



HAL
open science

数学的証明の学習の改善—実践を改善するための理論的枠組み—

Nicolas Balacheff

► To cite this version:

Nicolas Balacheff. 数学的証明の学習の改善—実践を改善するための理論的枠組み—. Journal of the Japan Society of Mathematical Education, 1997, LXXIX (67-68), pp.52-62. <hal-01925768>

HAL Id: hal-01925768

<https://hal.science/hal-01925768>

Submitted on 17 Nov 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire HAL, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Balacheff N. (1997) "Improving proof learning: a theoretical framework for the improvement of practice". Journal of the Japanese Society of Mathematics Education. Vol. LXXIX (67-68) 52-62 -- Japanese original

数学的証明の学習の改善

—実践を改善するための理論的枠組み—

Improving Proof Learning : A Theoretical Framework for the Improvement of Practice

ニコラ・バラシェフ

1. はじめに

講演の目的は、数学的証明の教授・学習を改善するための理論的枠組みを示すことである。数学的証明の学習や指導を改善することは、教師や研究者にとって非常に困難な問題である。なお「証明」という言葉に関して、フランス語の「preuve」は「正しいことを示す」という意味で、フランス語の「démonstration」が数学的な証明を意味する。従って、ここで議論する証明 (preuve) には両方の意味、すなわち正しいことを示す意味での説明の意味を含むものである。

2. 数学的証明とは何か

数学的証明の学習や指導を改善するための前提として、まず「数学的証明とは何か」ということを明確にすることから議論を始めよう。科学に対する最近の認識論の立場に立てば、数学教育の文脈に即した実践的な答えを見つけたことから始めなければならない。なぜなら哲学者や言語学者や数学者などが与える答えは、数学的証明の学習や指導を改善するには不都合であるからである。

数学者が数学を研究するとき、数学的証明に対してどのような役割を与えているのだろうか。数学者が行う数学的証明には、大きくわけて2つの役割がある。1つは「数学の内的な意味での必要性」である。例えば、ある数学の命題があったとき、それが真であるか偽であるかを確かめるために必要である。もう1つは「数学者間の社会的コミュニケーション」である。例えば、数学者がある数学の命題についてコミュニケーションをするためには、お互いの前提を明確にしておかなければならない。

数学者が数学を研究するときには、「数学的な意味での合理性」が重要である。しかしながら合理性は数学の分野だけに限るのではない。「数学的な意味での合理性」と「数学的でない意味での合理性」が存在する。そういった「合理性」の1つとして、経済性がある。経済性的意味は、数学の分野と数学以外の分野では異なる。数学の分野で、経済性とは厳密性のことである。例えば、ある発見された理論が他の理論と整合しているかどうかということが重要である。数学以外の分野で、経済性とは効率性である。例えば、ある範囲

数学者の実践における
数学的証明の役割

数学的・内的な意味での必要性
社会的コミュニケーション

数学的
意味での
合理性

対

数学的でない
意味での
合理性

数学を研究するとき
固有の経済性

厳密性

対

効率性

で適用できる理論が別の範囲でも適用できるかどうかということは重要である。また、生徒の数学的証明の学習を考察するときには、単に「厳密性」だけではなく、数学的でない意味でのこの「効率性」にも着目することが重要である。

さらに数学的証明は、「理解を求めるため」、「確実性を求めるため」、「コミュニケーションのため」に必要である。数学的活動において、数学的証明に対する3つの側面は複雑に関連してい

る。このことが数学的証明の問題を困難にしている原因でもある。

このような数学的証明の問題の複雑さを考慮して、研究者は2つの観点から研究を進める必要がある。1つは「歴史的な分析」である。例えば、数学史における証明の役割を考察することである。1つは「現在の実践に対する人類学的な分析」である。例えば、数学的証明の授業を考察することである。

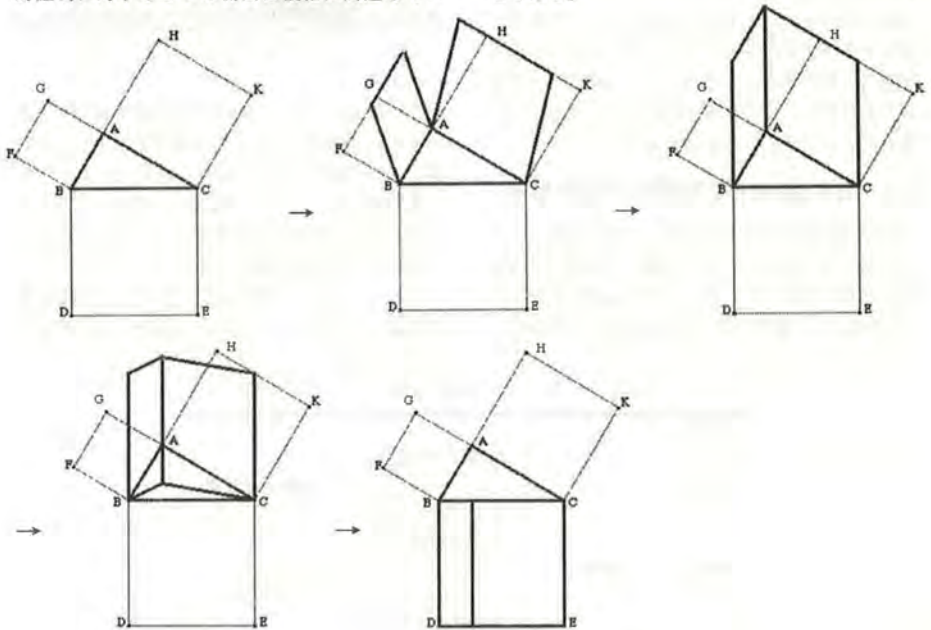


図-1

3. 行為による証明から言語による証明へ

数学的証明を学習するということの発生的な起源は何か。もし心理学者が答えるとすれば、知識の起源は行為の中にあると答えるであろう。それは非常に多く受け入れられていることである。

行為による証明の例は次のようなものである。図-1のように直角三角形のそれぞれの辺を1辺とする正方形を書く。そして他の2つの辺を1辺とする正方形の面積の和は、変形していけば斜辺を1辺とする正方形の面積に等しくなる(三平方の定理)。

生徒がこの行為における証明を受け入れるためには、様々な数学的知識が必要になる。例えば、等積変形の知識が必要である。重要なことは、我々が等積変形の知識を知っているからこそ、行為における証明を受け入れることができたのである。

知識の起源は行為の中に求めることができるが、数学的証明は言語化されなければならない。数学的証明を言語にのせるということが、数学的証明の学習における重要な課題である。それは、生徒が数学的証明を学習する過程でもある。数学的証明の学習過程は、「行為としての知識」が「言語(談話)としての知識」に生成的に移行する過程においてとらえられるのである。

4. 数学的証明の学習過程の分析枠組み

数学的証明の学習過程、すなわち「行為としての知識」が「言語としての知識」に生成的に移行する過程を考察するために、3つの観点を導入する。その3つの観点は、「知識の本質」、「言語化」、

「妥当性」である(前述した「理解を求めるため」、「コミュニケーションのため」、「確実性を求めるため」に対応)。言語化の水準は、「演示(英語の demonstration)」から、「日常語」、「道具としての言葉」、「素朴な形式主義」へと移行する。知識の本質は、「実践としての知識」から、「言葉で表すことのできる知識」、「理論化された知識」へと移行する。妥当性の水準は、「実践的な証明」から「知的な証明」へと移行する(下表参照)。

まず表の上段の「演示」、「実践」、「実践的な証明」の水準の例は図-2である。ある児童が三角形の折り紙を使って「三角形の内角の和が180度である」ということを一直線上になるように3つの頂点のところを折っていた。



図-2

この例は、知識が行為の中に起源を持つことを示すものである。この行為を数学的証明という言語にのせる必要がある。そのためには「行為における言語」ではなく「行為について話す言語」が必要になる。身の回りの世界について話す言語、すなわち日常語が必要になる。

次に「日常語」の例は図-3である。「ある直線が曲線と交わる」ということの厳密な数学的証明

言語化	知識の本質	妥当性
<ul style="list-style-type: none"> ・演示 ・日常語 ・道具としての言語 ・素朴な形式主義 	<ul style="list-style-type: none"> ・実践(ノウハウ) ・言葉で表すことのできる知識 ・理論化された知識 	<ul style="list-style-type: none"> ・実践的な証明 ・知的な証明

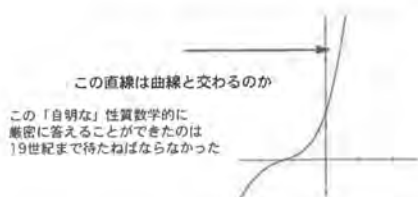


図-3

は、19 世紀まで待たなければならなかった。つまり 19 世紀以前は身の回りの言語あるいは身の回りの世界の言語を交えて語られていた。「道具としての言語」ないし「素朴な形式主義」に基づく厳密な数学的証明はワイエルシュトラウスによって示された。

重要なことは、「行為における言語」を「行為について話す言語」に変えていく必要があるということである。そのとき「行為について話す言語」は妥当性を示すために用いられる。

数学的証明をするためには、知識の本質の欄で言えば、「理論化された知識」が必要である。また「理論化された知識」、「実践的な証明」から「知的な証明」へ移行していくときにも必要である。「素朴な形式主義」にいたることが最終目標である。それはブルバキが「素朴な形式主義」と呼んだものを指している。なお今日では、コンピュータを用いた「完全な形式主義」が可能となっている。「知的な証明」は数学者の特権であろう。実際に数学者は、様々な国の言語で様々な組織のもとで知的な証明を行っている。

以上のような数学的証明の学習過程は、「言語化」、「概念化（知識の本質）」、「制御（妥当性）」という観点によって分析できるが、それぞれ3つ

の観点は、相互に強く関連している。例えば、「概念化」の観点における実践的な水準にあった知識が「理論化された知識」になるためには、「言語化」と「制御（妥当性）」が一定の水準であることが条件として必要である。

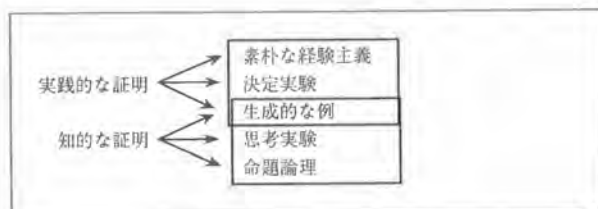
5. 数学的証明の妥当性の水準

数学的証明の指導を改善するためには、さらに数学的証明の学習過程を分析する以上3つの観点の中でも特に「妥当性」は重要である。そのため数学的証明の妥当性の水準をさらに細分化する。「実践的な証明」のカテゴリーは、「素朴な経験主義」、「決定実験」、「生成的な例」のサブカテゴリーに分けられる。一方「知的な証明」のカテゴリーは、「生成的な例」、「思考実験」、「命題論理」のサブカテゴリーに分けられる（下図参照）。

「素朴な経験主義」は数学者の活動には含まれないが、数学的証明を学習する人には前述のように実際に認められるので、「素朴な経験主義」という形式を合理性の1つのタイプとして含める必要がある。

「決定実験」は、人と人との間に存在する社会的な葛藤を解決する手段として行われるものである（訳者注：日本の仮説実験授業の実験のようなものをさすと考えられる）。ある人が言っている命題を受け入れるかどうかを決定するとき、「決定実験」が行われる。物理学の分野において過去には「決定実験」は重要なものであった。

「生成的な例」は、18 世紀から 19 世紀においてよくみられたものである。例えば「三角形の内角の和は 180 度である」という命題を取り上げその違いを示そう。「実践的な証明」における「生成的な例」では、実際に三角形の折り紙の3つの



頂点が一直線になるように折ることができたことを根拠にして、「三角形の内角の和は 180 度である」という命題が成り立つことを認める。一方「知的な証明」における「生成的な例」では、「三角形の内角の和は 180 度である」という命題を示すために、実際に三角形の折り紙の 3 つの頂点を折ってみて、一直線になることを確かめる。

「生成的な例」というカテゴリーが「実践的な証明」と「知的な証明」の両方にあるので学習者の認知的な過程を分析するときに困難が生じる。なぜなら 1 つの「生成的な例」を観察したときに、それが「実践的な証明」なのか「知的な証明」なのか判断しにくいからである。

以上のようにこれらの 5 つのカテゴリーを発達の水準としてもみることができであろう。これらは、発達の水準としてだけでなく、生徒が証明するとき生じる様々な制約の水準を示すものでもある。なぜなら証明の妥当性の水準はその場の状況の必要性に応じて決定されるからである。生徒はその場の状況の必要性に応じて証明の水準を決定するので、その水準以上の証明をすることはないのである。

6. 数学的証明の対象化

生徒の数学的証明の学習について考察するとき、結果だけでなくその過程にも焦点を当てる必要がある。数学的証明は、生徒のこれまで学習してきた経験の所産であると同時にそこにいたる問題解決過程の所産でもある。そして知識の生まれる起源も数学の問題の中にあるといえるからである。

しかしながら数学的証明の学習は比や割合などの通常の学習とは異なる。なぜなら、生徒が数学的証明を学習するためには、説明の道具として数学的証明をとらえていたものから考察の対象としてとらえるようにする必要があるからである。教師は、生徒をメタ的な位置に置く必要がある。証明を対象化することで、生徒は「数学的証明とは何か」ということを理解するからである。それゆえ教師は生徒が数学的証明を学習する際に特別な配慮をする必要がある。

生徒が数学的証明を対象化する手段として「矛盾」を活用すべきである。生徒に矛盾を引き起こすには 2 つの方法がある。もう 1 つは「証拠としての反例」である。1 つは、「触媒としての社会的認知的葛藤」である。ここでは、「証拠としての反例」の事例を示す。

まず平行四辺形 ABCD を書く。他の図形を次の規則によって書く。A' は点 B に対する A の対称点。B' は点 C に対する A の対称点。他も同様。その結果 A'B'C'D' を結んだ図形は平行四辺形になる (図-4)。

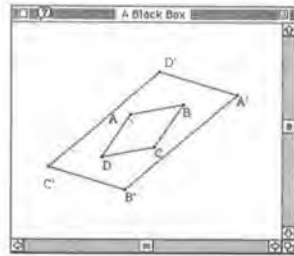


図-4

(証明)

B'D' と A'C' の交点を E とする。

$\triangle AD'E$ と $\triangle CB'E$ において

$AD' = AD = BC = CB'$ であるから

$AD' = CB' \dots\dots\dots (1)$

$EA = EC \dots\dots\dots (2)$

$\angle D'EA = \angle B'EC \dots\dots\dots (3)$

(1)-(3)より 2 辺とその間の角が等しいので、

$\triangle AD'E \cong \triangle CB'E$

ゆえに $D'E = B'E$

四角形 A'B'C'D' において、その対角線は互いに他を 2 等分するので、四角形 A'B'C'D' は平行四辺形である。(図-5) (証明終)

平行四辺形から別の平行四辺形ができた。次に、もしもの図形が正方形ならばどうなるかという問いが生じる。なぜなら正方形は平行四辺形でもあるからである。

同じ証明がここでも適用できる (図-6)。では長方形についてはどうだろうか。しかし長方形の外側にできた図形は長方形ではない (図-7)。

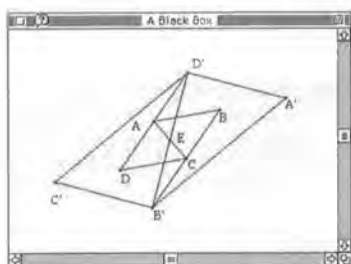


図5

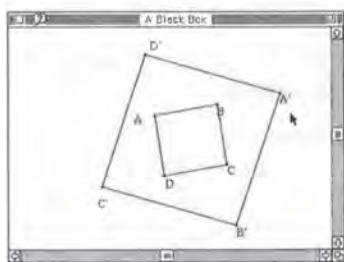


図6

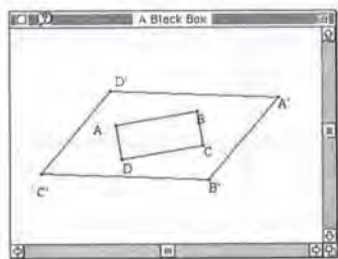
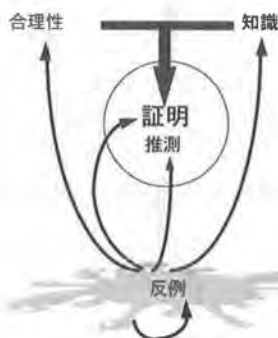


図7

この反例の意味が問題になり、生徒は次のようなことを問い始める。どこに問題があるのか。証明が間違っているのか。推測が間違っているのか。例として正方形が非常に特殊すぎたのか。例自身は数学的には何も示さないが、反例によってすべての努力が無になってしまう。

これまでの数学の授業では、いつでも命題の真偽だけを問題とする傾向がある。しかし授業で命題の真偽のみを問題とする傾向を変える必要がある。なぜなら生徒は命題の真偽だけに注意が向けられ、証明が間違っているのか、推測が間違っ

ているのか、などということを議論しようとしなからである。



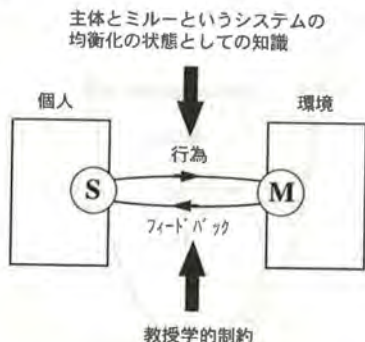
数学教育において重要なことは、これまでとらえられてきた数学的証明に対する見方を問い直すことである。これまで数学的証明とは命題の真偽を確かめることだけであると考えられてきた。教師も生徒が正しく証明できることだけを期待してきた。しかし生徒は、反例が見つかったとき、反例自身に戻ったり、仮定している知識に戻ったり、証明自身に戻ったりすべきである。生徒に数学的証明を指導するには、このように数学的証明を広くとらえる必要がある。

7. 数学的証明の学習環境の設定

数学教育において重要なことは、以上述べたような数学的証明の学習のダイナミズムの複雑さを認識するだけでなく、複雑さを取り扱ったり数学的証明を学習する状況を組織化する必要がある。

現在どこまで研究がなされているのか。教師は構成主義的アプローチによって数学的証明を指導することが可能である。しかし生徒が知識を構成することと「数学的証明とは何か」ということを理解することとは明らかに異なる。認知的な困難性と数学的証明や反例の理解の困難性とは異なるからである。

生徒が数学的証明を学習するとき、数学的証明の意味を引き出すための場が必要になる。そのとき教師は数学的証明自身の対象についてだけでなくその意味について話し合うように配慮しなければならない。



生徒が数学的対象へ働きかけを行ったとき、その働きかけの特殊性をフィードバックしてくれるようなミルー (milieu, 学習環境) が必要である。生徒とミルーの関係は非常に重要である。ミルーは、単に学習者の周囲にあるすべてのものという意味ではない。指導のねらいを踏まえたものをミルーとするべきである。ミルーには、現実世界や他者との社会的相互作用も含まれる。例えば、モデリングの問題では、現実世界がミルーになる。そのとき経済学や物理学の特別の概念がモデリングをするときに必要な (上図参照)。

8. コンピュータ環境

ミルーの一例として、コンピュータ環境がある。コンピュータ環境は数学的抽象への仮想現実をもたらす。コンピュータ環境は「形式システム」と「現象学の領域」とから構成される。コンピュータは「対象と関係の計算表現」を入力することで作動するので、人がコンピュータを動かすためにはプログラムを入力したり、コマンドを操作しなければならない。一方コンピュータの操作の結果、ディスプレイ上には図形などの数学的モデルが表示される。生徒は、ディスプレイ上に表示された数学的モデルを参照しながら数学的性質を見つけだし、コマンドを操作し、それを変形させたり修正したりしていく。コンピュータ環境での活動はこの繰り返しである。例えば、幾何の学習において、形式的システムには「形式的対象、デカルトモデル」があり、現象学の領域には「グラフ化さ

形式システム



数学的モデルの厳密性
(形式的対象や関係、デカルトモデル)
知覚対象としての数学的性質
(グラフ化された対象の直接的操作)

現象学の領域

れた対象の直接的操作」がある (上図参照)。

9. カブリ・ジオメトリによるミルーの 具体的事例

具体的事例としてゲルノーブル大学で開発したカブリ・ジオメトリという幾何学習ソフトを取り上げる。このソフトでは、仮想的な定規とコンパスを使って作図ができる。例えば、まず三角形を書き、次にその三角形の2つの辺に垂直二等分線を引く。そして垂直二等分線の交点を中心に三角形の頂点と交わるような円を書く。生徒は、三角形の頂点を動かして、この図形の性質を調べることができる (図-8)。

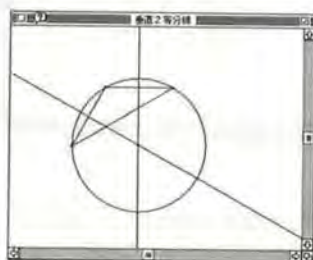


図-8

9.1 蝶番機械 (リンケージ)

図-9は蝶番機械をモデル化したものである。点Pを動かすとOABCが平行四辺形のまま点P'が動く。この機械は19世紀に数学者シルベスターによって開発された。生徒は点Pを動かしたときに点P'がどのように動いていくか観察することができる。また、生徒は平行四辺形の頂点

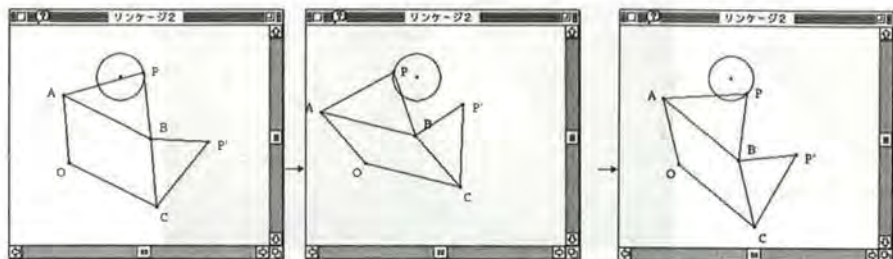


図-9

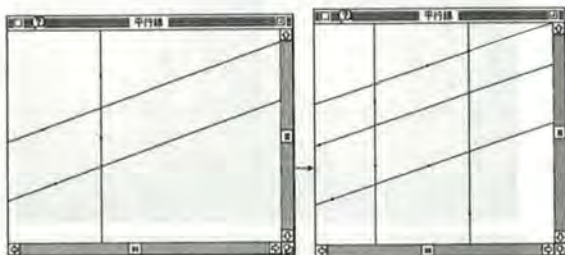


図-10

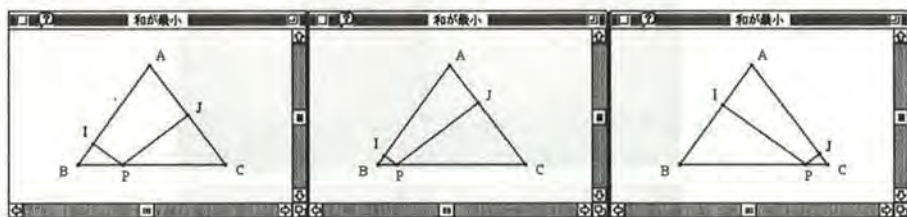


図-11

の角度や辺の長さを変えることで、点 P' がどのように動いていくか観察することができる。

9.2 作図機能を制約したミルー

教師は、ミルー（コンピュータ環境）を指導目的にあうように設定できる。例えば、カブリ・ジオメトリでは、必要な機能以外余分な機能をすべて取り外すことができる。「点を打つ」、「直線を引く」、「反射」、「平行であるかチェックする」、「名前をつける」、の5つの機能だけを持つミルーにおいて、「ある点を通りある直線に平行な直線を作図する」という問題を考える（図-10）。この

作図環境での作図は普通の作図方法とはまったく異なる。なぜなら点対称という性質を用いて平行線を引くからである。生徒は対称について新しい意味が再構成できる。

9.3 作図条件を制約するミルー

任意の三角形 ABC において、辺 AB 上に点 I 、辺 BC 上に点 P 、辺 CA 上に点 J を取る。点 P は、辺 AB と辺 JP 、辺 AC と辺 IP がそれぞれ垂直になるように動く。すなわち問題は、 IP と JP の長さの和が最小になるのは点 P が辺 BC 上のどこにきたときかである（図-11）。この例で、生徒は、

4次線分をいじる



3次線分をいじる



2次線分をいじる



1次線分をいじる



図-12

与えられた条件を満足するように作図しなければならない。そのためこの問題は、数学的な意味での制約を考慮しなければならず、現実世界で生じる制約とは異なるものである。

9.4 作図ツールシステム—4次関数

作図ツールシステムを用いた関数の表現を示す(図-12)。これは、4次関数の各係数を直接変化させたときのグラフを描くものである。このシステムは蝶番を組み合わせたものである。この機械

はグランベールという人によって発明された。グランベール自身の問題は、この蝶番の組み合わせたものを理論的に記述することであった。2次関数を書く蝶番は実際に作られた。実際に私の研究所では3次関数までの蝶番を作った。4次関数を描く機械はとても複雑になるので組み立てることは困難である。それは現実の制約である。このようなソフトウェアを用いれば、容易に4次関数を描くことができる。さらに係数が多い多項式の関数についても、係数を変化させたときのグラフの形状を調べることができる。

9.5 円錐曲線

作図ツールシステムを用いて、円錐曲線、放物線、双曲線なども、教室の中で取り扱うことができる。まず方眼紙に(0,0), (1,1), (2,4), (-1,-1), (-2,-4)の5点を通るような円錐曲線を描く。これは放物線である($y=x^2$)。グラフ自身を変化させるのではなく、方眼の形を変えてみたらどうなるだろうか。このことは現実世界では不可能なことである。

上部の方はそのままにして、左下の部分を図-13の上の図のように縮めていく。そうすると、もとの関数は双曲線になってしまう。一方、下部の方の横の長さはそのままにして、上部の方の横の長さを図-13の下の方の図のように短くしていく。そうすると、もとの関数は楕円になってしまう。これらのことは、放物線がある意味で双曲線であり、また楕円であるということを示している。

10. おわりに

数学的証明の指導についていくつか考慮すべきことがある。1つは、生徒とミルーとの関係である。1つは教室で行われる議論の質である。

数学的証明の学習において生徒とミルーとの関係が重要であることは、以上の具体的事例を通して明らかである。教師は、生徒がミルーと相互作用できるように、ミルーを設定する必要がある。ソフトウェアを工夫することで、指導目的にあった教授学的場が構成される。

一方ここでは十分に触れることができなかったが、教室で行われる議論の質も重要である。生徒

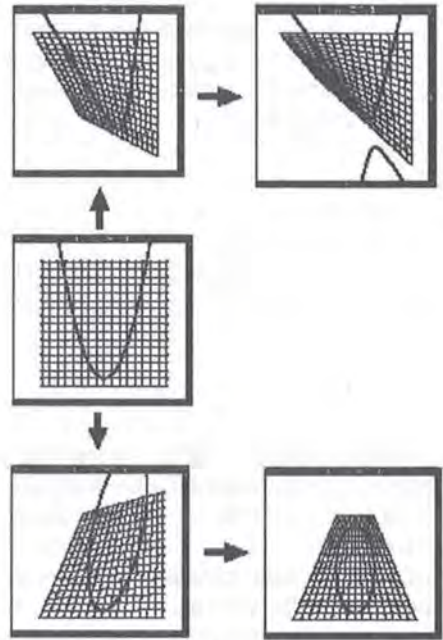


図-13

が数学的証明の意味を理解するためには、教室において議論を数学的なものにする必要がある。このとき注意すべきことは、教師は社会的相互作用を起こすことだけにとらわれてしまうということである。社会的相互作用は教師にとって選択肢の1つにすぎない。教師が社会的相互作用を活用するときには、可能性と限界を見極める必要がある。議論が楽しいものであっても、それが数学的であるととは限らないからである。

教室において議論を数学的なものにするための手段として、社会的相互作用を2つの意味で活用すべきである。1つは、社会的相互作用を取っ手(レバー)として活用することである。例えば、一方の側がある数学的命題を提示し、他方の側がその反例を出していくというような対決型の授業展開がある。そこでは、数学的証明が、数学的命題と反例との間の葛藤を克服する手段として導入される。もう1つは、社会的相互作用を障害とし

て活用することである。お互いの議論がかみ合わないとき、お互いの前提や議論の進め方を明確にする必要がでてくる。そこでは、社会的相互作用を通して、議論の進め方が次第に数学的証明に置き変わっていくであろう。

時間がまいりました。私は最初に述べたことよりも多くの問題を残して、終わってしまうことを申し訳なく思います。ご清聴ありがとうございます。

(以上、文責・岸本忠之)

昭和30年8月24日 第三種郵便物認可 平成9年3月25日発行 (毎月1回1日発行) 日本数学教育学会誌 第79巻 (臨時増刊)

ISSN 0021-471X

日本数学教育学会誌

1997 第79巻 臨時増刊

数学教育学論究

Vol. 67・68

1997年3月

社団法人 日本数学教育学会

郵便番号 112 小石川郵便局私書箱 18号