Étude d'un oscillateur de Duffing stochastique via la phase

Emmanuelle Sarrouy

▶ **To cite this version:**

Emmanuelle Sarrouy. Étude d'un oscillateur de Duffing stochastique via la phase. 13e colloque national en calcul des structures, Université Paris-Saclay, May 2017, Giens, Var, France. hal-01922521

HAL Id: hal-01922521
https://hal.science/hal-01922521

Submitted on 14 Nov 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

CSMA 2017
13ème Colloque National en Calcul des Structures
15-19 Mai 2017, Presqu'île de Giens (Var)

Étude d'un oscillateur de Duffing stochastique via la phase

E. Sarrouy[1]

[1]*Aix Marseille Univ, CNRS, Centrale Marseille, LMA, Marseille, France, emmanuelle.sarrouy@centrale-marseille.fr*

Résumé — On cherche ici à déterminer la fonction de réponse en fréquence d'un oscillateur de Duffing aux paramètres incertains en utilisant les outils classiques en dynamique des structures : HBM pour décrire les cycles limites et chaos polynomial pour décrire la variabilité de la réponse. La présence de points de retournements et donc la coexistence possible de plusieurs solutions sur certaines plages de fréquences rendent la tâche moins triviale qu'elle ne paraît en première approche. On propose pour traiter le problème, de paramétrer la fonction de réponse en fréquence par la phase de la réponse.
Mots clés — Dynamique, Non linéaire, Incertitudes.

1 Introduction

Ce travail est motivé par la volonté de pouvoir traiter des systèmes mécaniques dynamiques à la fois non linéaires et incertains. Plusieurs travaux de ce type existent déjà dans la littérature [5, 7] mais très peu traitent le cas de systèmes avec points de retournement tels que l'oscillateur de Duffing [9]. Cet oscillateur en régime forcé montre un effet raidissant (ou mollissant) qui amène à la coexistence de 3 solutions sur certaines plages de fréquence. Étudier la variabilité d'une solution devient alors un travail complexe tant sur le fond, la signification, que sur la forme, la paramétrisation des variations. Nous proposons ici une façon de "connecter" les différentes réalisations via la phase de la réponse du système.

2 Problème traité et équations proposées

2.1 Cas déterministe : HBM & continuation

Considérons l'oscillateur de Duffing suivant (adimensionné par sa masse) :

$$\ddot{q} + 2\zeta\varpi_0\dot{q} + \varpi_0^2 q + \beta q^3 = \Gamma\cos(\omega t) \tag{1}$$

avec $\varpi_0 = 2\pi$, $\zeta = 0.01$, $\beta = \varpi_0^2/8$ and $\Gamma = 1$. Ce système sera appelé système nominal ou système moyen.
Une façon de calculer la fonction de réponse en fréquence (FRF) d'un tel oscillateur est d'utiliser une balance harmonique [6] associée à une méthode de continuation. On décompose donc le déplacement q comme une somme de Fourier tronquée à l'ordre H

$$q(t) = \frac{a_0}{\sqrt{2}} + \sum_{k=1}^{H} a_k\cos(k\omega t) + b_k\sin(k\omega t)$$

Cette décomposition permet de paramétrer la réponse périodique $q(t)$ sur $[0, T = 2\pi/\omega]$ ainsi que ses dérivées temporelles en fonction des $2H+1$ nouvelles inconnues a_0, a_k, b_k. En réinjectant cette décomposition dans l'équation dynamique (1), puis en équilibrant les termes en $1/\sqrt{2}$, $\cos(k\omega t)$ et $\sin(k\omega t)$, on obtient un ensemble de $2H+1$ équations algébriques que l'on peut noter $H(\underline{x}, \omega) = \underline{0}$ en regroupant les coefficients a_0, a_k et b_k dans le vecteur $\underline{x}$. On est ainsi dans les conditions pour résoudre un système à $2H+2$ inconnues $\underline{x}$ et ω moyennant $2H+1$ équations via une méthode de continuation de type prédiction/correction [1] ou MAN [2, 3].
Si l'on utilise une décomposition assez pauvre à un seul harmonique et sans terme constant, on obtient le système

$$\begin{cases} (\varpi_0^2 - \omega^2)a_1 + 2\zeta\varpi_0\omega b_1 + (3/4)\beta a_1(a_1^2 + b_1^2) - \Gamma = 0 \\ (\varpi_0^2 - \omega^2)b_1 - 2\zeta\varpi_0\omega a_1 + (3/4)\beta b_1(a_1^2 + b_1^2) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

2.2 Cas stochastique : chaos polynomial & besoin d'équations supplémentaires

Supposons maintenant que les paramètres de l'oscillateur sont mal connus et que l'on en rende compte de façon probabiliste en les décrivant à l'aide d'une seule variable aléatoire ξ :

$$\varpi_0 = \overline{\varpi_0}(1+\Delta\varpi_0\,\xi),\ \zeta = \overline{\zeta}(1+\Delta\zeta\xi),\ \beta = \overline{\beta}+\Delta\beta\,\xi \tag{3}$$

On supposera, pour les simulations numériques, que ξ suit une loi uniforme sur $[-1,1]$ et que $\overline{\varpi_0} = 2\pi$, $\Delta\varpi_0 = 0.05$ $\zeta = 0.01$, $\Delta\zeta = -0.05$, $\beta = \overline{\varpi_0}^2/8$ et $\Delta\beta = \overline{\varpi_0}^2/5$ (on envisage donc des valeurs négatives possibles pour β).
Pour reconstituer l'ensemble des réponses possible, on peut calculer un grand nombre de FRF pour différentes réalisations de ξ, suivant ainsi une méthode de Monte Carlo qui peut s'avérer coûteuse et qui présente l'inconvénient de ne pas connecter entre elles les réponses pour les différentes réalisations. Une autre façon de faire est donc d'utiliser une méthode de chaos polynomial [10] pour représenter la variabilité de la réponse du système. On utilise donc une base ψ_d, $d = 0,\ldots,D$ de $D+1$ polynômes en ξ de degré inférieur ou égal D et orthogonaux entre eux par rapport au produit scalaire $<\bullet,\bullet>$. Le choix de la famille de polynôme est arbitraire mais peut s'appuyer sur la loi de la variable ξ ([11]). L'application immédiate du chaos polynomial au problème algébrique obtenu après HBM est de décomposer les variables a_0, a_k et b_k sur le chaos choisi en introduisant de nouveau coefficients :

$$a_0 = \sum_{d=0}^{D} a_{0,d}\psi_d(\xi),\ a_k = \sum_{d=0}^{D} a_{k,d}\psi_d(\xi),\ b_k = \sum_{d=0}^{D} b_{k,d}\psi_d(\xi)$$

On réinjecte ensuite ces décompositions dans l'équation algébrique $H(\underline{x},\omega) = \underline{0}$ que l'on projette sur chacun des polynômes de la famille choisie à l'aide du produit scalaire $<\bullet,\bullet>$. On obtient ainsi, dans le cas traité du Duffing, $(2H+1)\times(D+1)$ équations à résoudre pour trouver les $(2H+1)\times(D+1)$ inconnues $a_{0,d}$, $a_{k,d}$, $b_{k,d}$. Ceci permet formellement de décrire la variabilité des coefficients de la HBM pour une valeur de ω fixée. Le problème que l'on rencontre alors, c'est que dans le cas de l'oscillateur de Duffing, les solutions, à ω donné, ne font pas que varier en amplitude mais aussi en nombre, ce que l'on ne s'est pas donné les moyens de décrire ici.
Un moyen de contourner ce problème est de "libérer" la variable ω en lui donnant elle aussi la possibilité de varier via une décomposition sur le chaos :

$$\omega = \sum_{d=0}^{D} \omega_d\psi_d(\xi)$$

Ce faisant, on génère $D+1$ variables là où auparavant on en n'avait qu'une seule. Il faut donc ajouter des équations au problème pour pouvoir le résoudre. Idéalement, ces équations doivent permettre de ne pas décrire le même état du système ou, en d'autres termes, que la solution pour une réalisation (valeur de ξ) ne soit connectée qu'à une seule solution du système nominal et non plusieurs : ce que l'on souhaite réellement est décrire la variabilité de la FRF dans son entier. Deux points de la FRF du système nominal ne peuvent donc se retrouver connectés en un seul et même point de la FRF obtenue pour une autre réalisation (ou valeur de ξ). Ce cas "pathologique" est représenté en Figure 1 : deux points A et B de la FRF du système nominal suivent, lorsque ξ varie, les lignes L_A et L_B respectivement pour aboutir au même point C lorsque $\xi = 1$.

2.3 Proposition : paramétrisation par la phase

Nous proposons ici une équation simple ayant un sens physique dans le cas où le système n'est traité qu'à l'aide d'une seule harmonique. Dans ce cas précis, on peut, dans le cadre déterministe, ré-écrire le déplacement à l'aide d'une amplitude a et d'une phase (décalage temporel par rapport à l'excitation) ϕ :

$$q(t) = a\cos(\omega t+\phi),\ a \geq 0$$

Le système d'équations (2) devient alors

$$\begin{cases} (\varpi_0^2-\omega^2)a + (3/4)\beta a^3 - \Gamma\cos(\phi) = 0 \\ -2\zeta\varpi_0\omega a - \Gamma\sin(\phi) = 0 \end{cases} \tag{4}$$

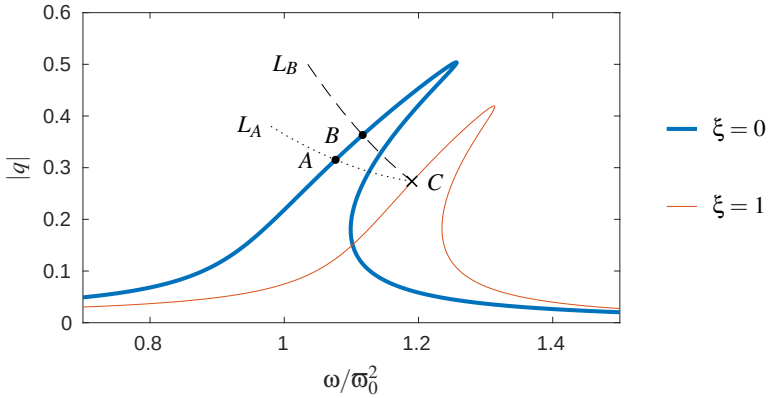

FIGURE 1 – Situation à éviter en choisissant les équations à ajouter dans le cas stochastique

L'idée du développement qui suit est similaire à celle développée dans [8] à savoir de ne pas lire ce système de deux équations et trois variables (a,ϕ,ω) dans le sens habituel – chercher le(s) couple(s) (a,ϕ) solution(s) pour une valeur de ω donnée – mais de chercher les couples (a,ω) solutions pour une valeur de ϕ donnée.
On peut extraire de ces deux équations une équation polynomiale de degré 2 en ω :

$$-\tan(\phi)\,\omega^2 + 2\zeta\varpi_0\,\omega + ((3/4)\beta a^2 + \varpi_0^2)\tan(\phi) = 0$$

qui admet pour solutions

$$\omega^+ = \zeta\varpi_0\cot(\phi) + \sqrt{(\zeta\varpi_0\cot(\phi))^2 + \varpi_0^2 + (3/4)\beta a^2} \geq 0$$

$$\omega^- = \zeta\varpi_0\cot(\phi) - \sqrt{(\zeta\varpi_0\cot(\phi))^2 + \varpi_0^2 + (3/4)\beta a^2} \leq 0$$

À toute valeur de $\phi \in [0,-\pi[$, on peut donc associer une et une seule pulsation ω positive. La seconde équation du système (4) permet enfin d'affirmer qu'à un couple de valeur (ϕ,ω) donné est associée une et une seule valeur d'amplitude a. En d'autres termes, à toute valeur de phase ϕ est associé un unique couple (a,ω) satisfaisant (4).
Enfin, on peut aisément affirmer que, pour $\phi = 0$, $\omega = 0$ et que lorsque $\phi \to +\infty$, $\omega \to +\infty$. Ainsi, lorsque l'on fait continûment varier ϕ de 0 à $-\pi$, on balaie la plage de fréquences $[0,+\infty[$ de façon univoque et l'on peut donc tracer la FRF complète du système (1) approchée par une méthode HBM à un seul harmonique.

Ceci revient à traiter le problème (4) d'inconnues (a,ϕ,ω) en ajoutant l'équation de contrainte

$$\phi = \phi_0 \tag{5}$$

où ϕ_0 est une valeur imposée au lieu de considérer comme on le fait usuellement l'équation de contrainte pour une valeur ω_0 donnée,

$$\omega = \omega_0. \tag{6}$$

La différence est d'importance lorsque l'on considère le cas stochastique. En effet, lorsque l'on considère le problème (4,6) (ou (2,6)), à pulsation ω_0 constante, on n'a pas unicité de la solution pour toutes les valeurs de ω_0. Ceci nous oblige par suite à décomposer les trois variables a, ϕ (ou b) et ω sur le chaos polynomial.
À l'inverse, on a unicité de la solution lorsque l'on considère le problème à phase constante (4,5). Il suffit donc de décomposer uniquement les deux variables restantes a et ω sur le chaos polynomial. Ceci génère $2(D+1)$ inconnues en face desquelles on écrit $2(D+1)$ équations correspondant aux projections du système (4) sur les $D+1$ polynômes ψ_d. On peut alors résoudre, par continuation, le problème paramétré par la phase ϕ

$$\tilde{H}(\underline{\tilde{x}},\phi) = \underline{0}$$

où $\underline{\tilde{x}}$ contient les coefficients a_d et ω_d du développement sur le chaos des variables a et ω.

3 Illustration

Une première illustration est l'allure des courbes de réponse lorsqu'elles sont représentées en fonction de ω, comme habituellement et représenté ici en Figure 2. On retrouve du côté de l'amplitude a, un pic raidissant générant une plage de fréquences pour laquelle trois solutions coexistent. On y lit aussi une variation de la phase ϕ qui décroît strictement de 0 à $-\pi$.

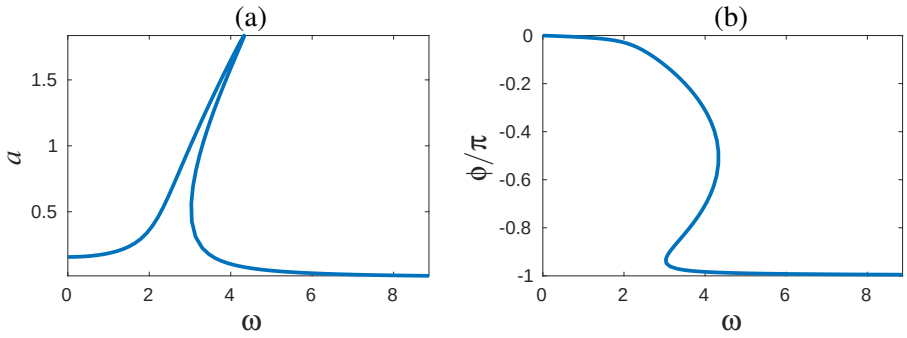

FIGURE 2 – Cas déterministe, système nominal – Tracé en fonction de la pulsation. (a) amplitude et (b) phase en fonction de la pulsation.

Pour s'approprier l'intérêt de la paramétrisation par la phase, on peut observer en Figure 3 qu'à chaque valeur de ϕ ne correspond bien qu'une et une seule valeur de a et de ω.

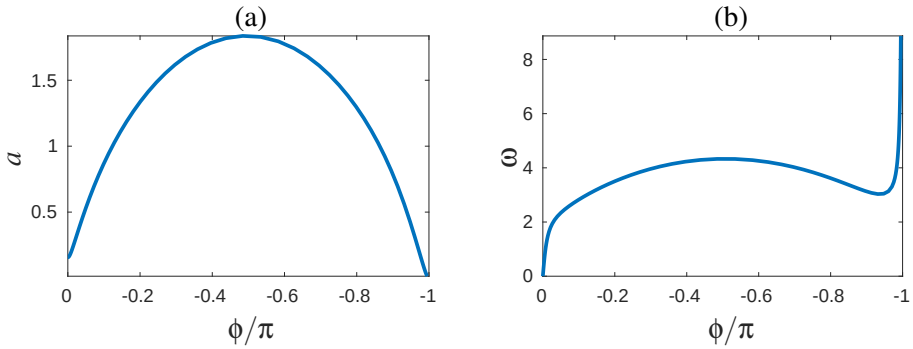

FIGURE 3 – Cas déterministe, système nominal – Tracé en fonction de la phase. (a) amplitude et (b) pulsation en fonction de la phase.

Lorsque l'on réalise l'expansion sur le chaos des variables a et ω avec un degré 6 en utilisant des polynômes de Legendre suivi d'une continuation sur le système résultant, on est à même de tracer les courbes représentées en Figure 4 pour une vision a vs ω habituelle et en Figure 5 pour une lecture en fonction de la phase ϕ.

Il est intéressant de noter que, paramétrées par la phase, il est possible de ne pas "mélanger" les solutions de différentes natures (avant le premier point de retournement, entre les deux points et après le deuxième point de retournement) ce qui peut être utile dans le cadre de l'ingénierie.

Une autre chose remarquable est la similitude des courbes obtenues en Figure 5 pour les différentes réalisations contrairement à l'apparente diversité de comportements affichée en Figure 4(a).

Enfin, possédant cette décomposition sur le chaos des variables a et ω, il est possible d'en reconstruire les distributions pour une valeur de phase donnée, par exemple, proche de $\phi_0 = -\pi/2$, qui correspond à la ligne de crête de la Figure 4. On obtient alors une idée de la statistique des maxima d'amplitude et de leur localisation en fréquence.

4 Discussion et conclusion

Les développements précédents ont démontré que la réponse en fréquence d'un oscillateur de Duffing traité avec un seul harmonique pouvait être paramétrée par la phase entre la réponse et l'excitation. Il en découle la possibilité de traiter cet oscillateur stochastique en développant les variables amplitude a et pulsation ω sur le chaos polynomial. Les illustrations ont donné un aperçu de l'intérêt d'une telle paramétrisation au niveau de l'usage des résultats.

Il reste néanmoins à généraliser cette approche au cas multi degrés de liberté et multi harmoniques. Ce travail de généralisation a été réalisé dans le cas de systèmes linéaires suite aux résultats embryonnaires sur 1 degré de liberté obtenus en [8].
Didier et al. [4] ont proposé une "équation de phase" (Eq. (40) du travail cité) dans le cas d'une HBM multi-fréquentielle qui revient, sur le principe, à l'approche proposée ici lorsqu'appliquée à l'oscillateur de Duffing. Il s'avère malheureusement que l'équation proposée ne donne pas pleine satisfaction dans le cas mono fréquentiel à plusieurs harmoniques.
L'objectif du travail proposé ici était de donner un sens physique à l'équation proposée d'une part et d'en justifier la pertinence (existence et unicité de la solution pour une valeur de ϕ donnée) d'autre part, en espérant que ces détails permettront une généralisation au cas multi-harmonique ultérieurement.

Références

[1] E. L. Allgower and K. Georg. *Introduction to Numerical Continuation Methods*. Springer-Verlag, 2003.

[2] B. Cochelin. *A path-following technique via an asymptotic-numerical method*. Computers & Structures, 53(5) :1181 – 1192, 1994. doi: 10.1016/0045-7949(94)90165-1.

[3] B. Cochelin and C. Vergez. *A high order purely frequency-based harmonic balance formulation for continuation of periodic solutions*. Journal of Sound and Vibration, 324(1-2) :243 – 262, 2009. doi: 10.1016/j.jsv.2009.01.054.

[4] J. Didier, J.-J. Sinou, and B. Faverjon. *Nonlinear vibrations of a mechanical system with non-regular nonlinearities and uncertainties*. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 18(11) :3250 – 3270, 2013. doi: 10.1016/j.cnsns.2013.03.005.

[5] J. Le Meitour, D. Lucor, and C. Jean-Camille. *Prediction of stochastic limit cycle oscillations using an adaptive polynomial chaos method*. Journal of Aeroelasticity and Structural Dynamics, Vol 2, No 1 (2010), 2(1) :3–22, 2010.

[6] E. Sarrouy and J.-J. Sinou. *Advances in Vibration Analysis Research*, chapter Non-Linear Periodic and Quasi-Periodic Vibrations in Mechanical Systems - On the use of the Harmonic Balance Methods, pages 419–434. InTech, F. Ebrahimi, editor, April 2011. doi: 10.5772/15638.

[7] E. Sarrouy, O. Dessombz, and J.-J. Sinou. *Piecewise polynomial chaos expansion with an application to brake squeal of a linear brake system*. Journal of Sound and Vibration, 332 :577–594, 2013. doi: 10.1016/j.jsv.2012.09.009.

[8] E. Sarrouy, E. Pagnacco, and E. Souza de Cursi. *A constant phase approach for the frequency response of stochastic linear oscillators*. Mechanics & Industry, 17(2) :206, 2016. doi: 10.1051/meca/2015057.

[9] K. Worden, G. Manson, T. Lord, and M. Friswell. *Some observations on uncertainty propagation through a simple nonlinear system*. Journal of Sound and Vibration, 288(3) :601 – 621, 2005. doi: 10.1016/j.jsv.2005.07.008.

[10] D. Xiu. *Numerical Methods for Stochastic Computations – A Spectral Method Approach*. Princeton University Press, 2010.

[11] D. Xiu and G. E. Karniadakis. *The wiener–askey polynomial chaos for stochastic differential equations*. SIAM Journal on Scientific Computing, 24(2) :619–644, 2002. doi: 10.1137/S1064827501387826.

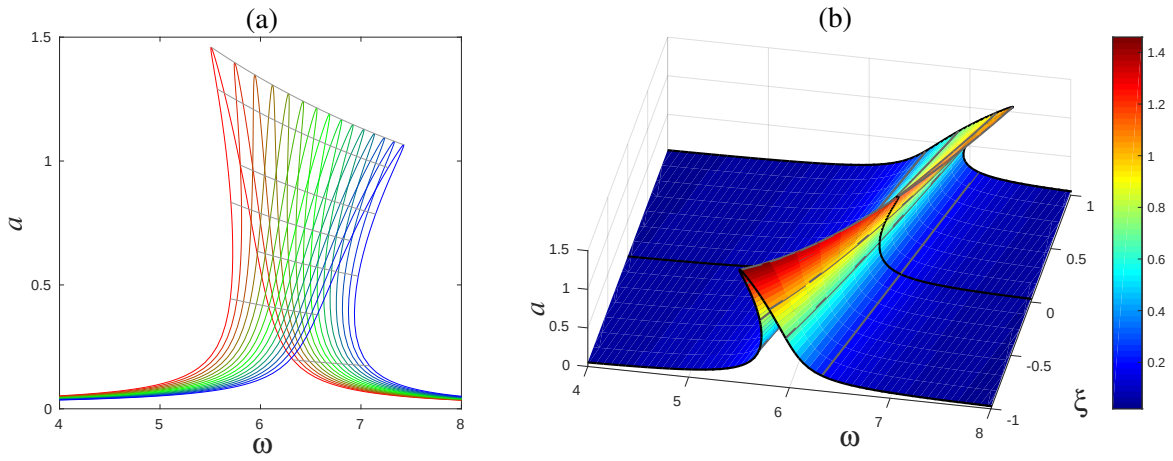

FIGURE 4 – Cas stochastique, paramétrisation par la phase, développement sur un chaos de degré 6 – Tracé de différentes réalisations. (a) vue 2D de a vs ω et (b) vue 3D. En (a) et (b), les lignes en gris représentent les courbes équi-phases (ϕ_0 donné, $\xi \in [-1,1]$). En (b), les courbes a vs ω ont été surlignées en noir pour $\xi \in \{-1,0,1\}$. L'affichage a été tronqué pour $\omega \in [4,8]$ pour une meilleure lisibilité.

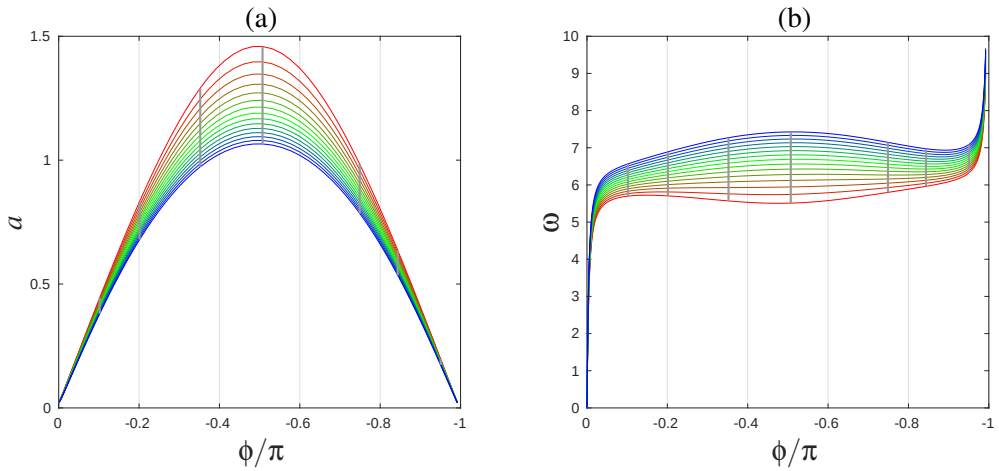

FIGURE 5 – Cas stochastique, paramétrisation par la phase, développement sur un chaos de degré 6 – Tracé de différentes réalisations. Vues 2D de (a) a vs ϕ et (b) ω vs ϕ. En (a) et (b), les lignes en gris représentent les courbes équi-phases (ϕ_0 donné, $\xi \in [-1,1]$).

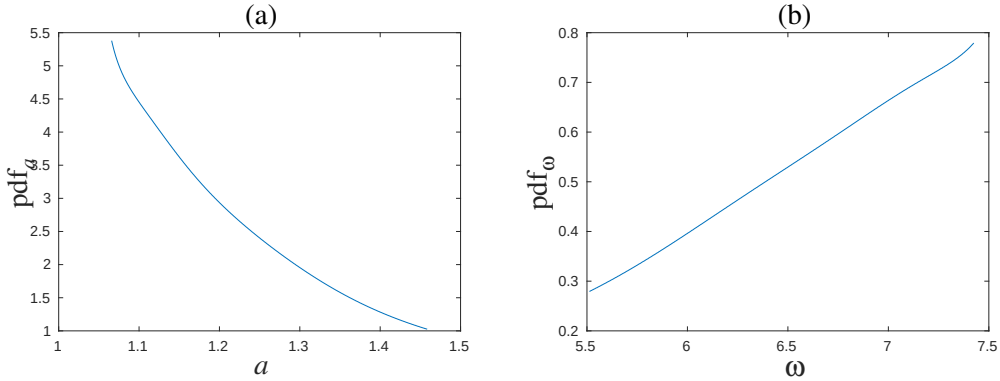

FIGURE 6 – Cas stochastique, paramétrisation par la phase, développement sur un chaos de degré 6 – Distributions de (a) a et (b) ω pour $\phi = -0.507\pi$.