



**HAL**  
open science

## Essai sur l'hypothèse de Riemann

Yao Maxime Kayi

► **To cite this version:**

| Yao Maxime Kayi. Essai sur l'hypothèse de Riemann. 2019. hal-01923112v2

**HAL Id: hal-01923112**

**<https://hal.science/hal-01923112v2>**

Preprint submitted on 3 Jun 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

# Essai sur l'hypothèse de Riemann

Yao Maxime KAYI

## Résumé

On se propose de donner une démonstration de l'hypothèse de Riemann (HR) qui se base sur la définition de la fonction zêta dans la bande critique.

## Abstract

We propose to give a demonstration of the Riemann Hypothesis (RH) which is based on the definition of the zeta function in the critical band.

## 1 La fonction zêta

La fonction zêta de Riemann[2] se définit dans la bande critique pour un nombre complexe  $s$  tel que  $0 < R_e(s) < 1$  et  $I_m(s) \neq 0$ [1], par

$$\zeta(s) = s \int_0^{+\infty} \frac{[x] - x}{x^{1+s}} dx$$

D'après l'équation fonctionnelle<sup>1</sup> établie par Riemann et les propriétés des nombres complexes, on a la propriété suivante:

**Proposition 1** *Soit  $s$  un zéro non-trivial de la fonction zêta. Alors on a*

$$\zeta(s) = \zeta(\bar{s}) = \zeta(1 - s) = \zeta(1 - \bar{s}) = 0$$

## 2 Démonstration de HR

D'après l'équation fonctionnelle, la partie réelle des zéros non-triviaux de la fonction zêta sont compris entre 0 et 1. Considérons la fonction  $f$  définie

---

<sup>1</sup>7 méthodes pour trouver l'équation fonctionnelle sont exposées dans le livre de [1]

dans le plan complexe pour  $0 < R_e(s) < 1$ , par :

$$f(s) = \frac{\zeta(s)}{s} - \frac{\zeta(1-\bar{s})}{1-\bar{s}}$$

Pour  $s = \alpha + i\beta$ , et en notant  $u(\alpha, \beta)$  la partie réelle de  $f$  et  $v(\alpha, \beta)$  la partie imaginaire de  $f$  on trouve les expressions suivantes :

$$u(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} ([x] - x) \cos(\beta \ln x) (e^{-(1+\alpha)\ln x} - e^{-(2-\alpha)\ln x}) dx$$

$$v(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} ([x] - x) \sin(\beta \ln x) (e^{-(2-\alpha)\ln x} - e^{-(1+\alpha)\ln x}) dx$$

Soit  $z = a + ib$  un zéro non-trivial de zêta. Alors, d'après la *proposition 1*  $f(z) = 0$  et ainsi  $u(a, b) = v(a, b) = 0$ .

$$u(a, b) = 0 \iff \int_0^{+\infty} ([x] - x) \cos(\beta \ln x) (e^{-(1+a)\ln x} - e^{-(2-a)\ln x}) dx = 0$$

$u(a, b)$  étant fonction de  $a$  et de  $b$ , s'annule pour  $a = 1/2$  de même pour  $v(a, b)$ . A preuve contraire,  $f(z) = 0$  ne s'annule que si la partie réelle de  $z$  est égale à  $1/2$ . Or lorsque  $f$  s'annule,  $\zeta(s)$  et  $\zeta(1-\bar{s})$  s'annulent. On en vient alors à la proposition suivante

**Proposition 2** Soit  $s$  un zéro non-trivial de la fonction zêta. Si  $R_e(s) = 1/2$  alors  $\zeta(s) = \zeta(1-\bar{s}) = 0$

Avec une des propriétés de la fonction zêta,  $\zeta(\bar{s}) = \overline{\zeta(s)}$ , on obtient la proposition suivante:

**Proposition 3** Soit  $s$  un zéro non-trivial de la fonction zêta. Si  $R_e(s) = 1/2$  alors  $\zeta(s) = \zeta(\bar{s}) = \zeta(1-s) = \zeta(1-\bar{s}) = 0$

Ceci complète la preuve de l'hypothèse de Riemann. A moins qu'on ne trouve d'autres valeurs de  $a$  à part  $1/2$  qui annulent  $u(a, b)$ , l'hypothèse de Riemann est vraie.

## References

- [1] E. C. TITCHMARSH The Theory of the Riemann Zeta-Function *Second edition*, 13-14
- [2] Océane Borel Travail d'étude mathématique: La fonction zêta de Riemann