



**HAL**  
open science

# Prédiction de la réponse vibro-acoustique de coques cylindriques revêtues immergées excitées par une onde plane

Maxime Dana, Laurent Maxit, Julien Bernard

► **To cite this version:**

Maxime Dana, Laurent Maxit, Julien Bernard. Prédiction de la réponse vibro-acoustique de coques cylindriques revêtues immergées excitées par une onde plane. CFA 2018, Apr 2018, Le Havre, France. hal-01922255

**HAL Id: hal-01922255**

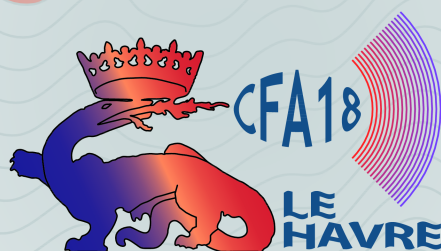
**<https://hal.science/hal-01922255>**

Submitted on 6 May 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**CFA '18 LE HAVRE ■ 23-27 avril 2018**  
**14<sup>ème</sup> Congrès Français d'Acoustique**



**Prédiction de la réponse vibro-acoustique de coques cylindriques  
revêtues immergées**

M. Dana<sup>a</sup>, L. Maxit<sup>a</sup> et J. Bernard<sup>b</sup>

<sup>a</sup>LVA (INSA Lyon), 25 bis av. Jean Capelle, 69621 Villeurbanne, France

<sup>b</sup>Thales Underwater Systems, 525 Route des Dolines, 06560 Valbonne, France

maxime.dana@insa-lyon.fr

Connaître précisément la réponse vibro-acoustique d'une coque de sous-marin est d'une importance cruciale pour l'architecte naval, mais également pour le concepteur des systèmes SONAR qui l'équiperont. Classiquement, un des enjeux du problème est de connaître la contribution au champ proche de pression dû à la vibration de la coque lorsque celle-ci est soumise à une excitation extérieure (onde plane, forces mécaniques). En connaissant la pression rayonnée par celle-ci au niveau des capteurs de l'antenne, il est en effet possible d'améliorer le rapport signal sur bruit de l'antenne SONAR en filtrant le bruit propre qu'elle génère. Les éléments finis se révèlent à cette fin coûteux en temps calcul, voire imprécis lorsqu'on modélise des structures multicouches comprenant des revêtements de matériaux basse célérité, pour lesquels la discrétisation importante de la structure conduit à des temps de calcul prohibitifs. De plus, l'étude de coques minces élastiques peut ne plus suffire pour nombre de problèmes, et il est important de savoir modéliser également des coques multicouches. Pour palier ces inconvénients, des méthodes spectrales ont été investiguées, on présentera parmi celles-ci deux méthodes complémentaires en termes de fonctionnalités, et validées numériquement dans le cas d'un cylindre multicouche excité par une onde plane.

## 1 Introduction

La prédiction du champ proche de pression d'une structure cylindrique multicouche soumise à une excitation par onde plane a été largement étudiée par plusieurs méthodes spectrales [1–5]. Elles reposent généralement sur le même principe : le problème relatif à chaque couche élémentaire est résolu dans un premier temps puis les solutions élémentaires sont assemblées pour représenter le comportement du multicouche. Deux méthodes sont présentées et évaluées dans cette étude : la première, inspirée des travaux de [1, 2], utilise une décomposition en potentiels du champ de déplacements dans la couche élémentaire et exprime les conditions de continuité aux interfaces du multicouche dans une matrice dite globale. Elle est limitée aux couches solides isotropes mais s'adapte bien à la résolution de structures comprenant des couches fluides intermédiaires.

Une deuxième méthode, inspirée des travaux de [3–5] consiste à réarranger les équations du mouvement et la loi de comportement pour une couche élémentaire solide en un système différentiel d'ordre 1, directement intégrable et permettant d'établir une matrice de transfert pour la couche élémentaire. La procédure d'assemblage du multicouche se fait ensuite en propageant le vecteur déplacements contraintes d'un bord à l'autre du multicouche à l'aide des différentes matrices de transfert élémentaires établies pour chaque couche.

On présente les principes de ces deux méthodes en mettant l'accent sur la prise en compte d'une couche fluide intermédiaire.

## 2 Méthodes spectrales de résolution du système multicouche

On considère une structure cylindrique multicouche telle que représenté à la figure 1 ; celle-ci est d'une part axisymétrique, et supposée infinie suivant son axe, ce qui justifie la forme de la transformée de Fourier (1) utilisée pour passer des champs physiques aux champs spectraux et inversement :

$$F(r, \phi, z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{in\phi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{F}(r, n, \alpha) e^{i\alpha z} d\alpha \quad (1)$$

$$\tilde{F}(r, n, \alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-in\phi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(r, \phi, z) e^{-i\alpha z} dz d\phi$$

Les couches seront supposées numérotées de 1 à  $N$ , le fluide intérieur comptant pour la couche 0, et le fluide extérieur pour la couche  $N + 1$ .

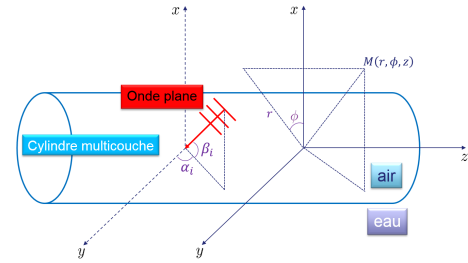


FIGURE 1 – Géométrie de la structure multicouche

### 2.1 Méthode 1 : Décomposition de Helmholtz et assemblage par matrice globale

On présente dans cette section une méthode qui résout le problème dans une couche élémentaire, fluide ou solide, en utilisant la décomposition de Helmholtz. L'assemblage est ensuite effectué par matrice globale.

#### 2.1.1 Cas de la couche élémentaire fluide

Pour une couche fluide, l'équation de Helmholtz acoustique vérifiée par la pression s'écrit :

$$(\nabla^2 + k^2) p(r, \phi, z) = 0, \quad k = \frac{\omega}{c_0} \quad (2)$$

Par séparation des variables, l'équation (2) admet pour solutions en coordonnées cylindriques des champs dont la dépendance radiale vérifie l'équation de Bessel, ce qui permet de déduire la forme générale du champ de pression spectral :

$$p(r, n, \alpha) = \rho \omega^2 (A_1 J_n(\gamma r) + A_2 H_n^1(\gamma r)) \quad (3)$$

avec :  $\gamma(\alpha) = \sqrt{k^2 - \alpha^2}$ ,

Le déplacement radial spectral dans le fluide est déduit à l'aide de la condition d'Euler, et on établit finalement une matrice fluide reliant les coefficients élémentaires de la décomposition du champ de pression  $(A_1, A_2)^T$  aux champs

spectraux de la pression et du déplacement normal :

$$\begin{pmatrix} u_r(r, n, \alpha) \\ \sigma_{rr}(r, n, \alpha) \end{pmatrix} = \mathbf{F}(r, n, \alpha) \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \quad (4)$$

avec :  $\mathbf{F}(r, n, \alpha) = \begin{pmatrix} \gamma J_n'(\gamma r) & \gamma H_n'(\gamma r) \\ -\rho\omega^2 J_n(\gamma r) & -\rho\omega^2 H_n(\gamma r) \end{pmatrix}$

### 2.1.2 Cas de la couche élémentaire solide

Dans le cas d'une couche élémentaire solide, on reprend le principe de décomposition de Helmholtz appliqué cette fois au champ de déplacements dans le solide, qui est décomposé en une somme de potentiels scalaire et vecteurs, respectivement associé aux ondes de compression et de cisaillement se propageant suivant l'axe de la coque [1, 2].

$$\vec{\mathbf{u}} = \nabla\phi + \nabla \times (\chi \hat{\mathbf{e}}_z) + \nabla \times \nabla (\psi \hat{\mathbf{e}}_z) \quad (5)$$

Ces trois potentiels sont alors solutions d'une équation de Helmholtz similaire à (2), pour les nombres d'onde de compression et de cisaillement de la couche considérée, à condition de supposer celle-ci isotrope ; leur forme générale s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \phi(r, n, \alpha) &= A_1 J_n(\gamma_l r) + A_2 H_n^1(\gamma_l r), \\ \chi(r, n, \alpha) &= A_3 J_n(\gamma_s r) + A_4 H_n^1(\gamma_s r), \\ \psi(r, n, \alpha) &= A_5 J_n(\gamma_s r) + A_6 H_n^1(\gamma_s r) \end{aligned} \quad (6)$$

avec :  $\gamma_l(\alpha) = \sqrt{k_l^2 - \alpha^2}$  et  $\gamma_s(\alpha) = \sqrt{k_s^2 - \alpha^2}$

où  $k_l$  et  $k_s$  sont respectivement les nombres d'onde de compression et de cisaillement, et les  $A_i$  ( $i \in \llbracket 1; 6 \rrbracket$ ) sont des constantes dans  $\mathbb{C}$

On peut alors établir de la même manière que pour la couche fluide élémentaire une matrice reliant les coefficients de décomposition  $(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6)^T$  aux déplacements et contraintes spectraux :

$$\begin{pmatrix} u_r(r, n, \alpha) \\ u_\phi(r, n, \alpha) \\ u_z(r, n, \alpha) \\ \sigma_{rr}(r, n, \alpha) \\ \sigma_{r\phi}(r, n, \alpha) \\ \sigma_{rz}(r, n, \alpha) \end{pmatrix} = \mathbf{B}(r, n, \alpha) \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \\ A_6 \end{pmatrix} \quad (7)$$

Les coefficients de la matrice  $\mathbf{B}(r, n, \alpha)$  sont issus de [1].

### 2.1.3 Assemblage par DGM (Direct Global Method)

L'assemblage du système multicouche est réalisé par matrice globale, méthode décrite dans [2] qui consiste à établir un système matriciel exprimant les conditions de continuité aux différentes interfaces du multicouche, ainsi que les conditions aux limites aux interfaces où l'excitation extérieure est appliquée, à partir des matrices fluide et solide élémentaire décrites en (4) et (7).

Dans le cas d'une interface solide-solide, il y a continuité des déplacements et du vecteur traction  $\vec{\mathbf{T}} = \vec{\sigma} \cdot \vec{\mathbf{n}}$ , tandis que pour une interface fluide-solide, seul le déplacement radial et la contrainte normale sont continus.

Ceci se traduit en fonction des matrices fluide et solide élémentaires de deux couches  $j$  et  $j + 1$  partageant l'interface  $j$  :

Interface solide-solide :

$$\bullet \mathbf{B}_{\text{int. } j}^j \begin{pmatrix} A_1^j \\ \vdots \\ A_6^j \end{pmatrix} - \mathbf{B}_{\text{int. } j}^{j+1} \begin{pmatrix} A_1^{j+1} \\ \vdots \\ A_6^{j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

Interface fluide-solide :

$$\bullet \mathbf{F}_{\text{int. } j}^j \begin{pmatrix} A_1^j \\ A_2^j \end{pmatrix} - \mathbf{B}_{\text{int. } j}^{j+1} ([1 \ 4, :]) \begin{pmatrix} A_1^{j+1} \\ \vdots \\ A_6^{j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$\bullet \mathbf{B}_{\text{int. } j}^{j+1} ([5 \ 6, :]) \begin{pmatrix} A_1^{j+1} \\ \vdots \\ A_6^{j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (10)$$

Les notations utilisées dans (8)-(10) sont à comprendre de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{\text{int. } j}^{j+1} &= \text{Matrice solide de la couche } j + 1 \text{ évaluée} \\ &\text{à la cote radiale } r_j \text{ de l'interface } j \\ &= \mathbf{B}^{j+1}(r_j, n, \alpha) \end{aligned}$$

Le même formalisme s'applique pour les matrices fluide, et on souligne que ces matrices dépendent de l'ordre circonférentiel  $n$  et du nombre d'onde  $\alpha$ .

Les équations (8)-(10) remplissent les lignes d'un système matriciel décrivant le multicouche dans son ensemble. L'assemblage se fait comme expliqué sur la figure 2, à partir de l'exemple d'une interface  $j$  solide-solide :

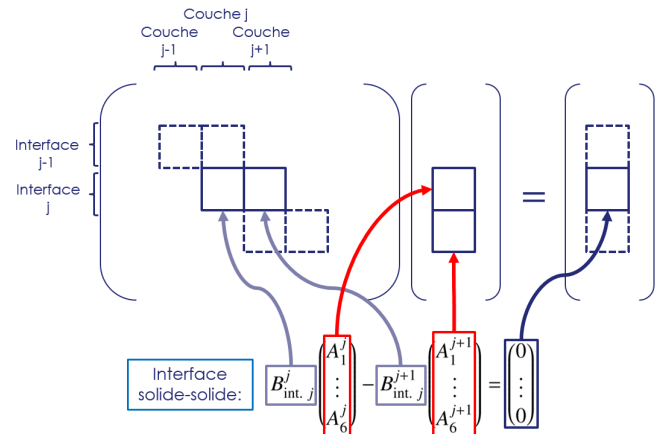


FIGURE 2 – Procédure d'assemblage (DGM)

## 2.2 Méthode 2 : Intégration directe et assemblage par matrices de transfert

La deuxième méthode présentée dans cette sous-section utilise pour décrire une couche élémentaire solide un principe d'intégration directe suivant la direction radiale, et l'assemblage des différentes couches se fait par matrices de transfert.

### 2.2.1 Intégration directe par méthode de Thomson

Pour résoudre le problème dans une couche solide élémentaire  $j$  quelconque, comprise entre les cotes radiales

$r_{j-1}$  et  $r_j$  et d'épaisseur  $h_j = r_j - r_{j-1}$ , les équations du mouvement et la loi de comportement sont réarrangées pour intégrer un système différentiel d'ordre 1 (cf [3]). Le vecteur d'état solution du système obtenu est constitué des déplacements-contraintes, et une fois exprimé dans le domaine spectral, on obtient :

$$\frac{d}{dr} \begin{pmatrix} u_z^j \\ u_\phi^j \\ u_r^j \\ \sigma_{rr}^j \\ \sigma_{r\phi}^j \\ \sigma_{rz}^j \end{pmatrix} (r, n, \alpha) = \mathbf{P}^j(r, n, \alpha) \begin{pmatrix} u_z^j \\ u_\phi^j \\ u_r^j \\ \sigma_{rr}^j \\ \sigma_{r\phi}^j \\ \sigma_{rz}^j \end{pmatrix} (r, n, \alpha) \quad (11)$$

Le détail de la matrice  $\mathbf{P}^j$  est donné en appendice [4].

En considérant la valeur de  $\mathbf{P}^j$  pour la valeur de  $r$  au milieu de la couche, le vecteur d'état déplacements-contraintes  $\mathbf{V}_n^j = (u_z^j, u_\phi^j, u_r^j, \sigma_{rr}^j, \sigma_{r\phi}^j, \sigma_{rz}^j)^T$  vérifiant (11) s'intègre de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_n^j(r_j, \alpha) &= \mathbf{T}_n^j \mathbf{V}_n^j(r_{j-1}, \alpha) \\ \text{avec :} & \\ \mathbf{T}_n^j &= \mathbf{T}^j(r_j, n, \alpha) = \exp[h_j \mathbf{P}^j(r_{j-1}, n, \alpha)] \end{aligned} \quad (12)$$

Pour supposer légitimement que  $\mathbf{P}^j(r, n, \alpha)$  puisse être approximé par sa valeur au milieu de la couche, une méthode retenue ici est de la subdiviser en  $p$  sous-couches suffisamment fines [4]. On établit alors les matrices de transfert pour chaque sous-couche, et la matrice de transfert pour la couche élémentaire en est déduite à partir de la méthode des matrices de transfert décrite au paragraphe suivant :

$$\mathbf{T}_n^j = \prod_{k=1}^p \mathbf{T}_n^k \quad (13)$$

À titre de remarque, on précise que dans le cas isotrope, on peut réutiliser la décomposition de Helmholtz et les matrices solide et fluide de 2.1 pour établir l'exponentielle matricielle présentée en (12). À un réarrangement près des composantes du vecteur d'état, la matrice  $\mathbf{T}^j$  s'exprime en effet comme suit, dans le cas d'une couche solide :

$$\mathbf{T}^j(r_j, n, \alpha) = \mathbf{B}^j(r_j, n, \alpha) \times [\mathbf{B}^j(r_{j-1}, n, \alpha)]^{-1} \quad (14)$$

Le même raisonnement peut s'appliquer avec les matrices fluide dans le cas d'une couche fluide, et est exploité en 2.3.2.

## 2.3 Assemblage par TMM (Transfer Matrix Method)

### 2.3.1 Principe général

La procédure d'assemblage est schématisé sur la figure 3.

La continuité des déplacements et contraintes aux interfaces solide-solide est traduite implicitement par le produit matriciel des différentes matrices de transfert de chaque couche, et on propage le vecteur d'état d'un bord à

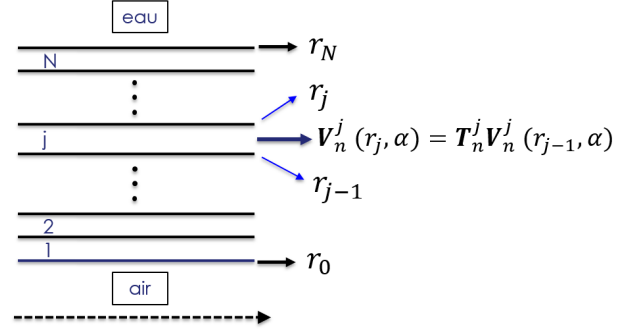


FIGURE 3 – Principe d'assemblage par matrices de transfert

l'autre du multicouche par la relation :

$$\mathbf{V}_n^N(r_N, \alpha) = \mathbf{T}_n \mathbf{V}_n^1(r_0, \alpha)$$

$$\mathbf{V}_n^N(r_N, \alpha) = \mathbf{T}_n \mathbf{V}_n^1(r_0, \alpha)$$

avec :

$$\mathbf{T}_n = \prod_{j=N}^1 \mathbf{T}_n^j \quad (15)$$

### 2.3.2 Cas d'une ou plusieurs couches fluide finies

On remarque que le produit matriciel impliqué dans (15) suppose une taille identique de chaque matrice élémentaire  $\mathbf{T}_n^j$ . Celle-ci est de taille 6 si la couche est solide, mais de taille 2 si la couche est fluide. On reprend en effet dans ce cas la forme établie en (4) aux cotes supérieure et inférieure de la couche élémentaire, pour éliminer les coefficients de la décomposition de Helmholtz et en déduire la matrice de transfert élémentaire de taille 2 suivante :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_r^j \\ \sigma_{rr}^j \end{pmatrix} \Big|_{r_j} &= \mathcal{T}_{flu}^j \begin{pmatrix} u_r^j \\ \sigma_{rr}^j \end{pmatrix} \Big|_{r_{j-1}} \\ \text{avec : } \mathcal{T}_{flu}^j &= \mathbf{F}_{|r_j}^j \times \left[ \mathbf{F}_{|r_{j-1}}^j \right]^{-1} \end{aligned} \quad (16)$$

Si la structure ne comporte pas de couches fluides intermédiaires, l'assemblage (15) s'applique directement sur les matrices élémentaires des couches solides.

Dans le cas contraire, la propagation du vecteur d'état n'étant assurée que pour le déplacement radial et la contrainte normale, l'assemblage ne peut se faire qu'après condensation des matrices solides aux mêmes degrés de liberté.

Dans ce cas, en voyant le multicouche comme l'alternance de groupes solides (constituées d'une ou plusieurs couches) et de couches fluides intermédiaires, la première étape préalable est d'établir les matrices de transfert pour chaque groupe solide par simple produit matriciel de chaque couche élémentaire présente dans un groupe donné. L'étape de condensation qui suit s'effectue en considérant un groupe solide quelconque  $g$  entouré de deux couches fluides finies. On commence par écrire le problème non condensé en prenant en compte la nullité des contraintes

de cisaillement en haut et en bas du groupe solide :

$$\begin{pmatrix} u_z^g \\ u_\phi^g \\ u_r^g \\ \sigma_{rr}^g \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{|r_{sup}^g} = \begin{pmatrix} T_{11}^g & T_{12}^g & T_{13}^g \\ T_{21}^g & T_{22}^g & T_{23}^g \\ T_{31}^g & T_{32}^g & T_{33}^g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_z^g \\ u_\phi^g \\ u_r^g \\ \sigma_{rr}^g \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{|r_{inf}^g} \quad (17)$$

D'où on déduit les relations suivantes :

$$\begin{pmatrix} u_r^g \\ \sigma_{rr}^g \end{pmatrix}_{|r_{sup}^g} = T_{21}^g \begin{pmatrix} u_z^g \\ u_\phi^g \end{pmatrix}_{|r_{inf}^g} + T_{22}^g \begin{pmatrix} u_r^g \\ \sigma_{rr}^g \end{pmatrix}_{|r_{inf}^g} \quad (18)$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = T_{31}^g \begin{pmatrix} u_z^g \\ u_\phi^g \end{pmatrix}_{|r_{inf}^g} + T_{32}^g \begin{pmatrix} u_r^g \\ \sigma_{rr}^g \end{pmatrix}_{|r_{inf}^g}$$

On établit ainsi une expression pour les déplacements longitudinaux et orthoradiaux :

$$\begin{pmatrix} u_z^g \\ u_\phi^g \end{pmatrix}_{|r_{inf}^g} = -T_{31}^{g-1} T_{32}^g \begin{pmatrix} u_r^g \\ \sigma_{rr}^g \end{pmatrix}_{|r_{inf}^g} \quad (19)$$

Cette dernière relation permet de trouver une matrice de transfert entre le vecteur d'état réduit aux degrés de libertés  $u_r$  et  $\sigma_{rr}$  aux cotes supérieure et inférieure du groupe solide :

$$\begin{pmatrix} u_r^j \\ \sigma_{rr}^j \end{pmatrix}_{|r_j} = \mathcal{T}_{sol}^j \begin{pmatrix} u_r^j \\ \sigma_{rr}^j \end{pmatrix}_{|r_{j-1}} \quad (20)$$

avec :  $\mathcal{T}_{sol}^j = [T_{22}^g - T_{21}^g T_{31}^{g-1} T_{32}^g]$

On voit que la prise en compte de couches fluides intermédiaires dans cette méthode nécessite une condensation de toutes les matrices, contrairement à la méthode 1 qui gère un multicouche uniquement solide ou comportant des couches fluides finies de manière identique. Cette condensation du système complique la résolution numérique et conduit à une instabilité décrite en

### 3 Excitation par onde plane : implémentation des conditions aux limites

On considère une excitation par onde plane incidente, les conditions aux limites expriment donc la continuité de la contrainte normale avec les pressions des fluides interne et externe aux deux interfaces extrémales du multicouche, ainsi que la nullité des contraintes de cisaillement aux mêmes cotes, car les fluides sont supposés parfaits.

L'excitation par onde plane a pour conséquence que la réponse du système ne fait intervenir qu'un seul nombre d'onde du domaine spectral, à savoir le nombre d'onde incident projeté suivant l'axe de la coque, noté  $k_z^i$ . L'angle des coordonnées cylindriques de ce nombre d'onde est noté  $\phi_i$ . Exprimé au rayon extérieur, suite à des calculs non détaillés dans cet article, les pressions spectrales dans les

fluides interne et externe s'expriment :

$$\begin{cases} P_{tot}^{ext}(r_N, n, k_z^i) = -2\pi \frac{2p_0(-i)^{n+1}}{\pi\gamma_l^0(k_z^i)r_N H_n'(\gamma_l^0(k_z^i)r_N)} e^{-in\phi_i} \\ \quad + \frac{\rho_{eau}\omega^2 H_n(\gamma_l^0(k_z^i)r_N)}{\gamma_l^0(k_z^i) H_n'(\gamma_l^0(k_z^i)r_N)} u_r(r_N, n, k_z^i) \\ P_{int}(r_0, n, k_z^i) = \frac{\rho_{air}\omega^2 J_n(\gamma_l^0(k_z^i)r_0)}{\gamma_l^0(k_z^i) J_n'(\gamma_l^0(k_z^i)r_0)} u_r(r_0, n, k_z^i) \end{cases} \quad (21)$$

On détaille brièvement ici la manière de les implémenter pour les deux méthodes.

#### 3.1 Méthode 1 : implémentation numérique

Dans le cas de la méthode 1, il convient de rajouter deux lignes supplémentaires au système de la figure 2 portant sur les coefficients élémentaires des couches 0 et N, l'une exprimant la condition de non réflexion dans le fluide interne, et l'autre traduisant l'excitation par onde plane.

En repartant de l'expression (3), on obtient finalement :

$$A_2^0 = 0 \quad (22)$$

$$A_1^N = 2\pi \frac{p_0}{\rho\omega^2} (-i)^n e^{-in\phi_i} \quad (23)$$

#### 3.2 Méthode 2 : implémentation numérique

Dans le cas de la méthode 2, on ferme le système (15) évalué au nombre d'onde incident de l'onde plane à l'aide des relations suivantes :

$$\begin{cases} \sigma_{rr}^N(r_N, n, k_z^i) = -P_{tot}^{ext}(r_N, n, k_z^i) \\ \sigma_{rr}^1(r_0, n, k_z^i) = P_{int}(r_0, n, k_z^i) \\ \sigma_{r\phi}^N(r_N, n, k_z^i) = \sigma_{r_z}^N(r_N, n, k_z^i) = 0 \\ \sigma_{r\phi}^1(r_0, n, k_z^i) = \sigma_{r_z}^1(r_0, n, k_z^i) = 0 \end{cases} \quad (24)$$

## 4 Validation numérique

Dans cette section, on compare les deux méthodes en étudiant 4 configurations de coque différente. La validation est faite en comparant les résultats d'une part sur des calculs éléments finis effectués sur les mêmes configurations, et d'autre part avec un code déjà validé qui considère la structure plane, et néglige la courbure de la coque.

Sur la figure 1 était représentée la coque multicouche et l'onde plane incidente, repérée dans le plan site  $\beta_i$ -gisement  $\alpha_i$ , ci-dessous sont explicitées les 4 configurations de revêtements étudiées :

#### 4.1 Configurations étudiées

On valide les deux méthodes sur le cas d'une coque d'acier dans 4 configurations différentes qui incluent par-dessus les matériaux énumérés une couche fluide d'eau finie et un composite verre-résine :

1. laissée nue
2. recouverte d'une matrice de polyuréthane
3. recouverte d'un matériau anéchoïque puis d'une matrice de polyuréthane

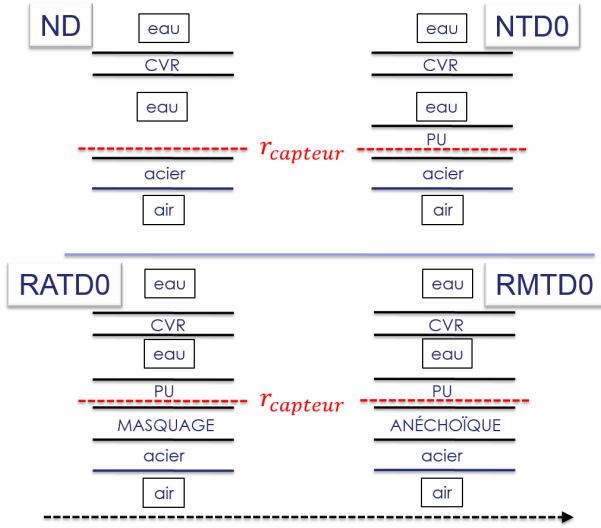


FIGURE 4 – Configurations étudiées

4. recouverte d'un matériau de masquage puis d'une matrice de polyuréthane

Le capteur est ponctuel, placé à la position (0, 0) dans le plan site-gisement, et enfoui dans la matrice de polyuréthane, hormis dans la première configuration où il se trouve dans la couche d'eau finie.

La réponse signal tracée sur les graphes qui suivent est calculée de la façon suivante :

- Si le capteur est enfoui dans le fluide :

$$\Delta S h_{dB}(\alpha_i, \beta_i, f) = 20 \times \log_{10} \left| \frac{P_{tot}(\alpha_i, \beta_i, f)}{P_i(\alpha_i, \beta_i, f)} \right| \quad (25)$$

avec :  $P_{tot} = -\sigma_{rr}$  (26)

- Si le capteur est enfoui dans le solide :

$$\Delta S h_{dB}(\alpha_i, \beta_i, f) = 20 \times \log_{10} \left| \frac{\sigma_{rr}(\alpha_i, \beta_i, f)}{P_i(\alpha_i, \beta_i, f)} \right| \quad (27)$$

Le tableau (1) regroupe les propriétés des différents matériaux utilisés :

TABLEAU 1 – Propriétés matériaux

Matériau	Acier	PU	anéch.	masq.	eau	CVR
$C_p$ (m.s <sup>-1</sup> )	6020	1600	900	300	1500	3000
$C_s$ (m.s <sup>-1</sup> )	3220	150	150	100	0	2000
$\rho$ (kg.m <sup>-3</sup> )	7800	1100	1400	1100	1000	2000
$\frac{Z}{Z_{eau}}$	31	1,17	0,84	0,22		4

Le matériau polyuréthane (PU) est utilisé pour ses qualités de transparence du fait de son impédance adaptée avec l'eau et de son faible amortissement en compression, limitant les réflexions à sa surface d'une onde incidente. Le matériau anéchoïque est recherché pour ses capacités absorbantes obtenues grâce au fort amortissement en compression, tandis que le matériau de masquage permet un découplage mécanique vis-à-vis des vibrations de coque.

## 4.2 Étude de la réponse signal

### 4.2.1 Cas de l'incidence normale

En figure 5 est représentée la réponse signal pour chacune des configurations en incidence normale, avec une seule sous-couche de subdivision choisie pour la méthode d'intégration « TMM Thomson ».

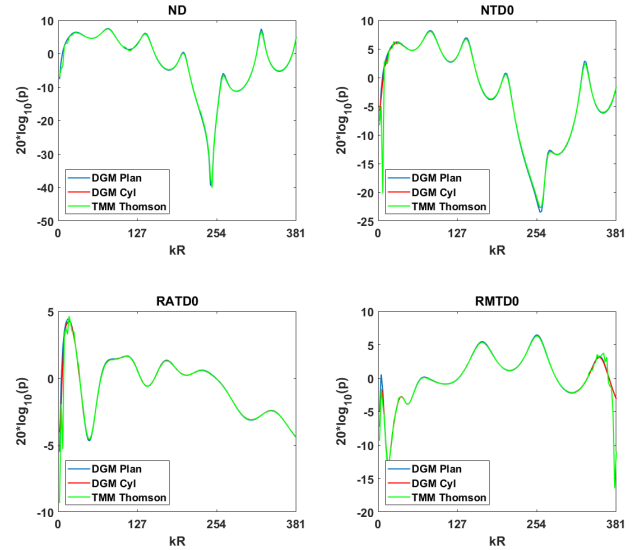


FIGURE 5 – Incidence normale

La prise en compte d'une couche fluide intermédiaire d'épaisseur finie ajoutée à la réponse signal différentes résonances dont les fréquences correspondent aux modes stationnaires piégés dans la lame d'eau.

### 4.2.2 Cas de l'incidence oblique

Par ailleurs, on remarque que les réponses s'écartent très peu en incidence normale du modèle plan, mais une étude en incidence oblique montre l'intérêt du développement d'un code adapté à la géométrie cylindrique des sous-marins :

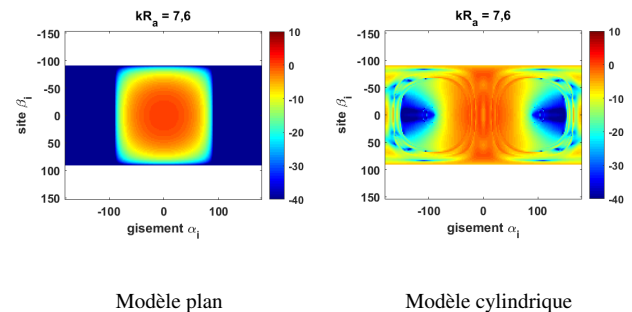


FIGURE 6 – Incidence oblique

Avec le modèle plan, la réponse calculée aux incidences gisement supérieures à 90° n'est pas pertinente (onde incidente provenant de l'intérieur de la coque). Elle est donc arbitrairement fixée à 0. Avec le modèle cylindrique en revanche, les effets de diffraction rigide et élastique de la coque sont correctement capturés et permettent de

caractériser la réponse basse fréquence aux incidences arrières.

Numériquement, on constate d'abord que la méthode 2 est moins précise que la méthode 1 à prédire la réponse, ce qui s'explique par le fait qu'on a considéré des configurations comprenant une lame d'eau intermédiaire. Le phénomène de condensation conduit aux instabilités observées en basses fréquences, qui s'accroissent également aux plus hautes fréquences lorsqu'on considère une incidence oblique pour l'onde plane :

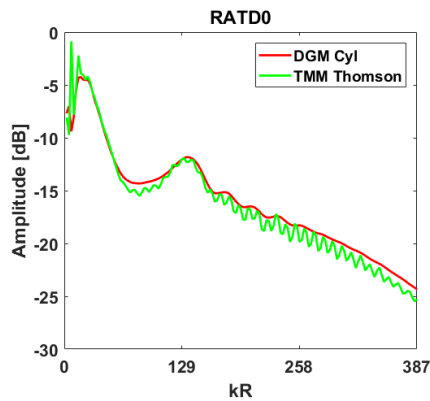


FIGURE 7 – Gisement-0°, Site-90°

On constate ici la difficulté de prendre en compte une couche de fluide intermédiaire dans le cas de la méthode 2.

### 4.3 Comparaison du temps calcul

Un tableau récapitule le temps calcul relatif entre les deux méthodes sur chacune des configurations :

TABLEAU 2 – Temps calcul pour les deux méthodes

Méthode \ Config	ND	NTD0	RATD0	RMTD0
Bessel + DGM	1	1,25	1,33	1,42
Thomson (1 ss-cc) + TMM	2,25	4,17	4,83	5,08

Lors de travaux antérieurs, ces deux méthodes avaient été confrontées à un calcul éléments finis 3D pour les mêmes configurations sans la couche fluide intermédiaire prise en compte ici [6].

Cela avait permis de valider numériquement les deux méthodes présentées dans le présent article, ainsi que de constater un gain considérable en termes de coût numérique pour chacune d'entre elles par rapport à une méthode classique éléments finis.

## 5 Conclusion

Dans ce papier nous proposons deux méthodes numériques spectrales permettant de caractériser le comportement vibro-acoustique d'une coque multicouche revêtue par un nombre arbitraire de couches, qui peuvent être solides ou fluides. Chacune de ces deux méthodes se montre compétitive par rapport à un calcul éléments finis classique, malgré la mise en évidence pour la deuxième méthode d'une plus grande difficulté à converger numériquement aux basses fréquences ou en incidence oblique dans le cas d'une couche d'eau intermédiaire. Ceci est dû à la condensation des matrices de transfert utilisées qui conduit à une instabilité numérique.

Sans couche fluide finie introduite dans les configurations étudiées, et donc sans condensation du système concernant la deuxième méthode, celle-ci ne présente plus d'instabilité numérique et présente l'avantage contrairement à la première méthode de pouvoir prendre en compte des couches solides anisotropes. Les deux méthodes présentées coïncident alors et ont été validées pour le même cas d'excitation, en incidence variable, et sur une grande plage fréquentielle.

## Références

- [1] E.A. Skelton, J.H. James, *Theoretical acoustics of underwater structures*, Imperial College Press (1997).
- [2] D.C. Ricks, H. Schmidt, A numerically stable global matrix method for cylindrically layered shells excited by ring forces, *J. Acoust. Soc. Am.*, **95** (6), 3339-3349 (1994).
- [3] J.R. Fan, Exact theory of strongly thick laminated plates and shells, *Beijing : Science Press* (1996).
- [4] W.Q. Chen, Z.G. Bian, H.J. Ding, Three-dimensional vibration analysis of fluid-filled orthotropic FGM cylindrical shells, *International Journal of Mechanical Sciences* **46**, 159-171 (2004).
- [5] C. Dutrion, *Étude de faisabilité d'un revêtement élastique pour la furtivité acoustique*, thèse de doctorat-Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace (ISAE) (2014).
- [6] M. Dana, Modélisation numérique de structures cylindriques multicouches excitées par une onde plane : comparaison de différentes méthodes, 5<sup>ème</sup> édition des Journées Acoustique et Applications Navales (JAAN2017), Ollioules, 26-27 octobre 2017.