



HAL
open science

Vibration non-linéaire de poutre en grande transformation

Zihan Shen, Benjamin Chouvion, Fabrice Thouverez, Aline Beley, Jean-Daniel Beley

► **To cite this version:**

Zihan Shen, Benjamin Chouvion, Fabrice Thouverez, Aline Beley, Jean-Daniel Beley. Vibration non-linéaire de poutre en grande transformation. 13e colloque national en calcul des structures, Université Paris-Saclay, May 2017, Giens, Var, France. hal-01926324

HAL Id: hal-01926324

<https://hal.science/hal-01926324>

Submitted on 19 Nov 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Vibration non-linéaire de poutre en grande transformation

Z. Shen¹⁻², B. Chouvion¹, F. Thouverez¹,
A. Beley², J.D. Beley²

¹ LTDS, Ecole Centrale Lyon, zihan.shen@doctorant.ec-lyon.fr, {benjamin.chouvion,fabrice.thouverez}@ec-lyon.fr

² ANSYS-France, {zihan.shen, aline.beley, jean-daniel.beley}@ansys.com

Résumé — Ce travail concerne l'étude des vibrations non-linéaires des poutres en grande transformation. Une approche éléments finis non-linéaire est mise en place où la formulation de chaque élément s'appuie sur les hypothèses de Timoshenko. Par ailleurs, le modèle peut aussi prendre en compte l'effet assouplissant ou rigidifiant puisque la courbure non-linéaire et l'effet d'inertie ne sont pas négligés. Différentes simulations de poutre en grande rotation sont réalisées et comparées avec des résultats de la littérature.

Mots clés — non-linéarité géométrique, élément de poutre, grande rotation

1 Introduction

Les hélices actuelles étant conçues plus souples pour des vitesses de rotation toujours plus grandes, les structures sont amenées à supporter des forces centrifuges plus fortes et à vibrer en régime non-linéaire géométrique. La prédiction des caractéristiques dynamiques sous les effets de non-linéarité géométrique devient ainsi essentielle. Cette étude aborde ainsi la problématique de vibration de poutre en grande rotation, et grande vitesse de rotation. Les objectifs de cette étude sont de déterminer correctement la fréquence de résonance et mettre en évidence certains phénomènes non-linéaires comme des sauts en fréquence d'une solution stable à une autre (assouplissement ou rigidification du système par effet non-linéaire). Afin de répondre à ces objectifs, nous proposons un modèle élément fini en formulation Lagrangienne totale pour simuler la vibration sous l'effet des force centrifuges et des non-linéarités géométriques.

Les hélices peuvent être idéalisées comme des poutres tournantes. Les vibrations des poutres tournantes ont été largement étudiées par de nombreux auteurs en plusieurs types d'approche. Nous pouvons citer par exemple : l'approche de Southwell [2], la méthode de Rayleigh-Ritz [3], la technique de perturbation [4], l'approche par matrice de transfert [5] et la méthode des éléments finis de Galerkin [6, 14]. Les influences du R_0 du disque sur lequel la poutre est encastree (voir Figure 1) et des différentes conditions aux limites ont été bien détaillées dans ces différents travaux. Cependant, la plupart de ces études ont plutôt considéré un modèle linéaire simple et ont négligé les effets de déformation de cisaillement et d'inertie. Les effets de non-linéarité géométrique des poutres ont aussi été bien étudiés. On peut citer par exemple : la considération des hypothèses de Kirchhoff-Love [15] ou celle utilisant les hypothèses de Reissner [16]. Mais, ces modèles sont exprimés dans le repère fixe et il n'y a pas d'influence de la force centrifuge. Sénéchal [1] a proposé un modèle d'éléments finis de poutre Timoshenko tournante en utilisant une interpolation linéaire. Cependant, le problème de "shear locking" dû à l'interpolation linéaire qui rigidifie le modèle par rapport à la propriété exacte de cisaillement n'est pas traité et l'effet des conditions aux limites n'est pas non plus étudié. Finalement, la littérature existante révèle un manque de modèle de poutre Timoshenko en éléments finis qui considère à la fois la rotation en grande vitesse et la non-linéarité géométrique. Dans cette étude, les travaux de référence [1, 7] sont étendus pour inclure l'effet de la rotation, l'effet de R_0 et l'effet des conditions aux limites. La validation et l'efficacité du modèle proposé sont établies grâce à la comparaison de divers exemples trouvés dans la littérature [8] dont les fréquences de résonance et les formes modales sont obtenues sous forme de série entière convergente en résolvant analytiquement les équations du mouvement.

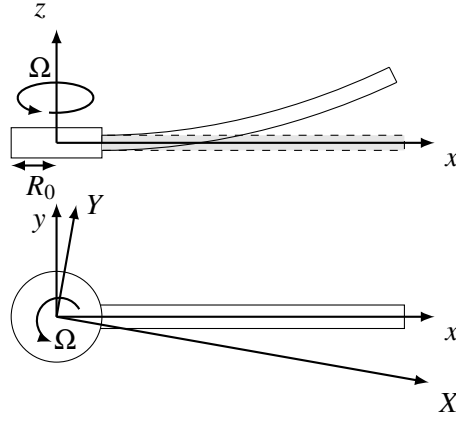


FIGURE 1 – Configuration de la poutre en rotation

2 Cinématique de poutre Timoshenko en grand déplacement

Considérons une section de poutre telle qu'illustrée dans la Figure 1 et la Figure 2. En raison de la déformation de la poutre, une particule au point $P_0(X, Z)$ dans la configuration initiale C_0 se déplace au point $P(x, z)$ dans la configuration courante C . Selon les hypothèses de poutre de Timoshenko (1 : la section plane doit rester plane; 2 : la section tourne mais ne reste pas obligatoirement perpendiculaire à la fibre neutre), les relations suivantes sont obtenues :

$$x = R_0 + X + u_X - Z \sin(\theta) \quad (1)$$

$$z = u_Z + Z \cos(\theta) \quad (2)$$

u_X et u_Z sont les déplacements de particule dans le repère tournant $R_t(Oxyz)$. θ représente la rotation autour de l'axe y dans R_t . Soit s la longueur de l'axe neutre dans la configuration actuelle C . Les relations suivantes sont développées :

$$\sin(\psi) = \frac{du_Z}{ds} = \frac{du_Z}{dX} \frac{dX}{ds} = \frac{u'_Z}{s'} \quad (3)$$

$$\cos(\psi) = \frac{du_X + dX}{ds} = \frac{du_X + dX}{dX} = \frac{1 + u'_X}{s'} \quad (4)$$

Les primes représentent la dérivation partielle par rapport (x) et ψ est la rotation de l'axe neutre de la poutre autour de l'axe y dans R_t . Par la suite, les relations utiles peuvent s'exprimer sous la forme :

$$s' = \sqrt{(1 + u'_X)^2 + (u'_Z)^2} \quad (5)$$

$$\cos(\psi) = \frac{1 + u'_X}{\sqrt{(1 + u'_X)^2 + (u'_Z)^2}} \quad (6)$$

$$\sin(\psi) = \frac{u'_Z}{\sqrt{(1 + u'_X)^2 + (u'_Z)^2}} \quad (7)$$

En utilisant les équations (1) et (2), le tenseur de gradient de déformation peut s'écrire sous la forme :

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial X} & \frac{\partial x}{\partial Z} \\ \frac{\partial z}{\partial X} & \frac{\partial z}{\partial Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + u'_X - Z\theta' \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ u'_Z - Z\theta' \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (8)$$

Par la suite, le tenseur de gradient de déformation est utilisé pour calculer le tenseur de déformation de Green-Lagrange :

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} u'_X - Z\theta' \cos(\theta) + \frac{1}{2}(u'_X - Z\theta' \cos(\theta))^2 + \frac{1}{2}(u'_Z - Z\theta' \sin(\theta))^2 & \frac{1}{2}u'_Z \cos(\theta) - \frac{1}{2}(1 + u'_X) \sin(\theta) \\ \frac{1}{2}u'_Z \cos(\theta) - \frac{1}{2}(1 + u'_X) \sin(\theta) & 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

On trouve que l'expression de la déformation axiale est non-linéaire. Afin de simplifier les développements, une technique de linéarisation consistante [7] basée sur la décomposition polaire est utilisée. On introduit la matrice orthogonale \mathbf{R} définissant la rotation de l'axe neutre ψ autour de l'axe y dans R_t :

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) \end{bmatrix} \quad (10)$$

En utilisant les équations (5), (6) et (7), un pseudo tenseur gradient de déplacement peut être défini comme suit :

$$\mathbf{L} = \bar{\mathbf{F}} - \mathbf{I} = \mathbf{R}^T \mathbf{F} - \mathbf{I} = \begin{bmatrix} s' \cos(\theta - \psi) - 1 - Z\theta' & 0 \\ -s' \sin(\theta - \psi) & 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

La matrice \mathbf{R} étant orthogonale, le tenseur de déformation de Green-Lagrange est réécrit :

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{F}}^T \bar{\mathbf{F}} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2} ((\mathbf{L} + \mathbf{I})^T (\mathbf{L} + \mathbf{I}) - \mathbf{I}) = \frac{1}{2} (\mathbf{L} + \mathbf{L}^T + \mathbf{L}^T \mathbf{L}) \approx \frac{1}{2} (\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) \quad (12)$$

avec $\mathbf{L}^T \mathbf{L}$ prenant la forme :

$$\mathbf{L}^T \mathbf{L} = \begin{bmatrix} (Z\theta')^2 + 2(Z\theta')(1-s') + (1-s')^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

Dans les équations (5), (6) et (7), $(1-s')$ et θ' représentent respectivement la déformation axiale et la courbure. Ces termes peuvent être négligés sous l'hypothèse de petites déformations avec une épaisseur faible par rapport à la longueur. Ensuite, afin d'obtenir l'expression de l'énergie cinétique, les coordonnées de la particule P dans le repère tournant R_t suivant les équations (1) et (2) doivent être projetées dans le repère fixe R_f en prenant en compte la rotation de la structure.

$$\mathbf{OP}_f = \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{bmatrix}_{R_f} = \begin{bmatrix} \cos(\Omega t) & -\sin(\Omega t) & 0 \\ \sin(\Omega t) & \cos(\Omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{R_t} \quad (14)$$

En conséquence, l'énergie cinétique du système peut s'écrire comme :

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{1}{2} \iiint_{V_0} (\rho \mathbf{OP}_f^T \mathbf{OP}_f) dV \\ &= \frac{\rho}{2} \int_0^L \left(A \dot{u}_X^2 + A \dot{u}_Z^2 + I_0 \dot{\theta}^2 + \Omega^2 \left[A (R_0 + X + u_X)^2 + I_0 \sin(\theta)^2 \right] \right) dX \end{aligned} \quad (15)$$

A l'aide du second tenseur des contraintes de Piola-Kirchoff \mathbf{S} , nous pouvons calculer l'énergie de déformation du système :

$$E_d = \frac{1}{2} \iiint_{V_0} (\mathbf{S} : \mathbf{E}) dV = \frac{1}{2} \int_0^L (EAe^2 + GA\gamma^2 + EI_0\theta'^2) dX \quad (16)$$

où e et γ caractérisent la déformation axiale et la déformation de cisaillement :

$$e = (1 + u'_X) \cos(\theta) + u'_Z \sin(\theta) - 1, \quad \gamma = -(1 + u'_X) \sin(\theta) + u'_Z \cos(\theta) \quad (17)$$

3 Formulation éléments finis

Considérons un élément de poutre plane possédant 2 nœuds. La stratégie est d'utiliser les hypothèses des poutres de Timoshenko qui préservent la continuité C^0 pour les déplacements transversaux. En s'appuyant sur une interpolation linéaire des champs cinématiques, l'on obtient :

$$\begin{bmatrix} u_X(X) \\ u_Z(X) \\ \theta(X) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 - \xi & 0 & 0 & 1 + \xi & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \xi & 0 & 0 & 1 + \xi & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \xi & 0 & 0 & 1 + \xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{X1} \\ u_{Z1} \\ \theta_1 \\ u_{X2} \\ u_{Z2} \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \mathbf{N} \mathbf{u} \quad (18)$$

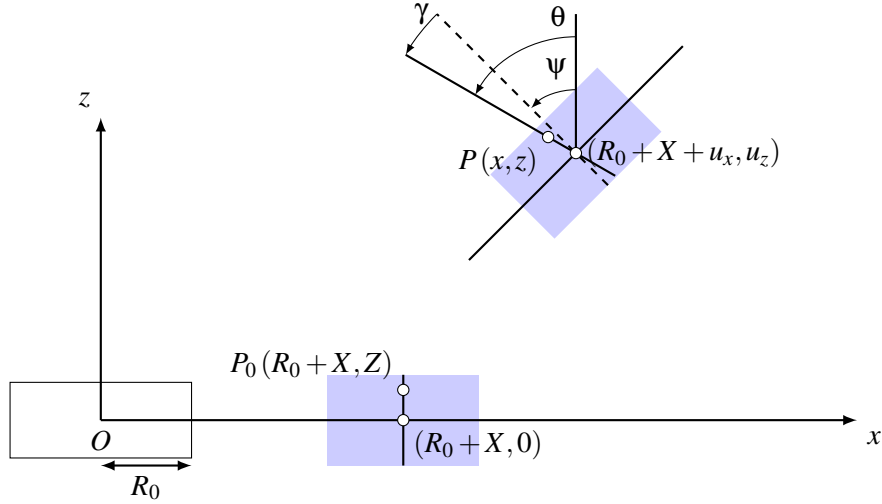


FIGURE 2 – Cinématique Lagrangienne de poutre de Timoshenko

Compte tenu de l'interpolation réalisée sur les différents degrés de libertés, l'élément ainsi défini sera confronté à l'effet de "shear locking" [7]. Afin de corriger ce phénomène de rigidification anormale, une flexibilité résiduelle [13] est introduite dans l'expression de l'énergie de déformation (16)

$$\frac{1}{GA} \Rightarrow \frac{1}{kGA} + \frac{L^2}{12EI_0} \quad (19)$$

où k est le coefficient de cisaillement pour la poutre de Timoshenko. L'énergie de déformation ainsi corrigée va permettre à la solution obtenue par interpolation linéaire d'être cohérente avec la solution exacte. Puis, les équations du mouvement en éléments finis peuvent s'obtenir par l'utilisation de l'énergie cinétique définie par (15) et l'énergie de déformation définie par (16) au travers des équations de Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\mathbf{u}}} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial \mathbf{u}} + \frac{\partial E_d}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{f}_{\text{ext}} \quad (20)$$

La matrice de masse et le vecteur de force interne sont alors donnés par :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\mathbf{u}}} \right) \quad (21)$$

$$\mathbf{f}_{\text{int}} = -\frac{\partial E_c}{\partial \mathbf{u}} + \frac{\partial E_d}{\partial \mathbf{u}} \quad (22)$$

Finalement, les équations non-linéaires en éléments finis à résoudre s'écrivent sous la forme :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{f}_{\text{int}} = \mathbf{f}_{\text{ext}} \quad (23)$$

4 Résolution des équations non-linéaires

Afin de résoudre les équations non-linéaires de la poutre tournante (23), il faut choisir une condition initiale appropriée pour avoir une durée d'intégration temporelle raisonnable. Dans cette étude, le déplacement 'statique' \mathbf{u}_Ω créé par la rotation est pris comme condition initiale pour l'analyse transitoire de vibration forcée. Le déplacement 'statique' est obtenu en résolvant les équations non-linéaires statiques :

$$\mathbf{f}_{\text{int}}(\mathbf{u}_\Omega) = 0 \quad (24)$$

La méthode à régions de confiance basée sur l'algorithme de Newton-Raphson [10] est appliquée pour résoudre l'équation (24). Puis, \mathbf{u}_Ω est utilisé pour calculer les fréquences propres et les modes propres en effectuant une hypothèse de linéarisation :

$$[\mathbf{K}_{\text{tan}}(\mathbf{u}_\Omega) - \omega_k^2 \mathbf{M}] \Phi_k = 0 \quad (25)$$

où la matrice de rigidité tangente se calcule par :

$$\mathbf{K}_{tan} = \frac{\partial \mathbf{f}_{int}}{\partial \mathbf{u}} \quad (26)$$

Finalement, le déplacement 'statique' \mathbf{u}_Ω est utilisé comme condition initiale pour résoudre les équations dynamiques non-linéaires (23). Une force verticale sur l'extrémité de la poutre de forme $\mathbf{f}_{ext} = \mathbf{f}_0 \sin(\omega_{ext}t)$ est appliquée. Les équations différentielles obtenues sont résolues par intégration temporelle avec la méthode Runge-Kutta (RK) avec un pas de temps adaptatif [11] qui est moins sensible aux conditions initiales que la méthode implicite de Newton.

5 Application numérique

On considère une poutre de longueur $1m$, de section rectangulaire ($h = 0.005m, b = 0.1m$) dont les caractéristiques matériaux sont les suivantes : module d'Young : $E = 104Gpa$, coefficient de Poisson : $\nu = 0.34$ et masse volumique : $\rho = 4400kg/m^3$.

TABLE 1 – Comparaison des fréquences propres d'une poutre de Timoshenko

η	α	ω_1	$\omega_1[8]$	ω_2	$\omega_2[8]$	ω_3	$\omega_3[8]$	ω_4	$\omega_4[8]$
0	0.1	0.000	0.000	15.418	15.418	49.965	49.965	104.246	104.248
	1	0.000	0.000	15.418	15.418	49.965	49.965	104.246	104.248
1	0.1	1.074	1.072	15.655	15.654	50.172	50.170	104.448	104.446
	1	1.583	1.581	15.918	15.916	50.409	50.407	104.679	104.677
2	0.1	2.148	2.145	16.343	16.339	50.784	50.780	105.042	105.038
	1	3.161	3.159	17.320	17.318	51.709	51.707	108.953	108.951
3	0.1	3.219	3.217	17.421	17.419	51.782	51.779	106.018	106.016
	1	4.735	4.733	19.416	19.414	53.795	53.794	108.039	108.037
4	0.1	4.292	4.289	18.825	18.822	53.146	53.143	107.372	107.369
	1	6.307	6.306	21.991	21.990	56.568	56.566	110.882	110.881
5	0.1	5.365	5.361	20.483	20.479	54.845	54.841	109.085	109.081
	1	7.879	7.876	24.883	24.880	59.914	59.912	114.418	114.416
6	0.1	6.437	6.433	22.333	22.329	56.844	56.840	111.138	111.134
	1	9.449	9.447	27.979	27.977	63.724	63.722	118.570	118.568
7	0.1	7.510	7.505	24.331	24.326	59.108	59.104	113.509	113.505
	1	11.019	11.017	31.213	31.210	67.903	67.900	123.263	123.261
8	0.1	8.578	8.577	26.435	26.435	61.601	61.600	116.173	116.172
	1	12.591	12.587	34.542	34.537	72.371	72.366	128.424	128.420

5.1 Analyse modale

Dans un premier temps, nous calculons les fréquences propres linéaires du système. Dans le Tableau 1, les fréquences propres d'une poutre avec la condition au limite encastree-libre et $R_0 = 0.1m$ sont illustrées et comparées avec les résultats analytiques [8] (l'ensemble des données sont adimensionnés de la manière suivante : $\eta = \Omega \sqrt{\rho AL^4/EI_0}$, $\alpha = R_0/L$, $p = \omega \sqrt{\rho AL^4/EI_0}$, surface de la section : A , inertie de section : I_0 et vitesse de rotation : Ω). Les écarts entre les résultats de notre modèle avec 20 éléments et ceux de la solution analytique sont inférieurs à 0.1% pour les 4 premiers modes. On peut conclure que le modèle proposé fonctionne bien dans le cadre des petits mouvements.

5.2 Analyse transitoire

Nous nous intéressons maintenant l'analyse dynamique de la poutre en grande rotation soumise à une excitation harmonique. L'intégration temporelle doit être suffisamment longue, pour que le régime stationnaire soit atteint (Figure 3). Dans cette étude, comme la méthode RK avec un pas de temps adaptatif

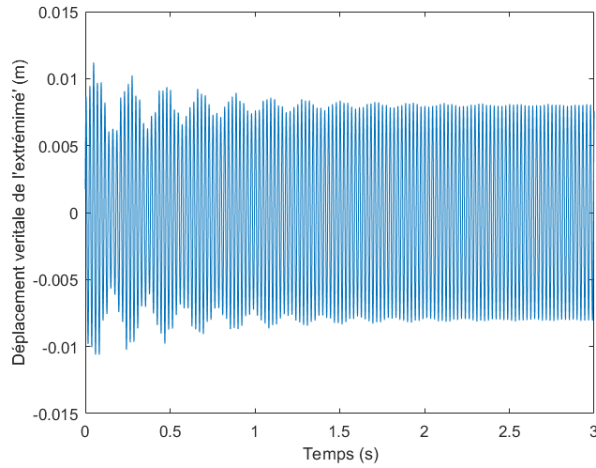


FIGURE 3 – Vibration transitoire de l'extrémité en résonance de mode 3 (RPM=3000)

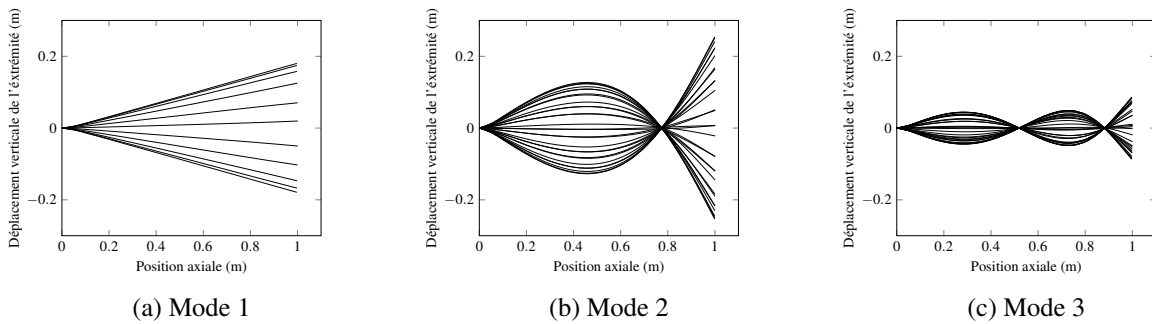


FIGURE 4 – Vibration de grande d'amplitude en régime stationnaire (RPM=3000)

[11] est appliquée, la méthode d'analyse spectrale Lomb-Scargle [12] est choisie pour effectuer la transformation de Fourier avec un échantillonnage non-uniforme. En excitant la poutre au voisinage des 3 premières fréquences de résonance et après avoir atteint le régime stationnaire ($\Omega_{ext} = 3000tr/min$), on peut observer (Figure 4) le comportement dynamique en grandes amplitudes.

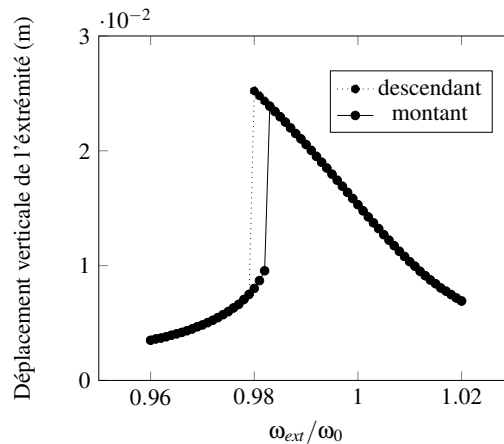


FIGURE 5 – Fonction réponse en fréquence (Mode 3, RPM=3000, $f_0 = 200N$)

5.3 Analyse de la réponse fréquentielle

Finalement, afin de construire la fonction de réponse en fréquence, la fréquence d'excitation est balayée (en descendant et montant) autour de la fréquence propre. Pour chaque fréquence d'excitation, on effectue une intégration temporelle jusqu'à ce que le régime stationnaire soit établi. Cette méthode est très coûteuse. Une approche plus adaptée, telle que la méthode d'équilibrage harmonique aurait pu

être utilisée pour calculer directement les cycles limites harmoniques. Les résultats de simulation sont présentés en Figure 5, et montrent que le modèle présente un comportement non-linéaire très marqué par la présence des sauts dynamiques.

6 Perspectives

Dans cette étude, l'approche Lagrangienne totale est appliquée pour étudier la vibration de poutre plane en grande transformation. Cependant, en raison de l'efficacité numérique, la formulation corotationnelle est choisie par les logiciels commerciaux (ANSYS and NASTRAN) pour prendre en compte le grand déplacement et la grande rotation. Dans l'avenir, nous prévoyons non seulement d'étendre le modèle en 3D en méthode Lagrangienne totale afin de comprendre plus précisément comment s'installe la réponse dynamique des rotors flexibles subissant de larges déflexions transversales, mais aussi d'appliquer la formulation corotationnelle pour rendre la méthode plus robuste et efficace numériquement.

Références

- [1] A. Sénéchal, O. Thomas. *Réduction de vibrations de structure complexe par shunts piézoélectriques : Application aux turbomachines*, CNAM, 2011.
- [2] Boyce, WE and Dprima, RC and Handelman, GH. *Vibrations of rotating beams of constant section*, Journal of Applied Mechanics-Transaction of the ASME, ASME, 286-286, 1954.
- [3] Pnueli, David. *Natural bending frequency comparable to rotational frequency in rotating cantilever beam*, Journal of Applied Mechanics, American Society of Mechanical Engineers, 602-604, 1972.
- [4] Lo, Hsu and Goldberg, JE and Bogdanoff, JL. *Effect of small hub-radius change on bending frequencies of a rotating beam*, Journal of Applied Mechanics, American Society of Mechanical Engineers, 548-550, 1960.
- [5] Stafford, RO and Giurgiutiu, V. *Semi-analytic methods for rotating Timoshenko beams*, International Journal of Mechanical Sciences, Elsevier, 719-727, 1975.
- [6] Nagaraj, VT and Shanthakumar, P. *Rotor blade vibrations by the Galerkin finite element method*, Journal of Sound and Vibration, Academic Press, 575-577, 1975.
- [7] C. Felippa. *Nonlinear Finite Element Methods Aerospace Engineering Sciences*, Aerospace Engineering Sciences Department of the University of Colorado. Boulder, 2001.
- [8] Du, H and Lim, MK and Liew, KM. *A power series solution for vibration of a rotating Timoshenko beam*, Journal of Sound and Vibration, Elsevier, 505-523, 1994.
- [9] MacNeal, Richard H. *A simple quadrilateral shell element*, Computers & Structures, Elsevier, 175-183, 1978.
- [10] Danaila, Ionut, et al. *Introduction au calcul scientifique par la pratique : 12 projets résolus avec MATLAB*, Dunod, 2005.
- [11] Inman. *Engineering vibration (Vol. 3)*, Prentice Hall, 2001.
- [12] Sigmon, Davis. *MATLAB primer*, CRC Press, 2004.
- [13] MacNeal, Richard. *Finite Element*, CRC Press, 1993.
- [14] D. H. Hodges. *Nonlinear flexure and torsion of rotating beams, with application to helicopter rotor blades-II : Response and stability results* Vertica 10.2 : 171-186, 1986.
- [15] Simo, Juan C., and Loc Vu-Quoc. *A three-dimensional finite-strain rod model. Part II : Computational aspects*, Computer methods in applied mechanics and engineering, 58.1 : 79-116, 1986.
- [16] Ibrahimbegović, Adnan.. *On finite element implementation of geometrically nonlinear Reissner's beam theory : three-dimensional curved beam elements*, Computer methods in applied mechanics and engineering, 122.1-2 : 11-26, 1995.