

Estimation du taux de restitution d'énergie critique dynamique par la méthode des éléments discrets

A. Coré, J-B. Kopp, J. Girardot
F. Dau, J-L. Charles, P. Viot

I2M-DUMAS, Arts et Métiers ParisTech, {arthur.core,jean-benoit}@ensam.eu

Résumé — Une approche originale est proposée afin d'estimer le taux de restitution d'énergie critique dynamique. Une méthode de déboutonnage numérique par éléments discrets est utilisée. L'introduction d'une zone de rupture d'une longueur calibrée et d'un relâchement linéaire des éléments permet de retrouver les résultats de la littérature. Cette procédure est appliquée sur des structures sphériques où une propagation de fissure en régime dynamique est observée expérimentalement. Les effets inertiels induits par la fissure sont importants et dépendants de l'épaisseur de la structure.

Mots clés — Méthode des éléments discrets, rupture dynamique, taux de restitution d'énergie

1 Introduction

L'estimation du taux de restitution d'énergie critique à partir d'essais expérimentaux est primordiale lorsque l'on traite de mécanique de la rupture. Ces données matériaux sont ensuite utilisées dans de nombreux modèles afin de simuler la propagation d'une fissure. Lorsqu'une propagation de fissure en régime dynamique est observée, les effets inertiels doivent être estimés pour remonter au taux de restitution d'énergie critique dynamique. Alors qu'une solution analytique existe pour la propagation en mode I d'une fissure dans un milieu semi-infini [1], les méthodes numériques semblent être le seul moyen pour traiter le cas de propagation de fissures sur des structures plus complexes. Connaissant l'historique du sommet de fissure (position en fonction du temps), la propagation de fissure peut être simulée. Un bilan d'énergie permet ensuite de quantifier la part des différentes énergies mises en jeu. Des modèles numériques de déboutonnage ont été mis en œuvre par la méthode des éléments finis avec succès [2] et il est proposé ici d'utiliser une nouvelle méthode, par éléments discrets (MED). Après avoir validé cette méthode sur un cas simple, une application sur une structure sphérique où la rupture en régime dynamique a été observée sera présentée.

2 Rupture dynamique sur plaque par la méthode des éléments discrets

2.1 Méthode des éléments discrets

Un modèle numérique basé sur la MED est choisi pour modéliser le comportement du matériau étudié. La MED est en effet une méthode naturellement adaptée pour les sollicitations dynamiques, les grandes déformations et la rupture. Des éléments sphériques indéformables sont reliés entre eux par des poutres 3D. Sous réserve de respecter certaines conditions de compacité et de nombre d'éléments discrets, il est possible de modéliser le comportement continu et élastique d'un matériau [3]. Afin de reproduire la rigidité et le coefficient de Poisson du matériau considéré, deux paramètres principaux sont calibrés : le module de Young et le rayon adimensionné des poutres 3D. Une analyse paramétrique est menée puis les paramètres élastiques sont fixés pour l'étude. Il est ensuite possible de simuler la propagation d'une fissure en rompant les poutres, suivant un critère de rupture ou par une méthode manuelle de découpe. C'est cette deuxième méthode, détaillée par la suite, qui permettra d'estimer des paramètres matériaux qui serviront à alimenter des critères de rupture.

2.2 Bilan d'énergie

Afin d'estimer le taux de restitution d'énergie en mode I, G_I , lors d'un essai numérique, il convient de calculer une énergie dissipée. L'approche développée ici est basée sur un bilan d'énergie réalisé à chaque pas de temps prenant en compte les énergies mises en jeu lors de la simulation. À chaque pas du calcul, la fissure avance de Δa et la somme des énergies dans le système diminue. L'énergie perdue correspond à l'énergie de rupture. On peut écrire :

$$G_I = \frac{\Delta W_{ext} - \Delta W_{elas} - \Delta K_{cin} - \Delta W_{diss}}{2b\Delta a} \quad (1)$$

Avec ΔW_{ext} le travail des forces extérieures, ΔW_{elas} l'énergie élastique, ΔK_{cin} l'énergie cinétique, ΔW_{diss} l'énergie dissipée autre que l'énergie de rupture (amortissement visqueux, amortissement numérique, frottement) et b l'épaisseur de la fissure.

Le calcul de ces énergies est réalisé à partir des puissances développées sur chaque élément discret : les forces, vitesses linéaires, couples et les vitesses de rotation sont mesurées sur chaque élément. Une intégration temporelle permet ensuite de remonter à des énergies.

La figure 1 illustre un bilan d'énergie réalisé sur une plaque pré-contrainte puis découpée. L'essai peut être partagé en 3 phases : une première phase de mise sous tension de la plaque, une phase de stabilisation puis une phase de découpe. La phase de découpe entraîne une libération de l'énergie élastique stockée sous forme d'énergie cinétique et d'énergie de rupture qui peut être rapportée à la surface créée. Aucun amortissement n'est introduit ici.

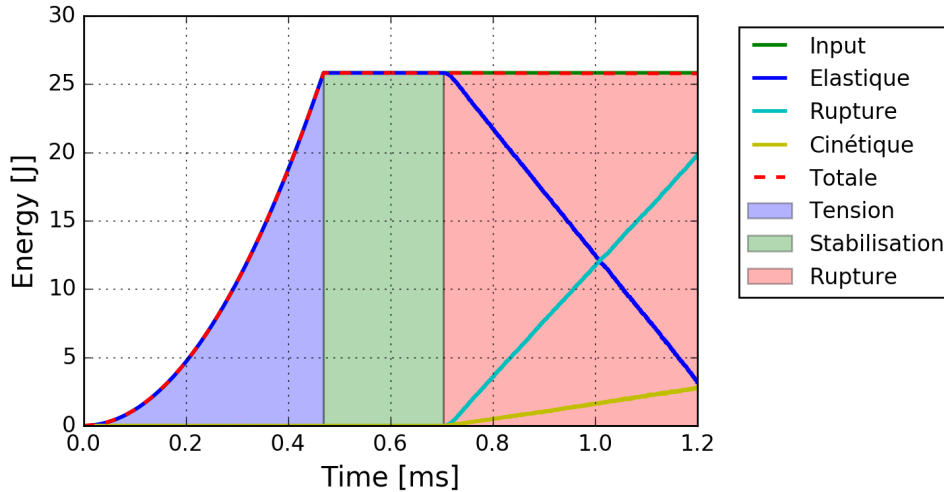


FIGURE 1 – Bilan d'énergie lors de la tension, stabilisation puis découpe d'une plaque

2.3 Zone de rupture

Une approche par zone de rupture est proposée. Elle s'appuie sur la méthode des zones cohésives largement employée par la méthode des éléments finis (FEM). La figure 2 schématise la propagation d'une fissure dans un milieu discret. Au niveau de la zone intacte, les poutres sont de type élastique. Entre la pointe de fissure réelle (les bords de la fissure ne sont plus liés) et la zone intacte, une zone de rupture est introduite. Dans cette zone de rupture, les poutres perdent progressivement leur rigidité jusqu'à atteindre une rigidité nulle, les poutres sont alors désactivées. Le module de Young est associé à toutes les déformations des poutres : traction, flexion, torsion et cisaillement.

Deux paramètres sont à identifier : la longueur de la zone de rupture et le schéma numérique de dégradation des poutres. Plusieurs schémas numériques de dégradation des éléments ont été proposés pour la FEM et sont appliqués en MED. Une décroissance quadratique ou linéaire permet d'obtenir sensiblement les mêmes résultats, proches de la solution analytique. Le schéma linéaire de dégradation des poutres est finalement retenu, comme préconisé en FEM par [4].

Afin de rendre la longueur de la zone de rupture adimensionnelle, on utilise le rapport $r_l = l/R_{ed}$ avec l la longueur de la zone de rupture et R_{ed} le rayon moyen des éléments discrets du modèle. Une

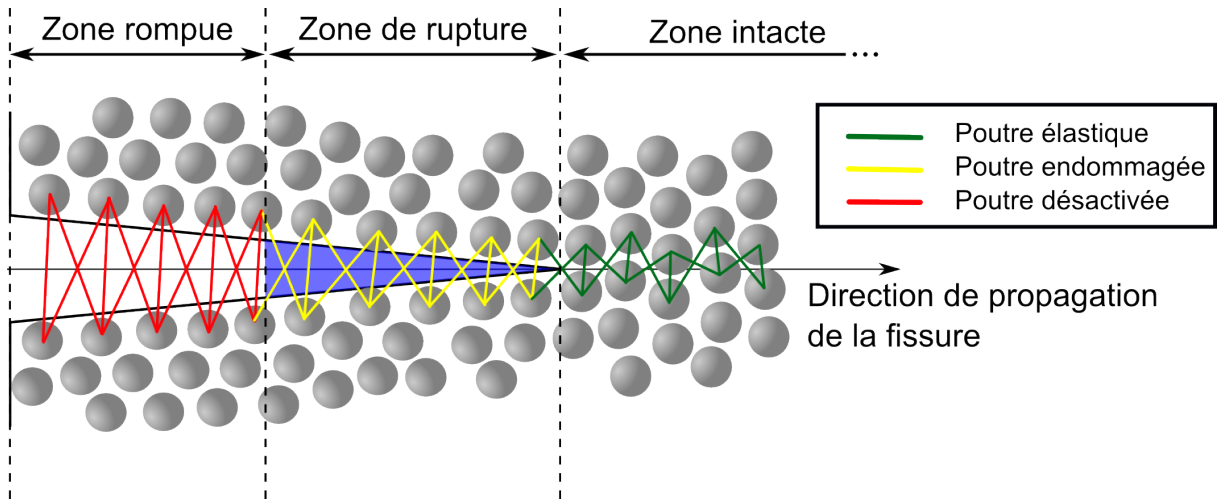


FIGURE 2 – Technique de découpe par zone de rupture : endommagement progressif des poutres

analyse paramétrique a été menée en utilisant plusieurs longueurs. Une longueur équivalente à 1 offre les meilleurs résultats car une longueur plus importante conduit à une énergie dissipée trop importante entre $0,2c_r$ et $0,8c_r$ (avec c_r la vitesse des ondes de Rayleigh dans le matériau). À $0,1c_r$, une poutre met environ 100 itérations à se dégrader contre 10 itérations à $1c_r$ avec les paramètres fixés pour l'étude. La réduction du pas de temps n'a pas montré d'influence sur les résultats. De plus, une augmentation du nombre d'éléments et donc une diminution de leurs rayons, n'a pas d'influence sur le résultat au delà de quelques milliers d'éléments. Il est donc possible de simuler la propagation de fissure sur de nouvelles géométries sans recalibrer les paramètres de rupture. La figure 3 présente les résultats de déboutonnage exprimés sous la forme du facteur de correction dynamique en fonction de l'avancée de la fissure. Il est à noter que le régime de propagation permanente de la fissure est atteint à environ 20% de la longueur de la plaque.

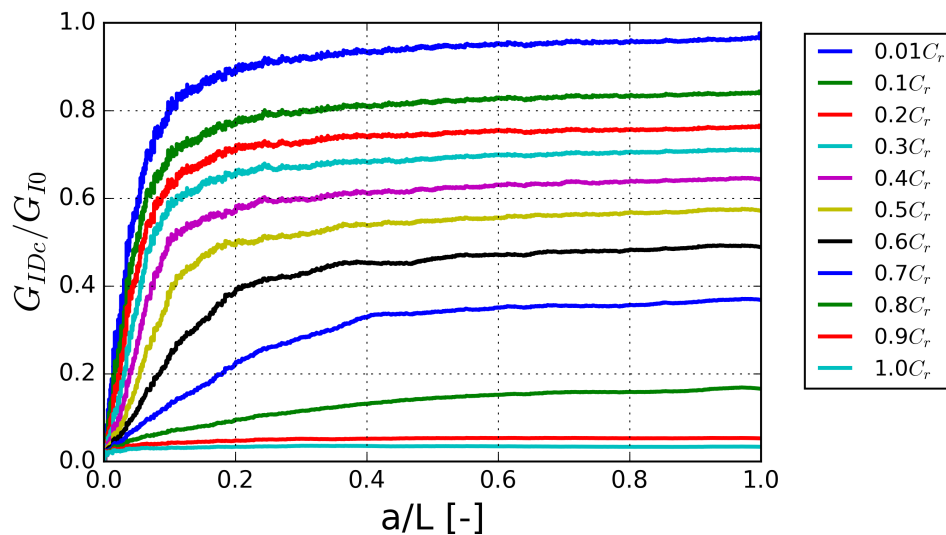


FIGURE 3 – Calcul du taux de restitution d'énergie critique en régime dynamique sur un essai de rupture sur plaque en fonction de la longueur de fissure normalisée

2.4 Conclusion

Un schéma de dégradation linéaire couplé à une longueur de zone de rupture de 1 permet de reproduire les résultats obtenus analytiquement ou par la FEM. On peut cependant remarquer sur la figure 3 que le facteur de correction dynamique tend vers 1 et 0 en fonction de la vitesse de propagation sans atteindre ces limites. À une faible vitesse, ce phénomène peut être expliqué par la présence d'effets iner-

tiels résiduels. Les poutres ne sont pas alignées au niveau du sommet de fissure ce qui conduit à de légères perturbations normales à la plaque entraînant des oscillations de flexion de la plaque. À une vitesse proche de $1c_r$, les poutres rompues possèdent un minimum d'énergie élastique correspondant à une partie de l'énergie emmagasinée par la tension de la plaque. Une augmentation du nombre d'éléments permet de tendre vers 0.

3 Application à la rupture dynamique sur sphère creuse

3.1 Mesures expérimentales

La figure 4 montre une série de photos issues d'un essai de compression dynamique uni-axial sur une sphère creuse composite. L'image est orientée de manière à voir la fissure se propager de gauche à droite. La fissure se propage toujours d'un plateau de compression à l'autre. Les croix rouges représentent le sommet de fissure à chaque image. Les coordonnées dans le plan des positions successives sont relevées manuellement à l'aide du logiciel ImageJ. La différence de luminosité entre la surface de la sphère éclairée et les surfaces créées par la fissure qui ne le sont pas permet de mettre en évidence le chemin de fissure. Le sommet de fissure se situe dans une zone claire où les bords de la fissure ne se sont pas encore écartés. L'erreur de mesure des coordonnées du sommet de fissure est la même à chaque point et s'annule lorsqu'une distance est calculée. Les coordonnées suivant les deux axes \vec{y} et \vec{z} exprimées en pixels sont converties en millimètres puis la position hors du plan suivant l'axe \vec{x} est calculée à partir de l'équation 2 avec r le rayon extérieur de la sphère.

$$x_i = \sqrt{r^2 - y_i^2 - z_i^2} \quad (2)$$

La longueur de fissure à chaque instant est calculée à partir de l'abscisse curviligne entre deux points de mesure. La première étape est de passer en coordonnées sphériques en exprimant les coordonnées du sommet de fissure en fonction de θ et φ à partir de l'équation 3.

$$\begin{cases} \varphi = \arccos(z/r) \\ \theta = \arctan(y/x) \end{cases} \quad (3)$$

La distance entre deux points i et $i+1$ est ensuite calculée par la relation fondamentale de trigonométrie sphérique :

$$d_{i-i+1} = r \arccos[\sin(\varphi_i) \sin(\varphi_{i+1}) + \cos(\varphi_i) \cos(\varphi_{i+1}) \cos(\theta_i - \theta_{i-1})] \quad (4)$$

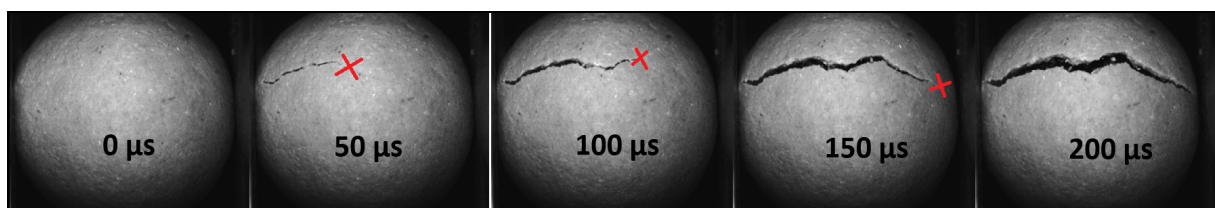


FIGURE 4 – Relevés cumulés des coordonnées dans le plan du sommet de fissure ($\Delta t = 13 \mu s$)

La vitesse de propagation moyenne de la fissure est calculée puis elle est exprimée par rapport à la vitesse des ondes de Rayleigh dans le matériau : \dot{a}/c_r . La relation donnée par l'équation 5 donne la vitesse des ondes de Rayleigh connaissant les vitesses des ondes transverses c_t avec une bonne précision (erreur inférieure à 0,46 %).

$$c_r \approx \frac{0,87 + 1,12\nu}{1 + \nu} c_t \quad (5)$$

On relève par des mesures à ultrasons une vitesse des ondes longitudinales c_l de $3250 \pm 50 \text{ m.s}^{-1}$ et une vitesse des ondes transversales c_t de $1760 \pm 50 \text{ m.s}^{-1}$. La vitesse des ondes de Rayleigh est d'environ $1632 \pm 50 \text{ m.s}^{-1}$.

3.2 Mise en place du modèle

Une géométrie de sphère creuse est construite en éléments discrets puis la sphère creuse est soumise à une compression uni-axiale avant de procéder à la technique de déboutonnage. La rupture d'une sphère creuse à une vitesse de $0,02 c_r$ est représentée sur la figure 5. Le code couleur correspond au déplacement perpendiculaire à la propagation de fissure afin de mettre en évidence l'ouverture en mode I de la sphère creuse. La rupture est ici idéalisée : nette, sans branchement et parfaitement rectiligne. Il serait ici possible de réaliser des propagations de fissure suivant le chemin de fissure observé expérimentalement. Une rupture rectiligne est conservée car les chemins de fissures observés ne présentent pas de bifurcations ou de branchements importants dans l'ensemble. Les vitesses de propagation observées de l'ordre de $0,1 c_r$ à $0,15 c_r$ sont éloignées d'un facteur 4 par rapport à la vitesse de propagation de $0,6 c_r$ où intervient théoriquement le branchement pour des raisons inertielles.

3.3 Résultats

Lors de la rupture sur sphère, le mode de propagation en mode I n'est pas assuré près des points de contacts. Le cisaillement près des bords implique un mode propagation mixte de la fissure où il est difficile de quantifier le rôle de chacun des modes. Le suivi de la propagation de fissure par caméra rapide se limite d'ailleurs à la surface visible et il n'est pas possible de remonter à la vitesse de fissuration près de l'amorçage au niveau des points de contacts. Le calcul du facteur de correction dynamique doit donc être réalisé sur la partie linéaire de l'énergie de rupture cumulée. Une régression linéaire est réalisée pour chaque vitesse de fissuration entre une position angulaire de la fissure de $\pi/2$ et $3\pi/4$. La valeur maximale du coefficient directeur de la pente est donnée par le régime de propagation supposé quasi-statique. Le facteur de correction dynamique pour chaque vitesse de propagation est estimé en comparant le coefficient directeur de la pente ou l'énergie dissipée par rapport au cas en quasi-statique.

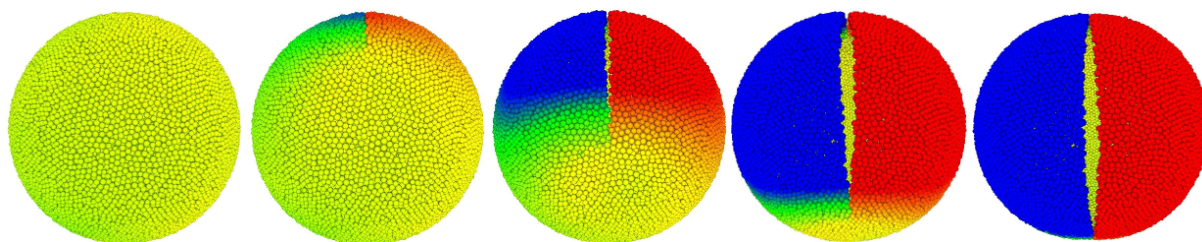


FIGURE 5 – Propagation d'une rupture dynamique ($0,02 c_r$) sur une sphère creuse

Les résultats sont présentés sur la figure 6. Le facteur de correction dynamique est tracé en fonction des vitesses de fissuration par rapport à la vitesse des ondes de Rayleigh. Un zoom permet d'observer la plage de vitesse observée expérimentalement. La première constatation est que l'évolution du facteur de correction dynamique ne suit pas du tout une décroissance quasi-linéaire comme dans le cas de la plaque. Les effets inertiels générés par la propagation de fissure sur une sphère creuse sont beaucoup plus importants que sur plaque. Une vitesse de propagation supérieure à $0,2 c_r$ implique un facteur de correction dynamique proche de 0 donc une valeur de G_{IDc} proche aussi de 0. Dans ce cas là, la vitesse de propagation est limitée bien avant $0,6 c_r$ puisque G_{IDc} ne peut être égal à 0.

Les résultats mettent aussi en évidence l'influence de la géométrie : plus le ratio r_t (rapport de l'épaisseur sur le rayon moyen de la sphère creuse) est faible, plus les effets inertiels sont importants pour une même vitesse de propagation.

4 Conclusions

La méthode des éléments discrets a montré ici sa facilité de mise en œuvre pour la modélisation d'une ouverture manuelle de fissure sur plaque à différentes vitesses. Le modèle se rapproche des résultats analytiques dans le cas où un schéma de dégradation des poutres linéaire est couplé avec une longueur de zone de rupture de 1 fois le rayon moyen des éléments discrets du modèle.

Le modèle est ensuite appliqué sur une sphère creuse afin de quantifier les effets inertiels en fonction de la vitesse de propagation de la fissure. Le facteur de correction dynamique est largement influencé

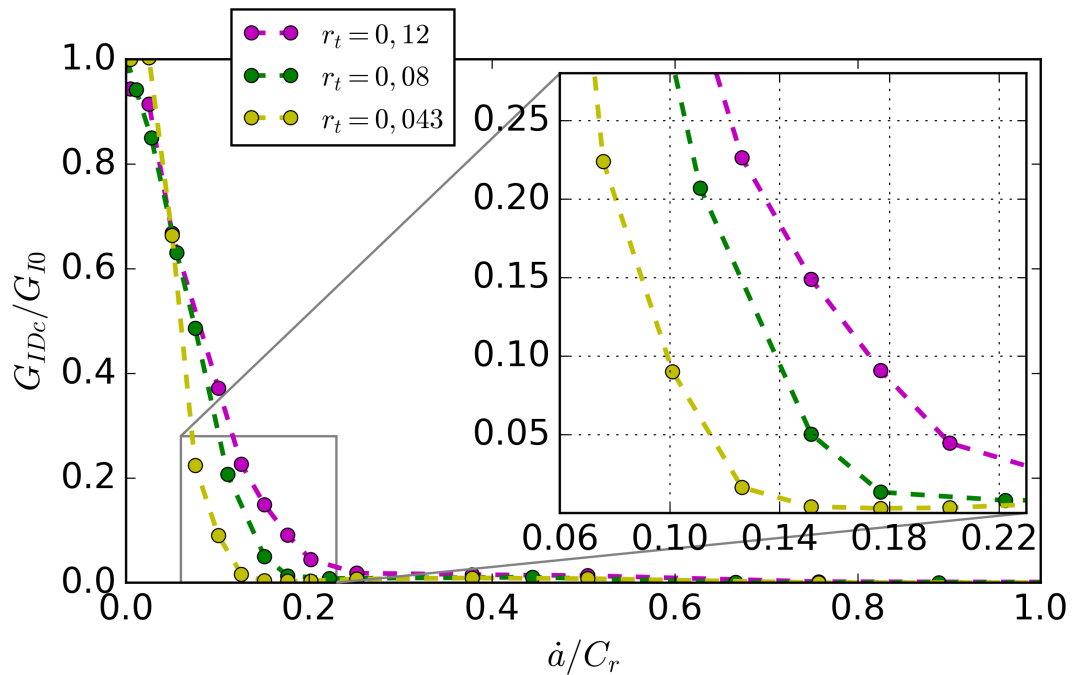


FIGURE 6 – Facteur de correction dynamique en fonction de la vitesse de propagation de la fissure sur sphère creuse pour différentes épaisseurs de coque

par la géométrie. La structure de sphère creuse génère en effet d'importants effets inertiels. À $0,1 c_r$, seulement 30 % de l'énergie disponible est dissipée par la rupture ($r_t = 0,08$) contre 90 % pour la plaque. À $0,15 c_r$ ce pourcentage passe à environ 5 %. Des suppositions sont faites pour traiter le problème : mode de propagation I prépondérant, micro fissuration près-rupture non pris en compte et chemin de fissure rectiligne et net. Les résultats quantitatifs obtenus donnent une bonne indication de la valeur du taux de restitution d'énergie critique dynamique du matériau étudié, environ 550 J/m^2 .

Remerciements

Les auteurs remercient les membres du projet FUI SAMBA financé par la BPI, la région Midi-Pyrénées, la région Aquitaine et l'Aerospace Valley.

Références

- [1] KB. Broberg *The propagation of a brittle crack*, Arkiv Fysik 1960 ;18 :159
- [2] T. Nishioka *Computational dynamic fracture mechanics*, International Journal of Fracture, 86, 127-159, 1997.
- [3] André, D., Iordanoff, I., Charles, J. L., Nauport, J. *Discrete element method to simulate continuous material by using the cohesive beam model.*, 213, 113-125, 2012.
- [4] Aoki, SHIGERU and Kishimoto, K and Sakata, M, *Finite element computation of dynamic stress intensity factor for a rapidly propagating crack using \hat{J} -integral*, Computational mechanics, 1987, 54-62, Springer