



**HAL**  
open science

# Une famille de modèles raffinées pour l'analyse multiphysique de plaques hétérogènes basée sur un E.F. $C^0$

Philippe Vidal, Olivier Polit, Laurent Gallimard, Michele d'Ottavio

► **To cite this version:**

Philippe Vidal, Olivier Polit, Laurent Gallimard, Michele d'Ottavio. Une famille de modèles raffinées pour l'analyse multiphysique de plaques hétérogènes basée sur un E.F.  $C^0$ . 13e colloque national en calcul des structures, Université Paris-Saclay, May 2017, Giens, France. hal-01926193

**HAL Id: hal-01926193**

**<https://hal.science/hal-01926193v1>**

Submitted on 19 Nov 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Une famille de modèles raffinés pour l'analyse multiphysique de plaques hétérogènes basée sur un E.F. $C^0$

P. Vidal<sup>1</sup>, L. Gallimard<sup>1</sup>, O. Polit<sup>1</sup>, M. D'Ottavio<sup>1</sup>

LEME EA 4416, Université Paris Nanterre, France, {philippe.vidal, laurent.gallimard, olivier.polit, mdottavi}@u-paris10.fr

**Résumé** — Cet article présente un nouvel élément fini (EF)  $C^0$  à huit noeuds pour l'analyse linéaire de plaques à l'aide d'une famille de modèles raffinés. L'accent est mis sur la capacité à modéliser des plaques minces et épaisses sans pathologies numériques (verrouillage, mode parasite,...). Pour cela, une approche basée sur la compatibilité de champs est étendue pour des modèles couche équivalente et un modèle layerwise à variables séparées. Cela permet de déduire une approche hiérarchique pour modéliser des structures composites sous sollicitations multi-champs.

**Mots clés** — élément fini, modèles raffinés, verrouillage, thermomécanique.

## 1 Introduction

La recherche est toujours très active afin d'améliorer la vitesse de convergence et la précision en déplacement et en contrainte des E.F. De plus, les problèmes numériques (verrouillage en cisaillement transverse, présence de modes parasites, sensibilité à la distorsion du maillage) doivent être contrôlés. La majorité des travaux sur ces aspects concernent le modèle de Reissner-Mindlin (First Shear Deformation Theory) en plaque et de Naghdi en coque. Les contributions pour les poutres, les plaques et les coques sont trop nombreuses pour être discutées ici mais on pourra avantageusement consulter [1, 2]. Néanmoins, parmi les différentes familles de méthodes proposées afin d'éviter ou limiter ces effets, nous pouvons mentionner l'utilisation d'un schéma d'intégration réduite, la construction d'une interpolation spécifique pour les déformations de cisaillement transverse (ANS) [3], ou l'application d'une formulation mixte (EAS) [4].

D'un autre côté, la recherche est aussi très active sur le développement de nouveaux modèles pour l'analyse des structures hétérogènes et les analyses multiphysiques. Deux familles peuvent être identifiées : les approches couches équivalentes (Equivalent Single Layer Model) et les approches layer-wise (Layer-Wise Model). Suivant [5], le nombre d'inconnu est indépendant du nombre de couches pour ESLM alors que le même nombre d'inconnus est présent dans chaque couche pour LWM. Un autre champ de développement concerne l'utilisation de modèles raffinés, type ESLM ou LWM, dans lequel on introduit les conditions d'interface. Cela permet de réduire le nombre d'inconnus et ces modèles sont dits ZigZag. On pourra consulter [6] pour plus d'informations. Actuellement, les modèles les plus utilisés sont Kirchhoff-Love (Classical Laminated Theory) et Reissner-Mindlin qui utilisent respectivement trois et cinq fonctions inconnues. Cela avait un sens par le passé afin d'avoir des équations et des formules simples et manipulables à la main. Aujourd'hui, la puissance des ordinateurs permet de résoudre des problèmes de grandes tailles ( $10^9$  inconnus) mais les logiciels de calcul utilisent toujours ces modèles simplifiés. A ce sujet, il est intéressant de consulter [7] qui propose une étude systématique des modèles de plaques et identifie les termes indispensables dans le modèle en fonction du problème (géométrie, propriétés, chargement, ...), afin d'obtenir des résultats satisfaisants. Il faut noter que des approches type MITC [8] ont également été étendus pour ces familles de modèles.

Ce travail s'inscrit dans ces deux directions et concerne le développement d'un EF quadrilatère à huit noeuds, basé sur des modèles raffinés. L'objectif est d'obtenir un outil numérique dont le ratio coût/précision soit le meilleur. Il doit donc allier de bonnes propriétés EF et une description des grandeurs hors plan suffisante. Les évaluations présentées ici concernent donc d'une part les pathologies numériques, la sensibilité à la distorsion de maillage, la convergence (vitesse et précision) pour des chargements mécanique et thermique.

D'autre part, nous aborderons les structures hétérogènes (stratifiés et sandwichs), et une hiérarchie de modèles pourra en être déduite.

## 2 Le problème de plaque

Soit une plaque occupant un domaine  $\mathcal{V} = \Omega \times \Omega_z$  avec  $\Omega_z = \left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right]$  dans un système de coordonnées  $(x_1, x_2, x_3 = z)$ . La plaque est donc définie par une région  $\Omega$  dans le plan  $(x_1, x_2)$ , et par une épaisseur constante  $h$ .

### 2.1 La loi de comportement

Chaque couche est supposée orthotrope. En utilisant une notation matricielle, la loi de comportement 3D d'une couche  $k$  est donnée par :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11}^{(k)} \\ \sigma_{22}^{(k)} \\ \sigma_{33}^{(k)} \\ \sigma_{23}^{(k)} \\ \sigma_{13}^{(k)} \\ \sigma_{12}^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}^{(k)} & C_{12}^{(k)} & C_{13}^{(k)} & 0 & 0 & C_{16}^{(k)} \\ & C_{22}^{(k)} & C_{23}^{(k)} & 0 & 0 & C_{26}^{(k)} \\ & & C_{33}^{(k)} & 0 & 0 & C_{36}^{(k)} \\ & & & C_{44}^{(k)} & C_{45}^{(k)} & 0 \\ & & & & C_{55}^{(k)} & 0 \\ & & & & & C_{66}^{(k)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^{(k)} \\ \varepsilon_{22}^{(k)} \\ \varepsilon_{33}^{(k)} \\ \gamma_{23}^{(k)} \\ \gamma_{13}^{(k)} \\ \gamma_{12}^{(k)} \end{bmatrix} \quad \text{i.e.} \quad [\sigma^{(k)}] = [C^{(k)}] [\varepsilon^{(k)}] \quad (1)$$

où on note  $[\sigma]$  le tenseur des contraintes,  $[\varepsilon]$  le tenseur des déformations et  $C_{ij}$  les coefficients matériau de la loi 3D.

Pour l'analyse thermomécanique, la loi 3D est modifiée en introduisant les coefficients de dilatation thermique,  $\alpha_i^{(k)}$  et la variation de température  $\Delta T$ , ainsi :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11}^{(k)} \\ \sigma_{22}^{(k)} \\ \sigma_{33}^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}^{(k)} & & \\ & C_{22}^{(k)} & \\ & & C_{33}^{(k)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^{(k)} - \alpha_1^{(k)} \Delta T \\ \varepsilon_{22}^{(k)} - \alpha_2^{(k)} \Delta T \\ \varepsilon_{33}^{(k)} - \alpha_3^{(k)} \Delta T \end{bmatrix} \quad (2)$$

### 2.2 La forme faible du problème aux limites

A partir des notations matricielles précédentes et pour un champ de déplacement virtuel admissible  $\vec{u}^* \in U^*$ , le principe variationnel s'écrit :

trouver  $\vec{u} \in U$  (espace des déplacements admissibles) tel que :

$$-\int_{\mathcal{V}} [\varepsilon(\vec{u}^*)]^T [\sigma(\vec{u})] d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{V}} [u^*]^T [f] d\mathcal{V} + \int_{\partial\mathcal{V}_F} [u^*]^T [F] d\partial\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \rho [u^*]^T [\ddot{u}] d\mathcal{V} \quad \forall \vec{u}^* \in U^* \quad (3)$$

où  $[f]$  et  $[F]$  sont les forces de volume et de surface agissant sur  $\partial\mathcal{V}_F$ .  $\varepsilon(\vec{u}^*)$  sont les déformations virtuelles, et  $\rho$  est la densité.

Eq. (3) est le point de départ classique pour définir une approximation EF.

### 2.3 Le champ de déplacements

On peut vouloir définir toutes théories 2D par déduction à partir de la formulation 3D du problème aux limites, à partir d'un développement asymptotique par exemple, mais il est aussi possible et souvent plus pratique d'établir une théorie 2D sans référence au problème 3D.

Dans ce travail, nous considérerons deux types de modèles :

1. approche ESLM - modèle noté Sin-z2

A partir du modèle sinus de Touratier [9], un modèle de plaque prenant en compte la contrainte

normale est présenté [10]. La justification 3D du modèle 2D est obtenue à partir des travaux de Cheng [11]. Cette extension est basée sur des travaux poutres, plaques, coques [9, 12, 13, 14, 15, 16, 17] sur la théorie sinus, et les travaux de Tessler sur une théorie de plaque d'ordre  $\{1, 2\}$  [18], et une théorie  $\{3, 2\}$  [19].

La cinématique a la forme suivante :

$$\begin{cases} U_1(x_1, x_2, x_3 = z) &= u_0(x_1, x_2) - z u_1(x_1, x_2) + f(z) (u_1(x_1, x_2) + \theta_2(x_1, x_2)) \\ U_2(x_1, x_2, x_3 = z) &= v_0(x_1, x_2) - z v_1(x_1, x_2) + f(z) (v_1(x_1, x_2) - \theta_1(x_1, x_2)) \\ U_3(x_1, x_2, x_3 = z) &= w_0(x_1, x_2) + z w_1(x_1, x_2) + z^2 w_2(x_1, x_2) \end{cases} \quad (4)$$

où  $(u_0, v_0, w_0)$  sont les déplacements de la surface moyenne,  $(u_1, \theta_2)$  et  $(v_1, \theta_1)$  sont des mesures de rotations du segment traversant autour des axes  $(0, x_1)$  et  $(0, x_2)$ . De plus, les fonctions  $(w_1, w_2)$  sont ajoutées afin d'avoir une déformation normale transverse non nulle. Il est à noter que le verrouillage de poisson ou d'épaisseur est évité puisque on a un développement à l'ordre deux du déplacement transversal, voir [20]. Enfin, dans le cadre du modèle sinus, on impose :

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin \frac{\pi z}{h} \quad (5)$$

Le modèle sinus classique est retrouvé en posant  $w_{0,1} = u_1$ ,  $w_{0,2} = v_1$  et en négligeant  $w_1$  et  $w_2$ .

## 2. approche LayerWise à variables séparées (proper generalized decomposition) - modèle noté LD4-SV

En nous basant sur le travail développé dans [21, 22] pour la séparation des variables et sur les travaux de Carrera [23, 24] et Vidal [17, 25] pour l'évaluation des modèles raffinés, nous en déduisons une approche de type LW avec séparation de variables en utilisant une expansion en  $z$  d'ordre 4.

$$u = \begin{bmatrix} u_1(x_1, x_2, z) \\ u_2(x_1, x_2, z) \\ u_3(x_1, x_2, z) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^N \begin{bmatrix} f_1^i(z) v_1^i(x_1, x_2) \\ f_2^i(z) v_2^i(x_1, x_2) \\ f_3^i(z) v_3^i(x_1, x_2) \end{bmatrix} \quad (6)$$

où  $(f_1^i, f_2^i, f_3^i)$  sont définies sur  $\Omega_z$  et  $(v_1^i, v_2^i, v_3^i)$  sur  $\Omega$ .

Il faut noter que l'approche LW conduit à un problème non-linéaire, qui est résolue par une méthode des directions alternées comme cela est effectuée classiquement dans la littérature [26]. Chaque terme de la somme est construit suivant un algorithme glouton comme décrit dans [17].

Toutes ces approches utilisent la loi 3D définie dans Eq. (1).

## 3 Les approximations EF

C'est un quadrilatère à huit noeuds qui est proposé. L'approximation est classique et isoparamétrique pour la géométrie et les fonctions inconnues. Cela concerne

1. pour l'approche ESLM : les déplacements  $(u_0, v_0, w_0)$  et les rotations  $(u_1, v_1, \theta_1, \theta_2)$ ,
2. pour l'approche LWM à variables séparées :  $v_1^i, v_2^i$  et  $v_3^i$

Enfin, notons que l'approximation des fonctions  $(w_1, w_2)$  de Sin-z2 est choisie bilinéaire en utilisant les points intérieurs au domaine élémentaire de coordonnées  $(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}})$ . Une technique classique de condensation statique au niveau élémentaire permettra alors d'éliminer les ddls associés à ces fonctions dont l'approximation est interne au domaine.

Afin de contrôler le phénomène de verrouillage en cisaillement transverse, la méthodologie CL8 développée pour FSDT dans [27] est ici étendue à ces modèles raffinés. C'est donc l'approximation des déformations de cisaillement transverse constantes qui est traitée. On ne détaillera pas la procédure.

Nous en déduisons donc un EF à 8 noeuds avec 7 ddls par noeud pour le modèle Sin-z2 et 3 ddls par noeud pour l'approche LD4-SV. Ils sont évalués numériquement dans la section suivante.

## 4 Evaluations numériques

On intègre exactement les matrices élémentaires en utilisant un schéma de Gauss à  $3 \times 3$  points. Le rang de la matrice de rigidité ainsi obtenu est correct, avec 6 valeurs propres nulles, correspondant aux 6 mouvements de corps rigide. L'EF sera appelé Sin-z2/CL8 et LD4-SV/CL8. Pour illustration dans ce résumé, on présentera un test de verrouillage en cisaillement transverse, puis un test de distorsion, et enfin une application à un composite stratifié.

Des comparaisons seront fournies avec des EF existants, fruits de précédents travaux [15, 27] :

**Sin-AG** modèle Sinus et approximations EF Conformes ;  $C^1$  Argyris pour le déplacement transverse et semi- $C^1$  Ganev pour les autres déplacements et les rotations,

**FSDT-AG** modèle Reissner-Mindlin et mêmes approximations EF ; on utilisera le coefficient correcteur en cisaillement transverse classique  $5/6$ ,

### 4.1 Verrouillage numérique

On considère une plaque carrée de dimension  $a$  en appui simple, soumise à une pression uniforme. L'épaisseur est définie par  $h = 10^{-n}$  avec  $n \in \{0, 4\}$ . Le matériau est isotrope avec  $E = 10.92$  et  $\nu = 0.43$ . Il y a absence de verrouillage en cisaillement transverse si la vitesse de convergence est indépendante de l'élancement  $S = \frac{a}{h}$  quand  $h$  tend vers 0. En considérant un maillage fixé  $N = 2$  ( $2 \times 2$  éléments), la Fig. 1 présente l'erreur sur la flèche au milieu de la plaque en  $z = 0$ , pour l'approximation CL8 et l'approche isoparamétrique. Il est tout à fait évident que le verrouillage en cisaillement transverse est totalement absent pour Sin-z2/CL8 et LD4-SV/CL8 alors que la version isoparamétrique verrouille très fortement. La convergence vers la solution de KL pourra être obtenue mais il faudra un maillage de plus en plus fin, à mesure que l'épaisseur diminue.

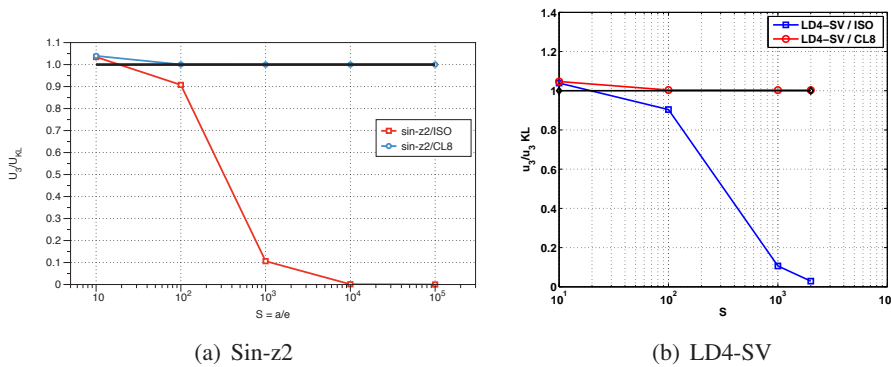


FIGURE 1 – Verrouillage en cisaillement transverse.

### 4.2 Distorsion

Afin d'évaluer la sensibilité de cet EF à la distorsion de maillage, on considère une plaque carrée ( $a = 100, h = 1$ ) encadrée soumise à une charge concentrée  $F_3 = 178.5714$  en son centre. Le matériau est isotrope avec  $E = 10.92 \cdot 10^4$  et  $\nu = 0.3$ . La solution de référence est donnée par Kirchhoff-Love et l'on a  $U_3 = 1$ . La distorsion est introduite dans un maillage  $N = 2$  sous la forme du paramètre  $s$  indiquée sur Fig. 2. Il est à noter que dans le cas  $s = 12$ , la coordonnée du noeud sommet de l'EF central est  $(37.5, 37.5)$  alors que le point milieu des deux noeuds sommets adjacents est  $(37, 37)$ . C'est donc un maillage extrêmement distordu. Les résultats sont présentés dans Tab. 1. Il montre la bonne réponse d'ensemble de cet EF dont l'erreur maximale est inférieure à 7 % pour Sin-z2/CL8 et 10 % pour LD4-SC/CL8, alors que l'approche ISO induit des erreurs de 90 %.

### 4.3 Plate composite : 3 couches

Une plaque composite stratifiée à 3 couches ( $0^\circ, 90^\circ, 0^\circ$ ) est traitée pour comparer les modèles et évaluer l'efficacité du traitement numérique sur l'élément fini. L'exemple est décrit ci-dessous :

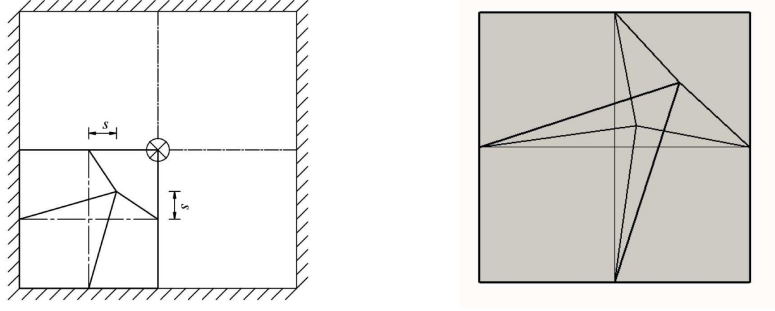


FIGURE 2 – Sensibilité à la distorsion de maillage ; problème et maillage  $s = 0, 4, 12$ .

$s$	0.	4.	8.	12.
$U_3$ LD4-SV/CL8	0.975	0.940	0.922	0.896
$U_3$ LD4-SV/ISO	0.224	0.197	0.152	0.109
$U_3$ Sin-z2/CL8	1.001	0.9836	0.9629	0.9366

TABLE 1 – déplacement transverse - plaque carrée encadrée.

**géométrie :** plaque carrée  $a = b$  et  $S = \frac{a}{h} = 4, 10, 100$  ;

**conditions limites :** appuis simples sur tout le pourtour,

une pression bi-sinusoidale appliquée sur la surface haute telle que  $p_3(x_1, x_2, z = \frac{h}{2}) = p_0 \sin \frac{\pi x_1}{a} \sin \frac{\pi x_2}{b}$

**matériau :** 3 couches ( $0^\circ, 90^\circ, 0^\circ$ ) d'épaisseur égale avec

$E_L = 25 \text{ GPa}, E_T = 1 \text{ GPa}, \nu_{LT} = 0.25, G_{LT} = 0.2 \text{ GPa}, G_{TT} = 0.5 \text{ GPa}$

**maillage :**  $N = 16$  pour un quart de plaque

**résultats :** déplacements et contraintes adimensionnés selon

$$\bar{U}_3 = U_3 \frac{100 E h^3}{p_0 a^4}; \quad \bar{\sigma}_{11} = \sigma_{11} \frac{1}{p_0 S^2}; \quad \bar{\sigma}_{i3} = \sigma_{i3} \frac{1}{p_0 S}$$

**coordonnées des points résultats :** déplacements et contraintes calculés aux points :

- $U_3, \sigma_{11}, \sigma_{22} : (a/2, b/2, (0; h/2; h/6))$ ;
- $U_1, \sigma_{13} : (0, b/2, (-h/2; 0))$ ;
- $U_2, \sigma_{23} : (a/2, 0, (-h/2; 0))$ ;
- $\sigma_{12}(0, 0, -h/2)$

**valeurs de reference :** résultats de l'élasticité 3D exact donnés par [28]

Les résultats sont résumés dans Tab. 2. Nous notons que le modèle Sin-z2/CL8 conduit à des résultats très satisfaisants pour les déplacements et les contraintes dans le plan quel que soit l'élanement. En revanche, une bonne précision sur les contraintes hors plan nécessite une description plus fine dans l'épaisseur. Le modèle LD4-SV répond parfaitement à cette attente. Pour ce dernier, on peut également remarquer la nette amélioration de l'estimation des contraintes de cisaillement transverse pour une structure mince avec la correction adoptée dans cette étude (cf. LD4-SV/CL8 vs LD4-SV/ISO). L'approche isoparamétrique aurait nécessité de raffiner le maillage pour atteindre le même niveau de précision.

D'autres tests sous sollicitations multi-champs seront également donnés lors de la présentation.

## 5 Conclusion

Un nouvel E.F. incluant la correction du verrouillage pour une famille de modèles raffinés a été présenté et évalué sur un ensemble de tests. L'approche basée sur la compatibilité de champs peut donc s'étendre à différents types de modèles. Les résultats obtenus sont très satisfaisants. La robustesse et la vitesse de convergence des modèles sont nettement améliorées, ce qui répond bien à notre problématique

$S$	modèle	$\bar{U}_1$	$\bar{U}_2$	$\bar{U}_3$	$\bar{\sigma}_{11}$	$\bar{\sigma}_{22}$	$\bar{\sigma}_{12}$	$\bar{\sigma}_{13}$	$\bar{\sigma}_{23}$
4	<b>ref.</b>	0.0094	0.0228	2.0059	0.8008	0.5563	0.0505	0.2559	0.2172
	LD4-SV/CL8	0.0097	0.0228	2.0059	0.8037	0.5581	0.0512	0.2568	0.2187
	LD4-SV/ISO	0.0097	0.0228	2.0059	0.8034	0.5581	0.0512	0.2566	0.2196
	Sin-z2/CL8	0.0094	0.0218	1.9022	0.7617	0.5056	0.0491	0.2110	0.1864
	Sin/AG	0.0094	0.0229	1.9345	0.7554	0.5033	0.0507	0.2113	0.1877
	FSDT/AG	0.0054	0.0181	1.7758	0.4370	0.4774	0.0369	0.1201	0.1301
10	<b>ref.</b>	0.0074	0.0111	0.7530	0.5906	0.2882	0.0290	0.3573	0.1228
	LD4-SV/CL8	0.0074	0.0111	0.7530	0.5928	0.2892	0.0289	0.3584	0.1232
	LD4-SV/ISO	0.0074	0.0111	0.7530	0.5925	0.2891	0.0289	0.3588	0.1266
	Sin-z2/CL8	0.0073	0.0105	0.7181	0.5857	0.2737	0.0281	0.2732	0.1046
	Sin/AG	0.0072	0.0106	0.7180	0.5727	0.2708	0.0279	0.2583	0.1059
	FSDT/AG	0.0064	0.0096	0.6693	0.5134	0.2536	0.0252	0.1363	0.0762
100	<b>ref.</b>	0.0068	0.0068	0.4347	0.5393	0.1808	0.0214	0.3947	0.0828
	LD4-SV/CL8	0.0068	0.0068	0.4347	0.5410	0.1814	0.0214	0.3941	0.0824
	LD4-SV/ISO	0.0068	0.0068	0.4345	0.5403	0.1807	0.0214	0.4727	0.1843
	Sin-z2/CL8	0.0068	0.0068	0.4343	0.5396	0.1808	0.0214	0.2950	0.0744
	Sin/AG	0.0068	0.0068	0.4343	0.5390	0.1806	0.0214	0.2738	0.0764
	FSDT/AG	0.0068	0.0068	0.4337	0.5384	0.1804	0.0213	0.1416	0.0586

TABLE 2 – plaque carrée à 3 couches ; chargement mécanique.

de recherche de compromis entre le coût et la précision de calculs. De plus, suivant l'application envisagée (type de composite, conditions limites, sollicitations multi-champs, ...) et les résultats d'intérêt, un modèle spécifique pourra être choisi.

## Références

- [1] J. Mackerle. Finite element linear and nonlinear, static and dynamic analysis of structural elements : a bibliography (1992-1995). *Engineering Computations*, 14(4) :347-440, 1997.
- [2] J. Mackerle. Finite- and boundary-element linear and nonlinear analysis of shells and shell-like structures : a bibliography (1999-2001). *Fin. Elem. Anal. Des.*, 38 :765-782, 2002.
- [3] K.J. Bathe and E.N. Dvorkin. A four node plate bending element based on Mindlin/Reissner plate theory and mixed interpolation. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 21 :367-383, 1985.
- [4] J.C. Simo and M.S. Rifai. A class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 29 :1595-1638, 1990.
- [5] J.N. Reddy. *Mechanics of laminated composite plates and shells. Theory and analysis*. CRC Press, second ed. edition, 2004.
- [6] E. Carrera. Theories and finite elements for multilayered, anisotropic, composite plates and shells. *Arch. Comput. Meth. Engng.*, 9(2) :87-140, 2002.
- [7] E. Carrera and M. Petrolo. Guidelines and recommendations to construct theories for metallic and composite plates. *AIAA J.*, 48(12) :2852-2866, 2010.
- [8] E. Carrera, M. Cinefra and P. Nali. MITC technique extended to variable kinematic multilayered plate elements. *Compos. Struct.*, 92 :1888-1895, 2010.
- [9] M. Touratier. *A simple and efficient model in composite structure*, C. R. Acad. Sci. Paris, 29, 901-916, 1991.
- [10] O. Polit, P. Vidal and M. D'Ottavio. Robust  $C^0$  high-order plate finite element for thin to very thick structures : mechanical and thermo-mechanical analysis. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 40 :429-451, 2012.
- [11] S. Cheng. Elasticity theory of plates and a refined theory. *J. Applied Mech. ASME*, 46 :644-650, 1979.
- [12] M. Touratier. A refined theory of laminated shallow shells. *Int. J. Solids Struct.*, 29(11) :1401-1415, 1992.
- [13] O. Polit, M. Touratier. *High order triangular sandwich plate finite element for linear and nonlinear analyses*, Comput. Methods Appl. Mech. Eng., 185, 305-324, 2000.
- [14] M. Ganapathi, B. Patel, O. Polit, and M. Touratier. A  $c^1$  finite element including transverse shear and torsion warping for rectangular sandwich beams. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 45(1) :47-75, 1999.



- [15] O. Polit and M. Touratier. A multilayered/sandwich triangular finite element applied to linear and nonlinear analysis. *Compos. Struct.*, 58(1) :121–128, 2002.
- [16] P. Vidal, O. Polit. *A thermomechanical finite element for the analysis of rectangular sandwich beams*, *Fin. Elem. Anal. Des.*, 42, 868–883, 2006.
- [17] P. Vidal, O. Polit. *A family of sinus finite elements for the analysis of rectangular laminated beams*, *Compos. Struct.*, 84, 56-72, 2008.
- [18] A. Tessler. An improved plate theory of 1, 2-order for thick composite laminates. *Int. J. Solids Struct.*, 30 :981–1000, 1993.
- [19] A. Barut, E. Madenci, J. Heinrich, and A. Tessler. Analysis of thick sandwich construction by a 3, 2-order theory. *Int. J. Solids Struct.*, 38 :6063–6077, 2001.
- [20] E. Carrera and S. Brischetto. Analysis of thickness locking in classical, refined and mixed plate theories. *Compos. Struct.*, 82(4) :549–562, 2008.
- [21] B. Bognet, F. Bordeu, F. Chinesta, A. Leygue, A. Poitou. *Advanced simulation of models defined in plate geometries : 3D solutions with 2D computational complexity*, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 201-204, 1-12, 2012.
- [22] M. Savoia, J.N. Reddy. *A variational approach to three-dimensional elasticity solutions of laminated composite plates*, *J. Applied Mech. ASME*, 59, 166–175, 1992.
- [23] E. Carrera. *Theories and finite elements for multilayered plates and shells : A unified compact formulation with numerical assessment and benchmarking*, *Arch. Comput. Methods Eng.*, 10, 215-296, 2003.
- [24] E. Carrera, L. Demasi. *Classical and advanced multilayered plate elements based upon PVD and RMVT. Part 2 : Numerical implementations*, *Int. J. Meth. Eng.*, 55, 253-291, 2003.
- [25] P. Vidal, O. Polit. *A refined sine-based finite element with transverse normal deformation for the analysis of laminated beams under thermomechanical loads*, *J. Mech. Mater. Struct.*, 4, 1127-1155, 2009.
- [26] A. Ammar, B. Mokdada, F. Chinesta, R. Keunings. *A new family of solvers for some classes of multidimensional partial differential equations encountered in kinetic theory modeling of complex fluids*, *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 139, 153-176, 2006.
- [27] O. Polit, M. Touratier, P. Lory. *A new eight-node quadrilateral shear-bending plate finite element*, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 37, 387–411, 1994.
- [28] N. Pagano. *Exact solutions for rectangular bidirectional composites and sandwich plates*, *J. Comp. Materials* 4, 20–34, 1970.