



**HAL**  
open science

## Méthode multigrille dédiée à la dynamique transitoire non-linéaire

Ewen Biotteau, Anthony Gravouil, Antonius Lubrecht, Alain Combescure

► **To cite this version:**

Ewen Biotteau, Anthony Gravouil, Antonius Lubrecht, Alain Combescure. Méthode multigrille dédiée à la dynamique transitoire non-linéaire. 9e colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2009, Giens, France. hal-01911087

**HAL Id: hal-01911087**

**<https://hal.science/hal-01911087v1>**

Submitted on 2 Nov 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Méthode multigrille dédiée à la dynamique transitoire non linéaire

E. Biotteau<sup>1</sup>, A. Gravouil<sup>1</sup>, A.A. Lubrecht<sup>1</sup>, A. Combescure<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Université de Lyon, CNRS, INSA Lyon

LaMCoS - UMR 5259

F-69621, Villeurbanne

{ewen.biotteau, anthony.gravouil, ton.lubrecht, alain.combescure}@insa-lyon.fr

---

**Résumé** — Cette contribution propose un solveur éléments finis dédié aux problèmes non linéaires en dynamique transitoire. La résolution s’appuie sur une stratégie multi-niveaux utilisant une méthode de raffinement automatique. À partir d’un maillage espace-temps grossier, la fiabilité des résultats est contrôlée au moyen d’un indicateur d’erreur et les zones où la précision requise n’est pas atteinte sont sous-découpées hiérarchiquement de manière récursive afin d’obtenir un maillage en espace et en temps optimal.

**Mots clés** — Dynamique transitoire, raffinement de maillage, multigrilles, non linéarités.

---

## 1 Introduction

La méthode des éléments finis est l’outil de référence utilisé pour la simulation numérique en ingénierie mécanique. La part grandissante des maquettes informatiques dans la conception industrielle d’un produit oblige les ingénieurs à utiliser des modèles de plus en plus complexes afin de prendre en compte les phénomènes transitoires et les non linéarités éventuelles assurant la pertinence du résultat calculé.

Néanmoins, il est aujourd’hui difficile de définir, a priori, la finesse des maillages en espace et en temps minimisant l’erreur de discrétisation vis-à-vis de l’erreur de modélisation. Les maillages contiennent donc couramment un nombre important de degrés de liberté en espace et en temps. L’utilisation de solveurs classiques pour de telles simulations peut conduire à des temps de calcul prohibitifs et ce malgré l’augmentation importante des capacités informatiques.

Le développement de solveurs performants dédiés à la résolution de ces modèles numériques est donc une problématique de recherche industrielle importante. Idéalement, ces solveurs doivent optimiser les discrétisations spatio-temporelles et maîtriser les erreurs numériques liées à la résolution. Dans le cas des solveurs itératifs, une amélioration de la vitesse de convergence peut également apporter un gain substantiel en terme de temps de calcul. Diverses approches ont déjà été envisagées afin de répondre à ces problématiques et diminuer le coup numérique de telles simulations.

La quantification des erreurs constitue un champ de recherche à part entière permettant d’assurer la qualité de la solution à moindre coût. Les estimateurs d’erreur [7], [12] s’intéressent à la quantification a posteriori de l’écart entre la solution exacte et la solution discrétisée. Moins coûteux, les indicateurs d’erreurs mesurent la pertinence d’un calcul en traduisant la comparaison de la solution sur deux maillages.

Les solveurs multigrilles [1] ont été étendus à la modélisation en mécanique des solides [9] et développés pour la modélisation de phénomènes non linéaires [4]. Ils permettent de compenser les propriétés de lissage des solveurs itératifs et d'améliorer leur vitesse de convergence. Pour des problèmes idéaux, et par le choix de paramètres adéquates [6], les solveurs multigrilles présentent une complexité en  $O(n)$  dans le cas linéaire.

Les méthodes multigrilles ont depuis été utilisées dans de nombreuses contributions visant à améliorer le coût numérique de simulations éléments finis. L'optimisation de la discrétisation spatiale est entre autre traitée par Ekevid [3] qui propose une stratégie de raffinement spatial de maillage dans le cadre de la quasi statique non linéaire. Dans [5] Gravouil s'inspire des méthodes multigrilles et propose une méthode de décomposition de domaine permettant d'adapter les discrétisations spatio-temporelles.

Cette contribution s'inscrit dans la continuité des travaux sur la "STAR-method" (Space Time Automatic Refinement) [2] qui permet de minimiser le temps de calcul en optimisant le maillage pour satisfaire une précision donnée. Cavin résout des problèmes en dynamique transitoire linéaire en s'appuyant sur des domaines espace-temps. Au moyen d'un indicateur d'erreur, la méthode identifie de manière récursive les zones où la discrétisation spatiale et temporelle est insuffisante pour satisfaire la précision demandée. De nouveaux éléments espace-temps sont alors créés de manière hiérarchique (cf. figure 1) et le problème est résolu sur ce nouveau maillage.

Lorsque le système présente des non linéarités, cette stratégie n'est plus adaptée. En effet, l'apparition locale d'une non linéarité peut avoir des effets globaux sur l'équilibre de la structure et la résolution doit alors s'effectuer en passant successivement entre les maillages fins et grossiers. Les méthodes multigrilles permettent d'adapter le concept de Cavin au cas non linéaire.

## 2 Raffinement local espace-temps : Cas linéaire

### 2.1 Principe de la STAR-Method

Par la suite, on notera  $X = \{\underline{U}, \underline{\dot{U}}, \underline{\ddot{U}}\}$  le vecteur d'état solution du problème d'évolution et  $\Omega_{t_m}^j e_i^j$  l'élément espace-temps relatif à l'élément fini  $i$  de niveau  $j$  entre les instants  $t_m$  et  $t_{m+1}$  du domaine espace-temps complet  $\Omega_t$ .

Dans la "STAR-method", le maillage espace-temps de niveau  $j+1$  est hiérarchique au niveau  $j$ . La figure 1 présente la construction des éléments espace-temps enfants. Le domaine  $\Omega_{t_m}^j e_i^j$  est constitué de deux instants et d'un élément fini. La construction des sous-domaines enfants de niveau  $j+1$  s'effectue en sous découpant l'intervalle de temps et les éléments finis en 2.

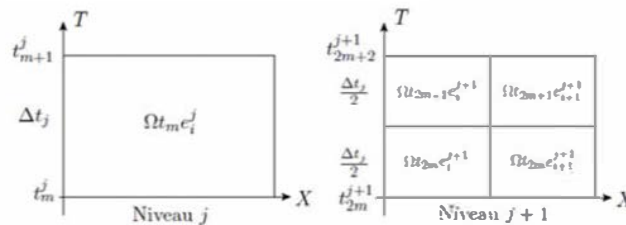


Figure 1 – Diagramme espace-temps élémentaire - Cas linéaire

Pour initialiser le processus, les solutions sur les domaines discrétisés complets  $\Omega t^1$  et  $\Omega t^2$  sont recherchées. Ces deux domaines couvrent l'intégralité du domaine espace-temps  $\Omega t$  à l'erreur de discrétisation près. De manière récursive depuis  $k = 2$ , les solutions  $X^{k-1}$  et  $X^k$  sont comparées au moyen d'un indicateur d'erreur afin de déterminer les zones où la précision demandée n'est pas atteinte. De nouveaux éléments espace-temps sont créés dans ces zones, hiérarchiques aux

éléments de  $\Omega t^k$ , et forment le domaine  $\Omega t^{k+1}$ . En appliquant des conditions aux limites adéquates sur  $\partial\Omega t^{k+1}$ , gouvernées par la conservation des efforts de liaisons à l'interface, la solution  $\chi^{k+1}$  est déterminée. Le processus est ainsi répété jusqu'à ce que l'indicateur d'erreur soit satisfait sur l'ensemble du domaine  $\Omega t$ .

La "STAR-method" présente l'avantage de ne pas nécessiter d'algorithme de déraffinement spécifique. La stratégie construit automatiquement le maillage spatio-temporel respectant le critère choisi par l'utilisateur. Les seuls paramètres d'entrée sont le maillage spatio-temporel initial et le critère d'arrêt.

## 2.2 Résultats numériques

La figure 2 représente une poutre en traction de section  $s = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$  et de longueur  $L = 1 \text{ m}$ . Les caractéristiques matériaux correspondent à un acier ( $E = 210 \cdot 10^9 \text{ Pa}$ ,  $\rho = 7800 \text{ kg.m}^{-2}$ ,  $\nu = 0.3$ ). Cette poutre est soumise au chargement  $f(t)$ .

$$f(t) = \begin{cases} F \cdot \left(1 + \sin\left(-\frac{\pi}{2} + \pi \cdot 10^4 \cdot t\right)\right) & \text{si } t < 10^{-4} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \text{ avec } F = 1.1 \cdot 10^8 \text{ N}$$

Le temps de simulation est de 1.54ms et le schéma de l'accélération moyenne est utilisé. L'indicateur d'erreur est décrit par l'équation 1. La projection de l'énergie du niveau  $j + 1$  vers le niveau  $j$  s'effectue suivant (2) avec  $\mathbb{I}_{j+1}^j$  le projecteur du niveau  $j + 1$  vers le niveau  $j$ .

$$P^j = \sqrt{\frac{|\tilde{e}^j - e^j|}{\max_{\Omega^j}(e^j)}} \quad (1)$$

$$\tilde{e}^j = \frac{1}{2} \left( \mathbb{I}_{j+1}^j \underline{\dot{u}}^{j+1} \right) \mathbf{M} \left( \mathbb{I}_{j+1}^j \underline{\dot{u}}^{j+1} \right) + \frac{1}{2} \left( \mathbb{I}_{j+1}^j \underline{\dot{u}}^{j+1} \right) \mathbf{K} \left( \mathbb{I}_{j+1}^j \underline{\dot{u}}^{j+1} \right) \quad (2)$$

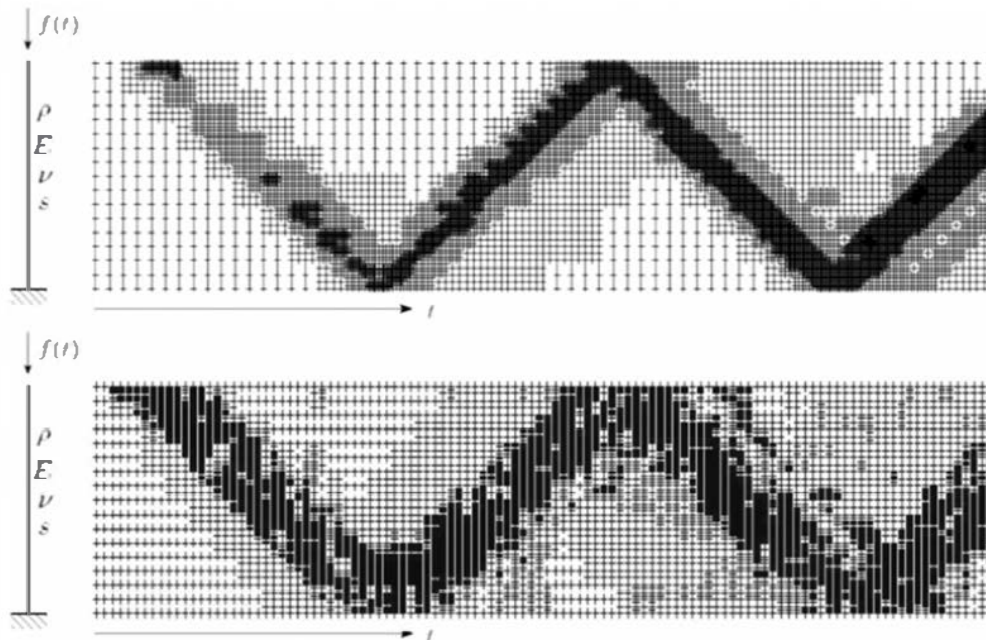


Figure 2 – Sollicitation d'une poutre en traction - STAR-method et Raffinement spatial - Cas linéaire

La première figure présente les résultats obtenus en utilisant des éléments espace-temps et la STAR méthode. La seconde montre une technique de raffinement spatial travaillant avec un

indicateur d'erreur en énergie à chaque piquet de temps. Dans les deux cas, la stratégie de raffinement permet d'obtenir un maillage spatial fin suivant la propagation du front d'onde au sein de la poutre. L'élargissement de la zone raffinée provient des erreurs cumulatives introduites par le schéma d'intégration temporel. La comparaison de ces deux diagrammes espace-temps présente l'intérêt de la stratégie espace-temps retenue.

### 3 Raffinement local en espace : Cas non linéaire

#### 3.1 Principe de la méthode

Dans un premier temps, seul le raffinement spatial du maillage est envisagé. La stratégie de raffinement hiérarchique peut être représentée dans un diagramme espace-temps (cf. figure 3) et des indicateurs d'erreurs équivalents à ceux utilisés dans [2] peuvent être utilisés.

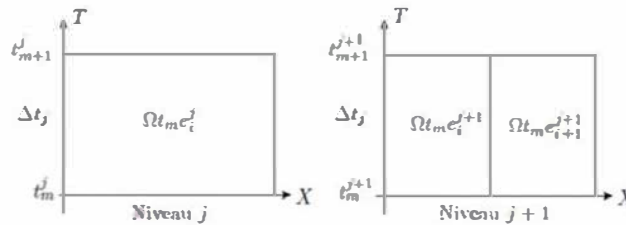


Figure 3 – Diagramme espace-temps élémentaire - Cas non linéaire

Dans le cas non linéaire, la méthode de résolution doit permettre le transfert de l'état élastoplastique (EP) des niveaux les plus fins vers les niveaux grossiers afin de tenir compte des non linéarités locales. Une approche multigrille de type "Full Approximation Scheme" (FAS) [8] permet de transmettre le vecteur d'état sur les maillages les plus grossiers de manière à approcher la solution de référence sur le maillage le plus fin.

L'approche ascendante qui consiste à créer progressivement des niveaux localisés depuis un niveau grossier, s'apparente au "Full Multigrid". La figure 4 représente cette stratégie (2 cycles FAS par niveau). Au delà du niveau 2, les grilles deviennent locales en espace et on distinguera, pour un niveau  $k$  donné, le maillage convergé  $\mathcal{M}_k^*$  et le maillage  $\mathcal{M}_k^+$  recouvert par  $\mathcal{M}_{k+1}$ .

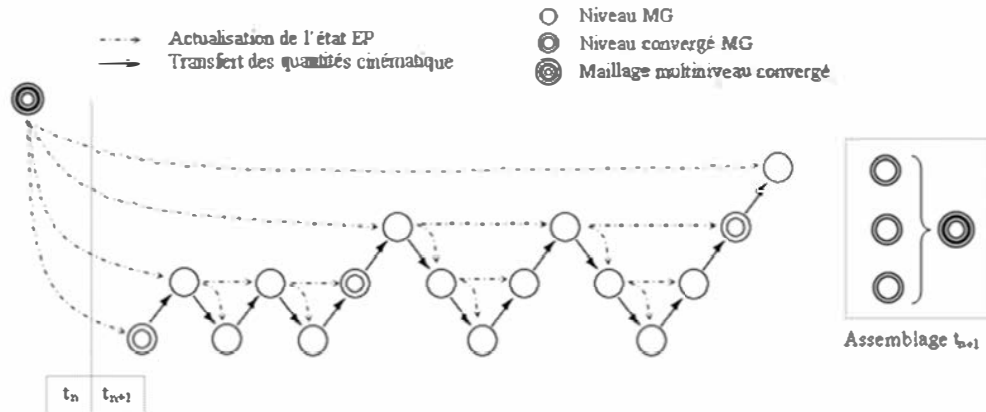


Figure 4 – Méthode Full Multigrid adaptée à la modélisation de l'élastoplasticité en dynamique

Le point délicat de la stratégie est le calcul et le transfert des variables internes. L'intégration de la relation de comportement est effectuée par un algorithme de retour radial sur le seuil [11].

Afin d'assurer un état statiquement admissible sur la grille fine, il convient d'actualiser son état EP depuis le dernier état EP admissible connu.

Lors de la création d'un niveau  $k$ , l'état EP du piquet de temps précédent est donc projeté sur la grille la plus fine. Après avoir relaxé le problème, l'état EP de la grille fine est restreint sur le maillage  $\mathcal{M}_{k-1}^+$  comme état de référence. L'état sur le maillage  $\mathcal{M}_{k-1}^*$  est quant à lui actualisé de manière classique. L'état EP du niveau recouvert va donc d'une part permettre d'améliorer la convergence du niveau le plus fin (cf. figure 5) et d'autre part de transmettre l'information de plasticité vue sur l'échelle fine au niveau sous-jacent.

Lors de la phase de correction (ascendante) l'état EP sur un niveau est actualisé depuis le dernier état EP connu sur ce niveau qui correspond à celui calculé lors de la phase de restriction (descendante).

### 3.2 Résultats numériques

Dans le cas non linéaire, l'adoption d'un schéma multigrille permet d'améliorer de manière significative la vitesse de convergence de l'algorithme de Newton-Raphson. Le choix des quantités transférées entre les niveaux lors de l'utilisation du FAS modifie l'apport de la stratégie multigrille en terme de vitesse de convergence. FMG1 fait référence à un algorithme multigrille où les variables EP sont laissées indépendantes sur chaque niveau. Le schéma multigrille avec transfert des variables EP (cf. §3.1) est noté FMG2.

Le cas test est équivalent à celui proposé pour illustrer la STAR-method linéaire. Les non linéarités envisagées sont ici de type matériau : la poutre est désormais élastoplastique ( $\sigma_y = 300\text{MPa}$ ,  $E_{ep} = E/10$ ) et soumise à  $f(t)$  avec  $F = 10^9$  N. Les maillages multigrilles sont ici globaux en espace.

La figure 5 présente la norme infinie relative du résidu en équilibre en fonction du nombre d'itérations sur la grille fine pour une résolution classique (monogrille), et pour les deux schémas multigrilles. Le piquet de temps considéré se place à 50% de la phase de charge de la poutre pour une déformation plastique maximum de l'ordre de 1,5%.

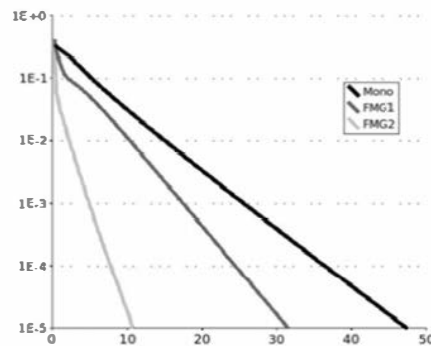


Figure 5 – Influence des multigrilles sur la vitesse de convergence

La complexité du schéma FMG2 est plus faible que celle associée à FMG1. En effet, lorsque les variables EP sont laissées indépendantes sur chaque niveau, l'état EP des grilles sous-jacentes ne décrit pas de manière précise l'état dans lequel se trouve la grille la plus fine (sur rigidité des grilles grossières induite par l'utilisation de la MEF). La correction FAS est donc calculée sur des modèles ne présentant pas un comportement équivalent à celui de la grille fine.

Le transfert des contraintes et des variables internes depuis la grille la plus fine permet de pallier à ce défaut tout en présentant l'avantage, pour l'utilisation de multigrilles localisées, de transférer une information EP sur les grilles grossières que celles-ci n'auraient pu mesurer seules.

## 4 Conclusion et perspectives

La STAR méthode est présentée dans le cas linéaire. En fournissant en entrée un maillage espace-temps initial et un critère d'arrêt, la stratégie permet de construire un maillage optimal minimisant le nombre de degrés de liberté et d'opération élémentaires pour une précision donnée.

Dans le cas non linéaire, l'utilisation d'une stratégie multigrille permet d'une part de concentrer les efforts de calcul dans les zones raffinées localisées, mais également d'améliorer la convergence du solveur itératif non linéaire utilisé.

Néanmoins, les mauvaises propriétés de lissage des algorithmes de Newton, et la nécessité de résoudre un système inverse empêchent la méthode d'atteindre son plein potentiel et de résoudre en  $O(n)$  opérations le modèle éléments finis. L'adoption d'un solveur de type gradient conjugué adapté à la résolution de problèmes non linéaire ([5], [10]) permettrait d'améliorer les performances de la stratégie.

## Références

- [1] A. Brandt. Multilevel Adaptive Solutions to boundary value problems. *Math. Comp.*, American Mathematical Society, 333–390, 1977.
- [2] P. Cavin, A. Gravouil, A.A. Lubrecht, A. Combescure. Automatic energy conserving space-time refinement for linear dynamic structural problems. *Int. J. Numer. Meth. Engng*, John Wiley & Sons, Ltd., 304–321, 2005.
- [3] T. Ekevid, P. Kettil, N.E. Wiberg. Adaptive multigrid for finite element computations in plasticity. *Comp. Struc.*, Elsevier, 2413–2424, 2004.
- [4] J. Fish, M. Pandheeradi, V. Belsky. An efficient multilevel solution scheme for large scale non-linear systems. *Int. J. Numer. Meth. Engng*, John Wiley & Sons, Ltd., 1597–1610, 1995.
- [5] A. Gravouil, A. Combescure. Multi-time step and two-scale domain decomposition method for non-linear structural dynamics. *Int. J. Numer. Meth. Engng*, John Wiley & Sons, Ltd., 1545–1569, 2003.
- [6] S. Kacou, I.D. Parsons. A parallel multigrid method for history-dependent elastoplasticity computations. *Comp. Meth. App. Mech. Engng*, Elsevier, 1–21, 1993.
- [7] P. Ladevèze, J.P. Pelle. *La maîtrise du calcul en mécanique linéaire et non linéaire*, Paris : Hermès Sciences. 2001.
- [8] C.H. Venner, A.A. Lubrecht. *Multilevel methods in lubrication*, Tribology Series 37. Elsevier, 2000.
- [9] I.D. Parsons, J.F. Hall. The multigrid method in solid mechanics. I : Algorithm description and behaviour. *Int. J. Numer. Meth. Engng*, John Wiley & Sons, Ltd., 719–737, 1990.
- [10] C. Rey, F. Risler. A Rayleigh-Ritz preconditioner for the iterative solution to large scale nonlinear problems. *Numerical Algorithms*, Baltzer AG, 279–311, 1998.
- [11] J.C. Simo, T.J.R. Hughes. *Computational inelasticity*, Springer Verlag, 1999.
- [12] O.C. Zienkiewicz, J.Z. Zhu. A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis. *Int. J. Numer. Meth. Engng*, John Wiley & Sons, Ltd., 337–357, 1987.