdallah¹, Mounir Ayadi¹, Frédéric Rotella²,
Mohamed Benrejeb¹

1. Université de Tunis El Manar, École Nationale d'Ingénieurs de Tunis,
LR-11-ES18 Laboratoire Automatique, BP 37, Le Belvédère, 1002, Tunis,
Tunisie.
Mohamed.Benabdallah@enit.rnu.tn, mounir.ayadi@enit.rnu.tn,
mohamed.benrejeb@enit.rnu.tn

2. École Nationale d'Ingénieurs de Tarbes,
EA 1905 Laboratoire Genie de Production, av. d'Azereix, 65016, Tarbes,
France.
rotella@enit.fr

ABSTRACT. This paper deals with a flatness-based control method of linear time-varying (LTV) multi-input multi-output (MIMO) system, developed in order to ensure the tracking of a reference trajectory. Polynomial two-degree-of-freedom controller can then be designed with the use of an exact observer and without resolving the generalized Bézout's equation in LTV framework. The proposed approach is applied to nonlinear systems using its linearizations around given trajectories. The approach is illustrated with the control of the satellite SPOT-5.

RÉSUMÉ. On propose dans le présent article, une stratégie de commande par platitude des systèmes multi-entrées multi-sorties linéaires non stationnaires en vue de réaliser la poursuite de trajectoires de référence. La synthèse de la loi de commande est basée sur le développement d'un observateur exact permettant la conception d'un régulateur polynomial à deux degrés de liberté sans passer par la résolution de l'équation de Bézout généralisée dans le cas non stationnaire. Cette approche est appliquée à la commande de systèmes non linéaires par linéarisation autour de trajectoires données. L'approche proposée est appliquée sur le modèle du satellite SPOT-5.

KEYWORDS: flatness, trajectory tracking, linear time-varying (LTV) multi-input multi-output (MIMO) systems, polynomial two-degrees-of-freedom controller, exact observer.

MOTS-CLÉS : platitude, suivi de trajectoires, système multi-entrées multi-sorties non stationnaires, régulateurs polynomiaux à deux degrés de liberté, observateur exact.

1. Introduction

Dans des travaux précédents, la stratégie de commande par platitude développée dans (Rotella *et al.*, 2002) a été étendue au cas de systèmes mono-entrée mono-sortie non stationnaires (Ben Abdallah *et al.*, 2012b) et au cas de systèmes multi-entrées multi-sorties stationnaires. Le régulateur proposé est constitué d'un observateur exact qui effectue un calcul direct du vecteur d'état dont les composantes sont la sortie plate et ses dérivées. Cet observateur-régulateur permet à la sortie du système de poursuivre une trajectoire de référence sans l'utilisation d'une dynamique d'observateur. La méthode proposée nous ramène à la conception d'une commande qui peut être vue comme étant un régulateur RST sans résoudre l'équation de Bézout généralisée.

Dans la théorie de la commande, l'étude des systèmes linéaires non stationnaires s'est avérée intéressante dans la mesure où on pourrait linéariser un système, non pas autour d'un point de fonctionnement, mais le long d'une trajectoire. Nous proposons dans le présent article de généraliser la stratégie de commande par platitude au cas des systèmes multi-entrées multi-sorties non stationnaires. Outre le problème de factorisation à droite et à gauche dans le cas des systèmes multi-entrées multi-sorties, le régulateur du type RST dans le cas des systèmes non stationnaires pose un problème vu que ses coefficients ne commutent pas avec l'opérateur de dérivation par rapport au temps et que le placement des pôles en boucle fermée est plus compliqué. Dans ses travaux, (Rotella, Zambettakis, 2010) propose pour résoudre ce problème, des méthodes basées sur des techniques de factorisation des matrices de transfert linéaires non stationnaires. Dans le but d'éviter le choix des pôles désirés et la résolution de l'équation de Bézout, on propose dans cet article une commande par platitude appliquée au cas multivariable des systèmes non stationnaires. L'application de la commande par platitude à des systèmes à paramètres variables dans le temps permet d'aboutir à une forme naturelle et intéressante du régulateur RST.

L'article est organisé comme suit : dans la partie 2, la propriété de platitude est rappelée. Dans la partie 3, les notions de base sur les systèmes linéaires multi-entrées multi-sorties non stationnaires sont rappelées pour ensuite proposer, dans la partie 4, la synthèse d'un régulateur polynomial basé sur l'observation exact du vecteur d'état constitué par la sortie plate et ses dérivées. Dans la partie 5, la stratégie proposée est appliquée au modèle non linéaire du satellite SPOT-5.

2. Notions de platitude

La propriété de platitude a été introduite pour la première fois par (Fliess *et al.*, 1992), pour les systèmes non linéaires stationnaires. Dès lors, elle était largement introduite dans la littérature (Rudolph, 2003), (Sira-Ramirez, Agrawal, 2004), (Rotella, Zambettakis, 2007), (Lévine, 2009). Cette propriété, qui permet de paramétrer de façon très simple le comportement dynamique d'un système, est basée sur la mise en évidence d'un ensemble de variables fondamentales du système : ses sorties plates. Pour cette raison, il est possible d'exprimer l'état, ainsi que l'entrée et la sortie de sys-

tème comme étant une fonction différentielle de la sortie plate. Considérant le système non linéaire décrit par l'équation différentielle suivante :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \quad (1)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur d'état et $u(t) \in \mathbb{R}^m$ est la commande. Ce système est dit différentiellement plat s'il existe une variable $z(t) \in \mathbb{R}^m$ de la forme :

$$z(t) = h(x(t), u(t), \dot{u}(t), \dots, u^{(r)}(t)) \quad (2)$$

telle que :

$$x(t) = \mathbf{A}(z(t), \dot{z}(t), \dots, z^{(\alpha)}(t)) \quad (3)$$

$$u(t) = \mathbf{B}(z(t), \dot{z}(t), \dots, z^{(\alpha+1)}(t)) \quad (4)$$

où α est un entier. La variable $z(t)$ est la sortie plate, qui permet de paramétrer n'importe quelle variable du système. Les composantes de $z(t)$ doivent être différentiellement indépendantes. La sortie de ce processus est exprimée comme suit :

$$y(t) = g(x(t), u(t)) \quad (5)$$

A partir des équations (3) et (4), cette sortie s'écrit en fonction de la sortie plate comme suit :

$$y(t) = \mathbf{C}(z(t), \dot{z}(t), \dots, z^{(\sigma)}(t)) \quad (6)$$

où σ est un entier. Dans le cas linéaire, l'expression explicite de la sortie $y(t)$ et de la commande $u(t)$ permet de relier la sortie plate à l'état partiel défini par (Kailath, 1980). Nous pouvons ainsi calculer les trajectoires du système à partir de la définition d'une trajectoire pour la sortie plate $z(t)$ sans intégrer d'équations différentielles.

3. Systèmes linéaires multi-entrées multi-sorties non stationnaires

Plusieurs représentations d'entrées-sorties ont été introduites pour les systèmes non stationnaires. Dans cet article, la représentation d'état est utilisée pour mettre en œuvre la stratégie de commande. En dimension finie, on considère le système linéaire continu à paramètres temporellement variables décrit par l'équation d'état de dimension n :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)x(t) \end{aligned} \quad (7)$$

tel que les matrices $A(t)$, $B(t)$ et $C(t)$ dont les coefficients sont en fonction du temps t , ont pour dimensions respectives $(n \times n)$, $(n \times m)$ et $(m \times n)$. Dans le cas général, lorsque $A(t)$ et $B(t)$ sont suffisamment dérivables, on peut construire la suite des matrices $K^i(B(t))$ pour $i = 0, 1, \dots$ telle que :

$$K^0(B(t)) = B(t)$$

$$K^i(B(t)) = -A(t)K^{i-1}(B(t)) + \dot{K}^{i-1}(B(t)) \text{ si } i \geq 1$$

S'il existe un intervalle $T = [t_1, t_2]$ et un entier μ tels que la matrice :

$$\mathcal{K}_{(A(t), B(t))}(t) = \begin{pmatrix} K^0(B(t)) & K^1(B(t)) & \cdots & K^{\mu-1}(B(t)) \end{pmatrix} \quad (8)$$

soit de rang n sur tout T , le système est alors uniformément commandable et $\mathcal{K}_{(A(t), B(t))}(t)$ s'appelle matrice de commandabilité.

On construit la suite de matrices $L_i(C(t))$, pour $i = 0, 1, \dots$ telle que :

$$\begin{aligned} L^0(C(t)) &= C(t) \\ L^i(C(t)) &= L^{i-1}(C(t))A(t) + \dot{L}^{i-1}(C(t)) \text{ si } i \geq 1 \end{aligned}$$

S'il existe un intervalle de temps $T = [t_1, t_2]$ et un entier ν tels que la matrice :

$$\mathcal{L}_{(A(t), C(t))}(t) = \begin{pmatrix} L^0(C(t)) \\ L^1(C(t)) \\ \vdots \\ L^{\nu-1}(C(t)) \end{pmatrix} \quad (9)$$

soit de rang n , le système est alors uniformément observable sur T . Dans ces conditions, $\mathcal{L}_{(A(t), C(t))}(t)$ est appelée matrice d'observabilité de la paire $(A(t), C(t))$. Dans ce cas et contrairement au cas stationnaire ou au cas SISO, les indices μ et ν ne sont pas limités à $n - 1$. Ces critères de commandabilité et d'observabilité, appelés critères de Silverman et Meadows (Silverman, Meadows, 1967), généralisent les critères de Kalman (Kailath, 1980). Selon le résultat de Silverman-Meadows, si le système est uniformément commandable alors il existe un changement de variables d'état $x_C(t) = P_C(t)x(t)$ et de commande $u_C(t) = H_C(t)u(t)$ qui met le système sous une forme canonique commandable en utilisant l'algorithme de Seal-Stubberud (Seal, Stubberud, 1969), (voir annexe A) qui généralise l'algorithme de Luenberger (Luenberger, 1967). Cette forme canonique peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} \dot{x}_C(t) &= A_C(t)x_C(t) + \bar{B}_C u_C(t) \\ y(t) &= C_C(t)x_C(t) \end{aligned} \quad (10)$$

telle que les matrices $A_C(t)$, $H_C(t)$, $\bar{B}_C(t)$ et $C_C(t)$ sont données dans l'annexe A.

Remarque

Le système MIMO non stationnaire linéaire dont les indices de commandabilité et les indices d'observabilité ne sont pas des constantes, est appelé système non-lexicographiquement fixés. Dans ce travail, on ne traite que la classe des systèmes uniformément commandables dite lexicographiquement fixé (Shafai, Carroll, 1986) où les indices de commandabilité et d'observabilité sont invariants dans le temps. Les vecteurs sélectionnés dans la première étape de l'algorithme donné dans l'annexe A, sont alors toujours indépendants. Comme perspective de ce travail, on envisage l'extension de la commande proposée à la classe des systèmes MIMO non stationnaires linéaires non-lexicographiquement fixés. Dans ce dernier cas, on consultera avec intérêt les travaux réalisés par (Valasek, Olgac, 1999), (Mutoh, Kimura, 2011), (Mutoh, Hara, 2012), dans les quels, ils ont proposé une commande basée sur le placement des pôles, en augmentant l'équation d'état du système de telle sorte que le système augmenté soit commandable et lexicographiquement fixé.

4. Synthèse du régulateur polynomial

4.1. Commande par platitude

Une condition nécessaire et suffisante de platitude d'un système linéaire est sa commandabilité impliquant que les notions de platitude et de commandabilité coïncident, (Fliess *et al.*, 1995). A ce stade, il suffit de prendre comme sorties plates, les sorties de Brunovsky issues de la forme canonique commandable. Par ailleurs, la notion d'équivalence différentielle au sens de Lie-Bäcklund (Fliess *et al.*, 1999) montre que le nombre des composantes de $z(t)$ est donné par celui de la commande : $\dim z(t) = \dim u(t)$.

Remarque :

Cette équivalence a été effectivement démontrée dans les travaux de (Fliess et al., 1995) dans le cas de systèmes stationnaires. Dans le cas de systèmes non stationnaires et selon les résultats de (Malrait et al., 2001), la commandabilité uniforme indique que le système LTV mis sous forme canonique de Brunovsky (soit une chaîne de n intégrateurs) est équivalent à un système linéaire stationnaire après un changement de variables d'état et redéfinition de l'entrée de commande. Le système est ainsi différentiellement plat si le système est uniformément commandable. Dans ce cas, la sortie plate ou la sortie de Brunovsky est directement obtenue en tant que combinaison linéaire variant dans le temps des états d'origine. L'équivalence entre platitude et commandabilité reste ainsi valable dans le cas non stationnaire.

En partitionnant le vecteur d'état de la forme canonique commandable (10) :

$$x_C(t) = \left(x_C^{1T}(t) \quad x_C^{2T}(t) \quad \cdots \quad x_C^{mT}(t) \right)^T \quad (11)$$

et en notant par $z_i(t)$ chaque première composante des vecteurs $x_C^i(t)$, la sortie plate ou la sortie de Brunovsky est alors donnée par :

$$z(t) = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ \vdots \\ z_m(t) \end{pmatrix} \quad (12)$$

En notant par $u_{C,i}(t)$ l' i -ième composante de $u_C(t)$ et $\alpha_{i,j,k}(t)$ le k -ième coefficient de la dernière ligne de $A_{C,ij}(t)$, on déduit à partir de la forme commandable l'expression de l'entrée en fonction de la sortie plate :

$$u_{C,i}(t) = z_i^{(\mu_i)}(t) + \sum_{j=1}^m \left(\sum_{k=0}^{\mu_i-1} \alpha_{i,j,k}(t) z_j^{(k)}(t) \right) \quad (13)$$

telle que les μ_i , pour $i = 1$ à n , sont les indices de commandabilité déterminés dans l'annexe A.

L'élaboration d'une loi de commande par platitude en boucle fermée permettant de suivre une trajectoire de référence $z_d(t)$ est donnée par :

$$u_{C,i}(t) = z_{d,i}^{(\mu_i)}(t) + \sum_{k=0}^{\mu_i} \kappa_{i,k} \left(z_{d,i}^{(k)}(t) - z_i^{(k)}(t) \right) + \sum_{j=1}^m \left(\sum_{k=0}^{\mu_j-1} \alpha_{i,j,k}(t) z_j^{(k)}(t) \right) \quad (14)$$

La dynamique du modèle de poursuite est définie par les coefficients $\kappa_{i,k}$ dont le choix permet d'obtenir les pôles qui correspondent au modèle de poursuite désiré. On obtient alors un suivi asymptotique de la trajectoire désirée $z_d(t)$. En notant par $Z(t) = x_C(t)$ et comme $u_C(t) = H_C(t)u(t)$, la commande $u(t)$ se met alors sous la forme suivante :

$$u(t) = (H_C(t))^{-1} (K(p)z_d(t) - \Lambda(t)Z(t)) \quad (15)$$

ce qui présente un retour d'état non stationnaire où $K(p)$ est une matrice polynomiale donnée par :

$$K(p) = \text{diag}(\kappa_i(p)) \quad (16)$$

telle que $\kappa_i(p)$ sont des polynômes en fonction de l'opérateur de dérivation p et qui définissent la dynamique des erreurs de poursuite. La matrice $\Lambda(t)$ dont les coefficients dépendent de t , s'écrit :

$$\Lambda(t) = [\Lambda_{i,j}(t)]_{i,j=1 \dots m} = \begin{cases} \left[\begin{array}{cccc} \kappa_{i,0} - \alpha_{i,i,0}(t) & \kappa_{i,1} - \alpha_{i,i,1}(t) & \dots & \kappa_{i,\mu_i-1} - \alpha_{i,i,\mu_i-1}(t) \end{array} \right] & \text{si } i = j \\ \left[\begin{array}{cccc} -\alpha_{i,j,0}(t) & -\alpha_{i,j,1}(t) & \dots & -\alpha_{i,j,\mu_i-1}(t) \end{array} \right] & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (17)$$

et :

$$Z(t) = \left(\begin{array}{cccc} z_1(t) & \dot{z}_1(t) & \dots & z_1^{(\mu_1-1)}(t) & \dots \\ & z_m(t) & \dot{z}_m(t) & \dots & z_m^{(\mu_m-1)}(t) \end{array} \right)^T \quad (18)$$

représente le vecteur d'état de la forme canonique commandable. Cette commande donnée par (15) permet d'assurer une poursuite asymptotique des trajectoires avec :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (z_{d,i}(t) - z_i(t)) = 0, \text{ pour } i = 1 \dots m \quad (19)$$

Il est évident qu'à partir de l'expression (15), il est nécessaire de déterminer un vecteur d'observation de $Z(t)$. Un observateur d'ordre plein ou d'ordre réduit peuvent être utilisés, mais la difficulté apparaît dans le choix des pôles de l'observateur dans le cas non stationnaire. Pour contourner ce problème, on peut utiliser l'idée suggérée par (Fliess, 2000) et appliquée par (Marquez *et al.*, 2000) et (Rotella *et al.*, 2002) dans le cas SISO stationnaire et qui consiste à utiliser l'observateur exact, objet des développements de la partie suivante.

4.2. Forme polynomiale de la commande

Selon (Kailath, 1980), la dérivation de la sortie $y(t)$ dans l'équation (10) jusqu'à l'ordre $(\nu - 1)$, conduit à écrire :

$$\begin{aligned}
 y(t) &= C_C(t) Z(t) = O_0(t) Z(t) \\
 \dot{y}(t) &= \left(\dot{C}_C(t) + C_C(t) A_C(t) \right) Z(t) + C_C(t) \bar{B}_C u_C(t) \\
 &= O_1(t) Z(t) + M_1(t) u_C(t) \\
 y^{(2)}(t) &= \left(\dot{O}_1(t) + A_C(t) O_1(t) \right) Z(t) + \\
 &\quad \left(O_1(t) \bar{B}_C(t) + \dot{M}_1(t) \right) u_C(t) + M_1(t) \dot{u}_C(t) \\
 &= O_2(t) Z(t) + M_2(t) u_C(t) + M_1(t) \dot{u}_C(t) \\
 &\vdots \\
 y^{(\nu-1)}(t) &= O_{\nu-1}(t) Z(t) + M_{\nu-1}(t) u_C(t) + M_{\nu-1,2}(t) \dot{u}_C(t) + \\
 &\quad M_{\nu-1,3}(t) u_C^{(2)}(t) + \dots + M_1(t) u_C^{(\nu-2)}(t)
 \end{aligned} \tag{20}$$

et donc à la forme suivante :

$$Y(t) = O(t)Z(t) + M(t)U(t) \tag{21}$$

telle que :

$$Y^T(t) = \left(y^T(t) \quad \dot{y}^T(t) \quad \dots \quad y^{(\nu-1)T}(t) \right) \tag{22}$$

$$U^T(t) = \left(u_C^T(t) \quad \dot{u}_C^T(t) \quad \dots \quad u_C^{(\nu-2)T}(t) \right) \tag{23}$$

$$O(t) = \begin{pmatrix} O_0(t) \\ O_1(t) \\ \vdots \\ O_{\nu-1}(t) \end{pmatrix} \tag{24}$$

$O(t)$ est bien la matrice d'observabilité de la paire $(A_C(t), C_C(t))$ et $M(t)$ la matrice de transmission donnée par :

$$M(t) = \begin{pmatrix} M_0 & M_0 & \dots & M_0 & M_0 \\ M_1(t) & M_0 & & & M_0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ M_{\nu-2}(t) & & & M_1(t) & M_0 \\ M_{\nu-1}(t) & M_{\nu-1,2}(t) & M_{\nu-1,3}(t) & \dots & M_1(t) \end{pmatrix} \tag{25}$$

où toutes les M_i sont des matrices de dimension $(m \times m)$ données par :

- M_0 est une matrice nulle,
- $M_1(t) = C_C(t) \bar{B}_C$,
- pour $i = 2$ à $\nu - 1$, $M_i(t) = \dot{M}_{i-1}(t) + O_i(t) \bar{B}_C$,
- $M_{\nu-1,2}(t) = M_{\nu-2}(t) + \sum_{i=1}^{\nu-3} M_i^{(\nu-2-i)}(t)$,

$$- M_{\nu-1,3}(t) = M_{\nu-3}(t) + \sum_{i=1}^{\nu-4} (\nu - i - 2) M_i^{(\nu-3-i)}(t), \text{ etc.}$$

En supposant que le système est observable, le rang de la matrice d'observabilité est :

$$\text{rang}(O(t)) = n \quad (26)$$

avec $O(t)$ de dimension $(m\nu \times n)$. On remarque que :

$$\text{rang}(O(t)) = \text{rang} \left(\begin{bmatrix} O(t) & Y(t) - M(t)U(t) \end{bmatrix} \right)$$

Selon (Rotella, Borne, 1995), le système d'équation (21) est dit compatible ce qui implique qu'il est soluble et admet des solutions exactes en $Z(t)$. Comme le rang de $O(t)$ est égal à n alors la solution en $Z(t)$ est unique et elle est donnée par :

$$Z(t) = (O^T(t)O(t))^{-1} O^T(t) (Y(t) - M(t)U(t)) \quad (27)$$

D'autre part, l'intégration de l'équation (10) donne :

$$Z(t) = p^{-1} (A_C(t) Z(t)) + p^{-1} (\bar{B}_C u_C(t)) \quad (28)$$

telle que p^{-1} désigne l'opérateur d'intégration :

$$p^{-1}h(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau \quad (29)$$

avec $h(\tau) = 0$ pour $(\tau \leq \bar{\tau})$. Cette dernière hypothèse assure la commutativité entre p et p^{-1} .

En remplaçant, dans la partie droite de l'équation (28), $Z(t)$, par l'expression de la partie gauche, on obtient alors :

$$Z(t) = p^{-1} (A_C(t) p^{-1} (A_C(t) Z(t))) + p^{-1} A_C(t) p^{-1} (\bar{B}_C u_C(t)) + p^{-1} (\bar{B}_C u_C(t)) \quad (30)$$

Réitérant la dernière opération $(\nu - 1)$ fois :

$$Z(t) = p^{-1} (A_C(t) p^{-1} (A_C(t) \dots p^{-1} (A_C(t) Z(t)) + p^{-1} (A_C(t) p^{-1} (A_C(t) \dots p^{-1} (A_C(t) \bar{B}_C p^{-1} u_C(t))) + \dots + p^{-1} (A_C(t) \bar{B}_C p^{-1} u_C(t)) + \bar{B}_C p^{-1} u_C(t)) \quad (31)$$

En remplaçant, dans le deuxième terme de l'équation (31), $Z(t)$ par l'expression de l'équation (27), on obtient :

$$Z(t) = p^{-1} (A_C(t) p^{-1} (A_C(t) \dots p^{-1} (A_C(t) (O^T(t)O(t))^{-1} O^T(t) (Y(t) - M(t)U(t))) + p^{-1} (A_C(t) p^{-1} (A_C(t) \dots p^{-1} (A_C(t) \bar{B}_C p^{-1} u_C(t)) + \dots + p^{-1} (A_C(t) \bar{B}_C p^{-1} u_C(t)) + \bar{B}_C p^{-1} u_C(t)) \quad (32)$$

Pour déterminer l'expression de $Z(t)$ en fonction de $y(t)$ et $u_C(t)$, on procède par une intégration par parties pour éliminer les dérivées successives de $y(t)$ et $u_C(t)$ conduisant à la forme suivante :

$$\begin{aligned} Z(t) = & p^{-1} (\Theta_1(t) y(t)) + p^{-2} (\Theta_2(t) y(t)) + \dots + p^{-\nu} (\Theta_\nu(t) y(t)) \\ & + p^{-1} (\Delta_1(t) u_C(t)) + p^{-2} (\Delta_2(t) u_C(t)) + \dots \\ & + p^{-(\nu-1)} (\Delta_{\nu-1}(t) u_C(t)) + \bar{B}_C p^{-1} u_C(t) \end{aligned} \quad (33)$$

telle que $\Theta_i(t)$ et $\Delta_i(t)$ sont des matrices de dimensions $(n \times m)$. La commande par platitude de l'expression (15) se met alors sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} u(t) = & (H_C(t))^{-1} (K(p)z_d(t) - \Lambda(t) [p^{-1} (\Theta_1(t) y(t)) \\ & + p^{-2} (\Theta_2(t) y(t)) + \dots + p^{-\nu} (\Theta_\nu(t) y(t)) \\ & + p^{-1} (\Delta_1(t) u_C(t)) + p^{-2} (\Delta_2(t) u_C(t)) + \dots \\ & + p^{-(\nu-1)} (\Delta_{\nu-1}(t) u_C(t)) + \bar{B}_C p^{-1} u_C(t)]) \end{aligned} \quad (34)$$

En posant :

$$\begin{aligned} S(p^{-1}, u(t)) = & u(t) + (H_C(t))^{-1} \Lambda(t) (p^{-1} (\Delta_1(t) u_C(t)) + \\ & p^{-2} (\Delta_2(t) u_C(t)) + \dots + \\ & p^{-(\nu-1)} (\Delta_{\nu-1}(t) u_C(t)) + \bar{B}_C p^{-1} u_C(t)) \end{aligned} \quad (35)$$

et

$$\begin{aligned} R(p^{-1}, y(t)) = & (H_C(t))^{-1} \Lambda(t) (p^{-1} (\Theta_1(t) y(t)) \\ & + p^{-2} (\Theta_2(t) y(t)) + \dots + p^{-\nu} (\Theta_\nu(t) y(t))) \end{aligned} \quad (36)$$

on arrive finalement à écrire :

$$S(p^{-1}, u(t)) = (H_C(t))^{-1} K(p)z_d(t) - R(p^{-1}, y(t)) \quad (37)$$

Ainsi, la synthèse de la loi de commande est basée sur le choix de la trajectoire de référence $z_d(t)$ et de la dynamique de poursuite définie par la matrice polynomiale $K(p)$. Cette commande permet au système de suivre une trajectoire désirée sans recourir à une dynamique d'observation. La commande proposée peut être considérée comme un régulateur RST obtenu sans la résolution de l'équation de Bézout bien que l'expression obtenue ne représente pas une forme classique d'un régulateur polynomial dans le cas des systèmes linéaires stationnaires.

5. Mise en oeuvre de la commande proposée

Dans cette partie, l'approche de commande proposée est appliquée au modèle du satellite Spot-5. Les satellites SPOT (Système Probatoire d'Observation de la Terre ou Satellite Pour l'Observation de la Terre) sont une série de satellites civils de télédétection d'observation du sol terrestre. Les satellites SPOT-5 représentent la 3^{ième} génération des satellites Spot.

5.1. Modélisation du satellite SPOT-5

Selon (Brockett, 1970), (Montenbruck, Gill, 2001), (Sira-Ramirez, Agrawal, 2004) et (Rotella, Zambettakis, 2008), le modèle du satellite terrestre SPOT-5 est le suivant :

$$\begin{aligned}\ddot{r} &= r(t)\omega^2(t) - \frac{k}{r^2(t)} + \frac{u_1(t)}{m} \\ \dot{\omega}(t) &= -2\frac{\dot{r}(t)\omega(t)}{r(t)} + \frac{u_2(t)}{mr^2(t)}\end{aligned}\quad (38)$$

avec :

- m : masse du satellite SPOT-5 (3 048kg),
- k : constante de gravitation donnée par $k = GM_T$ telle que $G = 6,672559 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{s}^2\text{kg}$ et $M_T = 5,9736 \times 10^{24} \text{ kg}$ masse de la terre.
- $\omega(t)$: vitesse angulaire le long d'un orbite.

$(r(t), \theta(t))$ sont les coordonnées polaires de la position du satellite, $\dot{\theta}(t) = \omega(t)$, les entrées du système $u_1(t)$ et $u_2(t)$ sont respectivement les poussées radiale et tangentielle du satellite.

En posant :

$$\begin{aligned}x_1(t) &= r(t) = y_1(t) \\ x_2(t) &= \dot{x}_1(t) = \dot{r}(t) \\ x_3(t) &= \omega = y_2(t)\end{aligned}\quad (39)$$

l'équation (38) devient :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t)x_3^2(t) - \frac{k}{x_1^2(t)} + \frac{u_1(t)}{m} \\ \dot{x}_3(t) &= \frac{-2x_2(t)x_3(t)}{x_1(t)} + \frac{u_2(t)}{mx_1^2(t)}\end{aligned}\quad (40)$$

On remarque que les coordonnées polaires du système $(r(t), \theta(t))$ représentent les sorties plates du système non linéaire et le modèle considéré est ainsi plat. En effet, tous les paramètres s'expriment en fonction de ces variables et de leurs dérivées successives. Si on note :

$$\begin{cases} z_1(t) = r(t) \\ z_2(t) = \theta(t) \end{cases}\quad (41)$$

tous les paramètres du système s'écrivent alors :

$$\begin{aligned}x_1(t) &= z_1(t) \\ x_2(t) &= \dot{z}_1(t) \\ x_3(t) &= \dot{z}_2(t) \\ u_1(t) &= m \left(\ddot{z}_1(t) - z_1(t)\dot{z}_2^2(t) + \frac{k}{z_1^2(t)} \right) \\ u_2(t) &= mz_1^2(t) \left(\ddot{z}_2(t) + \frac{2\dot{z}_1(t)\dot{z}_2(t)}{z_1(t)} \right)\end{aligned}\quad (42)$$

La planification de trajectoires est effectuée en considérant les deux sorties plates désirées suivantes :

$$\begin{aligned} z_{1d}(t) = r_d(t) &= \left(-\cos\left(\frac{\pi t}{6084}\right) + 1 \right) \times 39 + 7200 \\ z_{2d}(t) = \theta_d(t) &= \left(-\cos\left(\frac{\pi t}{6084}\right) + 1 \right) \times \pi \end{aligned} \quad (43)$$

On obtient alors les profils de trajectoires donnés dans la figure Figure 1.. On déduit, à partir de (42), la trajectoire du système $T_d = (x_{1d}(t), x_{2d}(t), x_{3d}(t), u_{1d}(t), u_{2d}(t))$, les entrées désirées du système sont données dans la Figure 2.

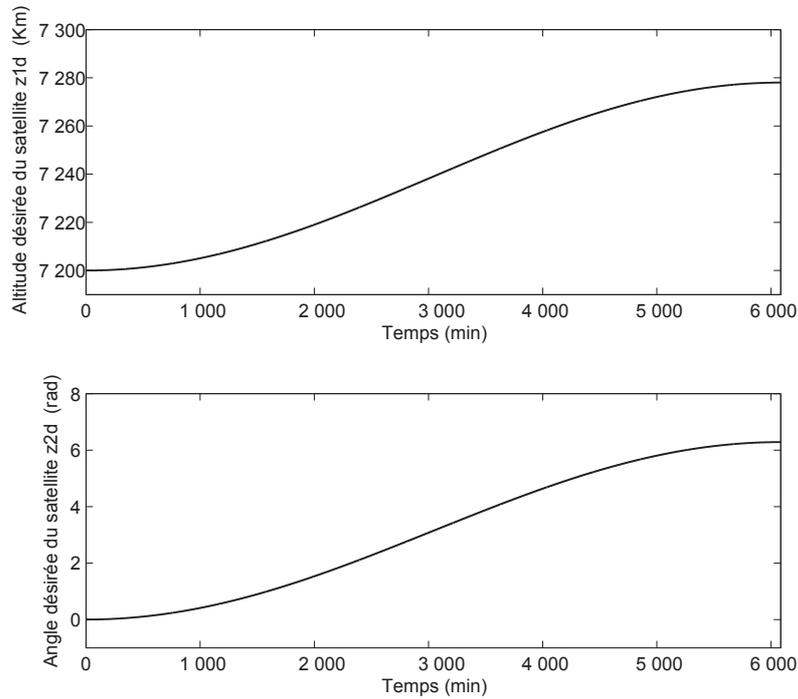


Figure 1. Trajectoires désirées pour les deux sorties plates $z_{1d}(t)$ et $z_{2d}(t)$.

La linéarisation du système autour de la trajectoire T_d donne :

$$\begin{aligned} \delta \dot{x}_1(t) &= \delta x_2(t) \\ \delta \dot{x}_2(t) &= \left(x_{3d}^2 + 2 \frac{k}{x_{1d}^3} \right) \delta x_1(t) + (2x_{1d}x_{3d}) \delta x_3(t) + \frac{\delta u_1(t)}{m} \\ \delta \dot{x}_3(t) &= \left(-\frac{2u_{2d}}{mx_{1d}^3} + \frac{2x_{2d}x_{3d}}{x_{1d}^2} \right) \delta x_1(t) - \frac{2x_{3d}}{x_{1d}} \delta x_2(t) - \left(\frac{2x_{2d}}{x_{1d}} \right) \delta x_3(t) \\ &\quad + \frac{1}{mx_{1d}^2} \delta u_2(t) \end{aligned} \quad (44)$$

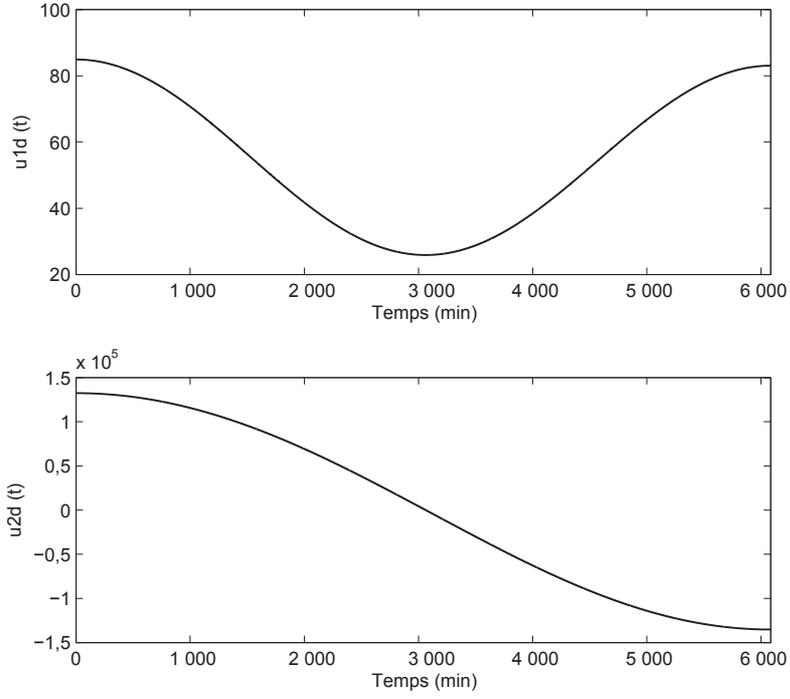


Figure 2. Trajectoires désirées de la poussée radiale $u_{1d}(t)$ et de la poussée tangentielle $u_{2d}(t)$.

Si on pose :

$$\delta x(t) = \begin{pmatrix} \delta x_1(t) & \delta x_2(t) & \delta x_3(t) \end{pmatrix}^T \quad (45)$$

on aboutit à l'équation d'état suivante :

$$\begin{aligned} \delta \dot{x}(t) &= A(t) \delta x(t) + B(t) \delta u(t) \\ \delta y(t) &= C(t) \delta x(t) \end{aligned} \quad (46)$$

avec :

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \left(x_{3d}^2 + 2 \frac{k}{x_{1d}^3} \right) & 0 & (2x_{1d}x_{3d}) \\ \left(-\frac{2u_{2d}}{mx_{1d}^3} + \frac{2x_{2d}x_{3d}}{x_{1d}^2} \right) & -\frac{2x_{3d}}{x_{1d}} & -\left(\frac{2x_{2d}}{x_{1d}} \right) \end{pmatrix} \quad (47)$$

$$B(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & \frac{1}{mx_{1d}^2} \end{pmatrix} \quad (48)$$

$$C(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (49)$$

$$\delta y(t) = \begin{pmatrix} \delta y_1(t) & \delta y_2(t) \end{pmatrix}^T \quad (50)$$

$$\delta u(t) = \begin{pmatrix} \delta u_1(t) & \delta u_2(t) \end{pmatrix}^T \quad (51)$$

Afin d'effectuer le test de commandabilité, on construit $K^0(B(t))$, $K^1(B(t))$ et la matrice :

$$\mathcal{K}_{\{2\}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{m} & 0 \\ \frac{1}{m} & 0 & 0 & -\frac{2x_{3d}}{mx_{1d}} \\ 0 & \frac{1}{mx_{1d}^2} & \frac{2x_{3d}}{mx_{1d}} & \frac{2(x_{2d} - \dot{x}_{1d})}{mx_{1d}^3} \end{pmatrix} \quad (52)$$

Comme le $\text{rang}(\mathcal{K}_{\{2\}}(t)) = 3 \forall t$, le système linéarisé est alors commandable $\forall t$. A noter que $B(t) = [b_1(t) \ b_2(t)]$ avec $\text{rang}(B(t)) = 2$. En suivant la procédure mentionnée dans l'annexe A, on détermine les deux indices de commandabilité μ_1 et μ_2 , pour trouver $\mu_1 = 2$ et $\mu_2 = 1$, les indices de commandabilité cumulés étant :

$$\begin{cases} \sigma_1 = 2 \\ \sigma_2 = 3 \end{cases} \quad (53)$$

On construit $V(t)$:

$$V(t) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{m} & 0 \\ \frac{1}{m} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2x_{3d}}{mx_{1d}} & \frac{1}{mx_{1d}^2} \end{pmatrix} \quad (54)$$

Comme $V(t)$ est inversible $\forall t$, on calcule alors $V^{-1}(t)$ puis on extrait la deuxième et la troisième ligne de cette matrice. On construit par la suite la matrice de changement de variables $P_C(t)$ pour enfin obtenir la forme canonique commandable suivante :

$$\begin{aligned} \delta \dot{Z}(t) &= A_C(t) \delta Z(t) + \bar{B}_C(t) \delta u_C(t) \\ \delta y(t) &= C_C(t) \delta Z(t) \end{aligned} \quad (55)$$

avec :

$$\begin{aligned} A_C(t) &= P_C(t)A(t)P_C^{-1}(t) + \dot{P}_C(t)P_C^{-1}(t) \\ A_C(t) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \alpha_{11,0}(t) & \alpha_{11,1}(t) & \alpha_{12,0}(t) \\ \alpha_{21,0}(t) & \alpha_{21,1}(t) & \alpha_{22,0}(t) \end{pmatrix} \\ \bar{B}_C &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, H_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$C_C(t) = C(t) P_C^{-1}(t)$$

A noter que :

$$\delta Z(t) = \begin{pmatrix} \delta z_1(t) & \delta \dot{z}_1(t) & \delta z_2(t) \end{pmatrix}^T \quad (56)$$

qui représente le vecteur des sorties plates du système linéarisé.

5.2. Lois de commande

Selon l'équation (14), une commande par platitude permettant la poursuite des trajectoires désirées avec une erreur qui tend asymptotiquement vers zéro est donnée par :

$$u_{C1}(t) = \ddot{z}_{1d}(t) + \kappa_{1,0} z_{1d}(t) + \kappa_{1,1} \dot{z}_{1d}(t) - (\kappa_{1,0} z_1(t) + \kappa_{1,1} \dot{z}_1(t)) + \alpha_{1,1,0}(t) z_1(t) + \alpha_{1,1,1}(t) \dot{z}_1(t) + \alpha_{1,2,0}(t) z_2(t) \quad (57)$$

Cette équation peut se mettre sous la forme suivante :

$$\delta u_{C1}(t) = (\alpha_{1,1,0}(t) - \kappa_{1,0}) \delta z_1(t) + (\alpha_{1,1,1}(t) - \kappa_{1,1}) \delta \dot{z}_1(t) + \alpha_{1,2,0}(t) \delta z_2(t) \quad (58)$$

de même :

$$\delta u_{C2}(t) = (\alpha_{2,2,0}(t) - \kappa_{2,0}) \delta z_2(t) + \alpha_{2,1,0}(t) \delta z_1(t) + \alpha_{2,1,1}(t) \delta \dot{z}_1(t) \quad (59)$$

Cela donne :

$$\delta u_C(t) = \Lambda(t) \delta Z(t) \quad (60)$$

avec :

$$\delta u_C(t) = \begin{pmatrix} \delta u_{C1}(t) & \delta u_{C2}(t) \end{pmatrix}^T \quad (61)$$

$$\Lambda(t) = \begin{pmatrix} (\alpha_{1,1,0}(t) - \kappa_{1,0}) & (\alpha_{1,1,1}(t) - \kappa_{1,1}) & \alpha_{1,2,0}(t) \\ \alpha_{2,1,0}(t) & \alpha_{2,1,1}(t) & (\alpha_{2,2,0}(t) - \kappa_{2,0}) \end{pmatrix} \quad (62)$$

Cette commande nécessitant un observateur pour estimer le vecteur d'état $\delta Z(t)$, un observateur exact est développé dans la partie suivante conduisant à une forme polynomiale de la commande par platitude.

5.3. Réalisation des commandes (voir 4.2)

On construit la suite des matrices $L_i(C(t))$, pour $i = 0, 1, 2 \dots$. On remarque que la matrice :

$$\mathcal{L}_{\{2\}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \left(-\frac{2u_{2d}}{mx_{1d}^3} + \frac{2x_{2d}x_{3d}}{x_{1d}^2}\right) & -\frac{2x_{3d}}{x_{1d}} & -\left(\frac{2x_{2d}}{x_{1d}}\right) \end{pmatrix} \quad (63)$$

est de rang 3 $\forall t$. Le système est alors observable et dans ce cas $\mathcal{L}_{\{2\}}(t)$ est la matrice d'observabilité de la paire $(A(t), C(t))$. L'équation (21) conduit à écrire :

$$\delta Y(t) = O(t)\delta Z(t) + M(t)\delta u_C(t) \quad (64)$$

avec :

$$\delta Y(t) = \begin{pmatrix} \delta y(t) \\ \delta \dot{y}(t) \end{pmatrix}, O(t) = \begin{pmatrix} C_C(t) \\ \dot{C}_C(t) + C_C(t)A_C(t) \end{pmatrix}$$

et

$$M(t) = \begin{pmatrix} M_0 \\ C_C(t)\bar{B}_C \end{pmatrix}$$

Dans ce cas, la matrice d'observabilité $O(t)$ de la paire $(A_C(t), C_C(t))$ est de dimension (4×3) et elle possède le rang 3. En notant par :

$$(O^T(t)O(t))^{-1} \cdot O^T(t) = \mathcal{F}(t) \quad (65)$$

on peut écrire :

$$\delta Z(t) = \mathcal{F}(t)(\delta Y(t) - M(t)\delta u_C(t)) \quad (66)$$

Or d'après l'équation de la forme commandable (10), on a :

$$\delta Z(t) = p^{-1}(A_C(t)\delta Z(t) + \bar{B}_C\delta u_C(t)) \quad (67)$$

On remplace dans cette équation, le vecteur $\delta Z(t)$ par son expression donnée dans (66), pour obtenir :

$$\delta Z(t) = p^{-1}(A_C(t)\mathcal{F}(t)\delta Y(t)) - p^{-1}[A_C(t)\mathcal{F}(t)M(t)\delta u_C(t)] + p^{-1}(\bar{B}_C\delta u_C(t)) \quad (68)$$

En considérant :

$$A_C(t)\mathcal{F}(t) = \begin{pmatrix} \tau_1(t) & \tau_2(t) \\ \tau_3(t) & \tau_4(t) \\ \tau_5(t) & \tau_6(t) \end{pmatrix} \quad (69)$$

et sachant que :

$$A(t)\mathcal{F}(t)M(t) = \begin{pmatrix} \beta_1(t) \\ \beta_2(t) \\ \beta_3(t) \end{pmatrix} \quad (70)$$

les paramètres $\tau_i(t)$ et $\beta_i(t)$ sont des matrices à coefficients variants dans le temps de dimension (1×2) , en intégrant par partie l'expression comprenant le terme $\delta \dot{y}(t)$ et sachant que $\delta \dot{y}(0) = 0$, l'équation (68) s'écrit alors comme suit :

$$\delta Z(t) = \begin{pmatrix} \tau_2(t) \\ \tau_4(t) \\ \tau_6(t) \end{pmatrix} \delta y(t) + p^{-1} \left[\begin{pmatrix} \tau_1(t) - \dot{\tau}_2(t) \\ \tau_3(t) - \dot{\tau}_4(t) \\ \tau_5(t) - \dot{\tau}_6(t) \end{pmatrix} \delta y(t) \right] + p^{-1} \left[\begin{pmatrix} -\beta_1(t) \\ -\beta_2(t) \\ -\beta_3(t) \end{pmatrix} \delta u_C(t) \right] + p^{-1}(\bar{B}_C\delta u_C(t)) \quad (71)$$

et en remplaçant (71) dans la loi de commande (60), nous obtenons la forme finale du régulateur :

$$\begin{aligned} \delta u(t) = & H_C^{-1} \Lambda(t) \left(\begin{pmatrix} \tau_2(t) \\ \tau_4(t) \\ \tau_6(t) \end{pmatrix} \delta y(t) + p^{-1} \left[\begin{pmatrix} \tau_1(t) - \dot{\tau}_2(t) \\ \tau_3(t) - \dot{\tau}_4(t) \\ \tau_5(t) - \dot{\tau}_6(t) \end{pmatrix} \delta y(t) \right] \right) \\ & + p^{-1} \left[\begin{pmatrix} -\beta_1(t) \\ -\beta_2(t) \\ -\beta_3(t) \end{pmatrix} \delta u_C(t) \right] + p^{-1} (\bar{B}_C \delta u_C(t)) \end{aligned} \quad (72)$$

La commande se met sous la forme suivante :

$$\delta u(t) = R(p^{-1}, \delta y(t)) + S(p^{-1}, \delta u_C(t)) \quad (73)$$

avec :

$$\begin{aligned} R(p^{-1}, \delta y(t)) = & H_C^{-1} \Lambda(t) \left[\begin{pmatrix} \tau_2(t) \\ \tau_4(t) \\ \tau_6(t) \end{pmatrix} \delta y(t) \right. \\ & \left. + p^{-1} \begin{pmatrix} \tau_1(t) - \dot{\tau}_2(t) \\ \tau_3(t) - \dot{\tau}_4(t) \\ \tau_5(t) - \dot{\tau}_6(t) \end{pmatrix} \delta y(t) \right] \end{aligned} \quad (74)$$

$$\begin{aligned} S(p^{-1}, \delta u_C(t)) = & H_C^{-1} \Lambda(t) \left[p^{-1} \begin{pmatrix} -\beta_1(t) \\ -\beta_2(t) \\ -\beta_3(t) \end{pmatrix} \delta u_C(t) \right] \\ & + p^{-1} (\bar{B}_C \delta u_C(t)) \end{aligned} \quad (75)$$

La Figure 3 illustre la structure de la méthode de commande proposée en utilisant la propriété de platitude.

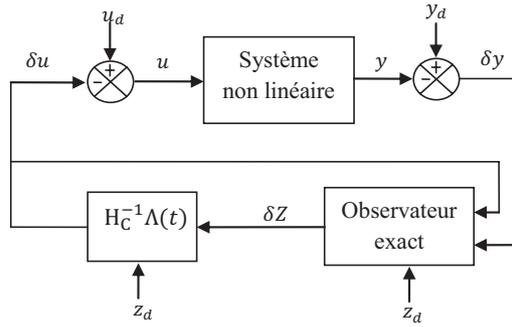


Figure 3. Structure de la commande proposée.

On note par $\kappa_1(p) = p^2 + \kappa_{1,1}p + \kappa_{1,0}$ et $\kappa_2(p) = p + \kappa_{2,0}$ les deux polynômes qui déterminent les dynamiques de poursuite des trajectoires. En appliquant cette commande au système non linéaire avec un temps de réponse de 100 minutes pour

$\kappa_1(p)$ et de 200 minutes pour $\kappa_2(p)$ et en prenant des conditions initiales $\delta y_1(0) = 10 \text{ Km}$ et $\delta y_2(0) = -0,2 \text{ rad/s}$, on obtient les résultats consignés dans Figure 4, Figure 5, Figure 6 et Figure 7.

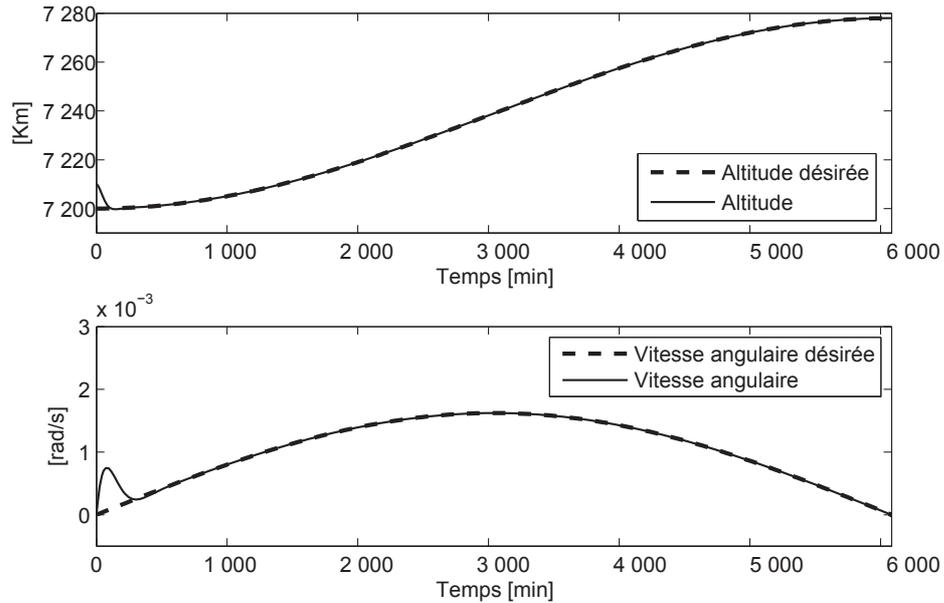


Figure 4. Sorties du système non linéaire $y_1(t)$ et $y_2(t)$.

Ces résultats montrent que la loi de commande par platitude permet d'obtenir des performances élevées en termes de suivi de trajectoires avec une erreur de poursuite qui tend asymptotiquement vers zéro (voir Figure 7) pour le modèle non linéaire considéré.

6. Conclusion

Dans ces travaux, une méthode de commande par platitude a été proposée permettant la poursuite de trajectoires désirées d'un système non linéaire. La synthèse se fait à partir d'un modèle non stationnaire multi-entrées multi-sorties. Le régulateur proposé est constitué d'un observateur exact qui effectue un calcul direct du vecteur d'état dont les composantes sont la sortie plate et ses dérivées. Cet observateur-régulateur permet à la sortie du système de poursuivre des trajectoires de référence sans l'utilisation d'une dynamique d'observateur. La méthode proposée nous ramène à la conception d'une commande qui peut être vue comme étant un régulateur RST non stationnaire sans résoudre l'équation de Bézout généralisée. La loi de commande appliquée au modèle non linéaire du satellite SPOT-5, permet d'obtenir de bonnes performances en termes de la poursuite de trajectoires.

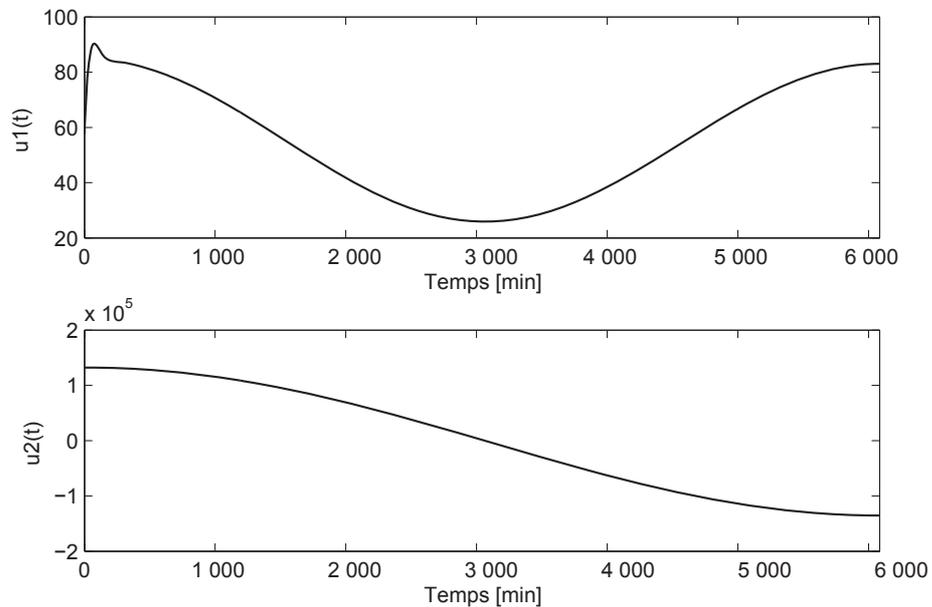


Figure 5. Signaux de commande du système non linéaire $u_1(t)$ et $u_2(t)$.

Les résultats ainsi obtenus nous ramènent à des nouvelles perspectives pour la commande des systèmes non linéaires étant donnée le recours à la linéarisation autour d'une trajectoire donnée pour appliquer une méthode basée sur la propriété de la platitude.

References

- Ben Abdallah M., Ayadi M., Rotella F., Benrejeb M. (2012a). Linear time-varying flatness-based control of anti-lock brake system (ABS). In *9th international multi-conference on systems, signals devices (SSD 12)*. Chemnitz, Allemagne.
- Ben Abdallah M., Ayadi M., Rotella F., Benrejeb M. (2012b). Régulateurs polynomiaux par platitude pour la commande des systèmes non stationnaires. In *Conférence internationale francophone d'automatique (CIFA 2012)*. Grenoble, France.
- Brockett R. W. (1970). *Finit dimensional linear systems*. New York, John Wiley and Sons.
- Fliess M. (2000). Sur des pensers nouveaux faisons des vers anciens. In *Conférence internationale francophone d'automatique (CIFA 2000)*, p. 26-36. Lille, France.
- Fliess M., Lévine J., Martin P., Rouchon P. (1992). Sur les systèmes non linéaires différentiellement plats. *C.R. Acad. Sci. Paris*, Vol. I-315, pp. 619-624.

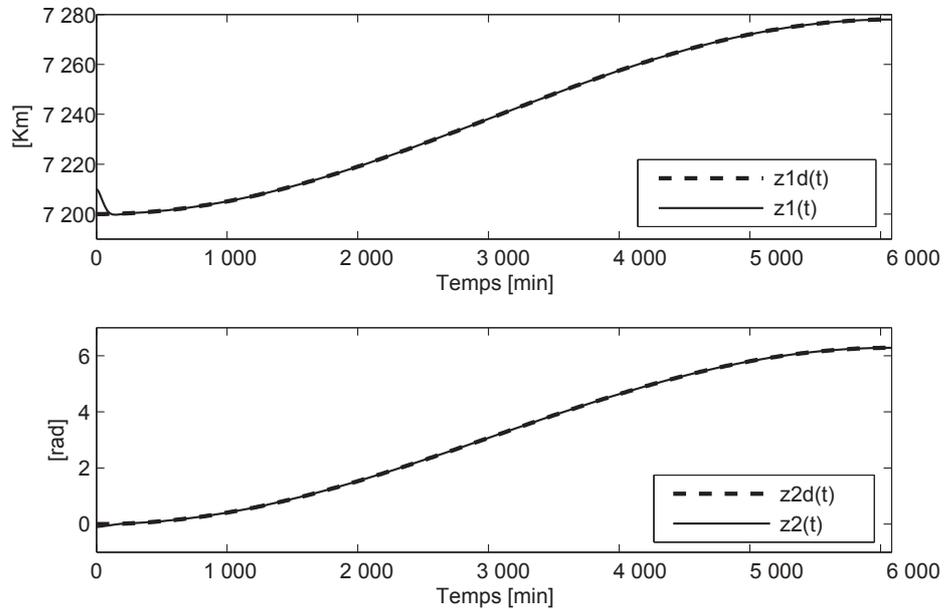


Figure 6. Trajectoires désirées des sorties plates et sorties plates.

- Fliess M., Lévine J., Martin P., Rouchon P. (1995). Flatness and defect of nonlinear systems: introductory theory and examples. *International Journal of Control*, Vol. 61, pp. 1327-1361.
- Fliess M., Lévine J., Martin P., Rouchon P. (1999). A lie-bäcklund approach to equivalence and flatness of nonlinear systems. *IEEE Transaction on Automatic Control*, Vol. 44, pp. 922-937.
- Kailath T. (1980). *Linear systems*. New Jersey, Prentice Hall, Englewood Cliffs.
- Lévine J. (2009). *Analysis and control of nonlinear systems, a flatness-based approach*. New York, Springer.
- Luenberger D. L. (1967). Controllability and observability in timevariable linear systems. *IEEE Transaction on Automatic Control*, Vol. AC-12, No. 3, pp. 290-293.
- Malrait F., Martin P., Rouchon P. (2001). Dynamic feedback transformations of controllable linear time-varying systems nonlinear. In A. Isodori, F. Lamnabhi-Lagarrigue, W. Respondek (Eds.), *Control in the year 2000*, Vol. 259. London, Springer.
- Marquez R., Delaleau E., Fliess M. (2000). Commande par PID généralisé d'un moteur électrique sans capteur mécanique. In *Conférence internationale francophone d'automatique (CIFA 2000)*, p. 453-458. Lille, France.
- Montenbruck O., Gill E. (2001). *Satellite orbits models, methods, and applications*. New York, Springer-Verlag.

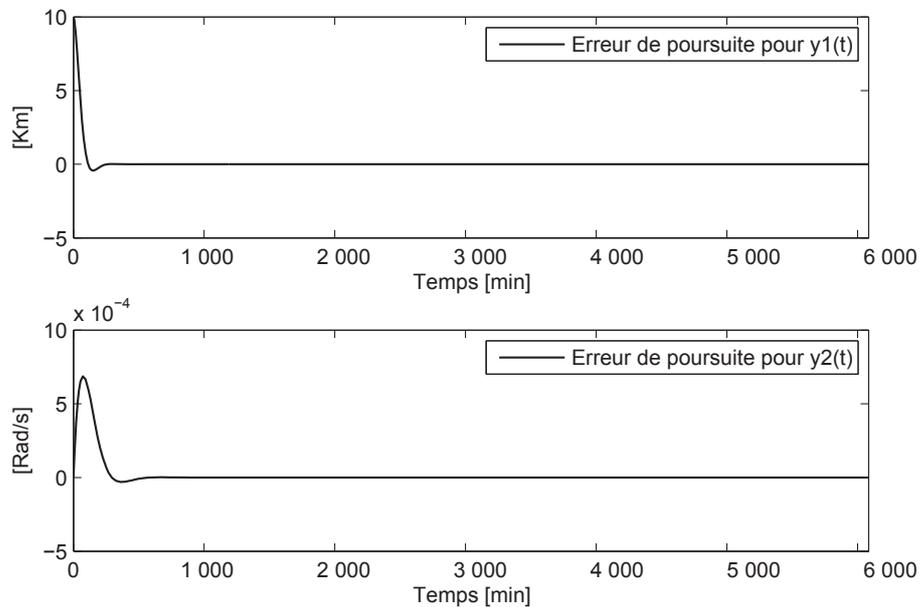


Figure 7. Erreurs de poursuite pour les deux sorties du système non linéaire.

- Mutoh Y., Hara T. (2012). Stability of the observer-based pole placement for discrete time-varying non-lexicographically-fixed systems. In *Ukacc international conference on control*. Cardiff, UK.
- Mutoh Y., Kimura N. (2011). Observer-based pole placement for non-lexicographically-fixed linear time-varying systems. In *Ieee conference on decision and control and european control conference (CDC-ECC)*. Orlando, USA.
- Rotella F., Borne P. (1995). *Théorie et pratique du calcul matriciel*. Paris, Technip.
- Rotella F., Carrillo F. J., Ayadi M. (2002). Polynomial controller design based on flatness. *Kybernetika*, Vol. 38, No. 5, pp. 571-584.
- Rotella F., Zambettakis I. (2007). Commande des systèmes par platitude. *Techniques de l'Ingénieur, Traité Informatique Industrielle*, S 7 450.
- Rotella F., Zambettakis I. (2008). *Automatique élémentaire - de l'analyse des systèmes à la régulation*. Paris, Lavoisier.
- Rotella F., Zambettakis I. (2010). Output feedback pole placement for linear time-varying systems with application to the control of nonlinear systems. *Automatica*, Vol. 46, No. 4, pp. 1524-1530.
- Rudolph J. (2003). *Flatness based control of distributed parameter systems*. Aachen, Shaker Verlag.

- Seal C. E., Stuberud A. R. (1969). Canonical forms for multiple-input time-variable systems. *IEEE Transaction on Automatic Control*, Vol. AC-14, pp. 704-707.
- Shafai B., Carroll R. (1986). Minimal-order observer designs for linear time-varying multivariable systems. *IEEE Transaction on Automatic Control*, Vol. 31, pp. 757-761.
- Silverman L. M., Meadows H. E. (1967). Controllability and observability in timevariable linear systems. *SIAM Journal of Control and Optimization*, No. 5, pp. 64-73.
- Sira-Ramirez H., Agrawal S. K. (2004). *Differentially flat systems*. New York, Marcel Dekker.
- Valasek M., Olgac N. (1999). Pole placement for linear time-varying non lexicographically-fixed mimo systems. *Automatica*, Vol. 35, pp. 101-108.
- Wolovich W. A. (1968). On the stabilisation of controllable systems. *IEEE Transaction on Automatic Control*, Vol. AC-13, pp. 569-572.

Annex A. Forme canonique commandable

L'algorithme de construction de la forme commandable peut être décrit par les étapes suivantes :

1. On construit la suite ordonnée des vecteurs :

$$K^0(b_1(t)), K^1(b_1(t)), \dots, K^i(b_1(t)), K^0(b_2(t)), \dots, \dots, K^i(b_2(t)), \dots, K^0(b_m(t)), \dots, K^i(b_m(t)) \quad (76)$$

telle que $B(t) = (b_1(t) \quad b_2(t) \quad \dots \quad b_{m-1}(t) \quad b_m(t))$;

puis on sélectionne les vecteurs qui ne sont pas dépendants les uns des autres.

2. On détermine les m indices de commandabilités μ_i pour $i = 1 \dots m$ pour calculer les indices de commandabilité cumulé tels que :

$$\sigma_i = \sum_{j=1}^i \mu_j \quad j = 1 \dots m \quad (77)$$

3. On réordonne les vecteurs sélectionnés à l'étape 1 pour construire $V(t)$:

$$V(t) = (K^0(b_1(t)) \quad \dots \quad K^{\mu_1-1}(b_1(t)) \quad K^0(b_2(t)) \quad \dots \quad K^{\mu_m-1}(b_m(t))) \quad (78)$$

4. On calcule $V^{-1}(t)$ dont l'on extrait les lignes $M_i(t)$; $i = 1 \dots m$ définies comme la $\sigma_i - i$ ème ligne de $V^{-1}(t)$.

5. On construit la matrice de changement de variables :

$$P_C(t) = \begin{pmatrix} L^0(M_1(t)) \\ \vdots \\ L^{\mu_1-1}(M_1(t)) \\ L^0(M_2(t)) \\ \vdots \\ L^{\mu_2-1}(M_2(t)) \\ \vdots \\ L^{\mu_m-1}(M_m(t)) \end{pmatrix} \quad (79)$$

Selon (Wolovich, 1968), cette matrice de construction de la forme canonique est une transformation de Lyapunov.

6. Comme $x_C(t) = P_C(t)x(t)$, on obtient la représentation d'état suivante :

$$\begin{aligned} \dot{x}_C(t) &= A_C(t)x_C(t) + B_C(t)u(t) \\ y(t) &= C_C x_C(t) \end{aligned} \quad (80)$$

avec :

$$C_C(t) = C(t) P_C^{-1}(t) \quad (81)$$

$$A_C(t) = P_C(t)A(t)P_C^{-1}(t) + \dot{P}_C(t)P_C^{-1}(t) = [A_{Cij}]_{i,j=1\dots m} \quad (82)$$

$$A_{C,ij} = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} & \text{de dimension } \mu_i \times \mu_i \text{ si } i = j \\ \begin{bmatrix} \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \times & \times & \dots & \times & \times \end{bmatrix} & \text{de dimension } \mu_i \times \mu_j \text{ si } i \neq j \end{cases} \quad (83)$$

tel que le symbole \times désigne des coefficients variant dans le temps. On note $\alpha_i(t)$ la σ_i -ième ligne de $A_C(t)$, donnée par :

$$\alpha_i(t) = L^{\mu_i}(M_i(t))P_C^{-1}(t) \quad (84)$$

7. Soit :

$$u_C(t) = H_C(t)u(t) \quad (85)$$

où $H_C(t)$ est la matrice $(m \times m)$ formée des lignes significatives de $B_C(t)$ c'est à dire les lignes de rang σ_i :

$$H_C(t) = \begin{pmatrix} 1 & \times & \cdots & \times \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (86)$$

On a finalement la forme canonique commandable :

$$\begin{aligned} \dot{x}_C(t) &= A_C(t)x_C(t) + \bar{B}_C u_C(t) \\ y(t) &= C_C(t)x_C(t) \end{aligned} \quad (87)$$

avec :

$$\begin{aligned} \bar{B}_C &= B_C(t)H_C(t)^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} b_{c1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_{c2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & b_{cm} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (88)$$

b_{ci} sont des vecteurs de dimension $(\mu_i \times 1)$, donnés par :

$$b_{ci} = (0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1)^T \quad (89)$$